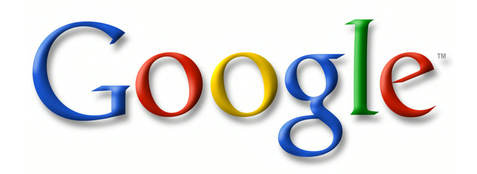
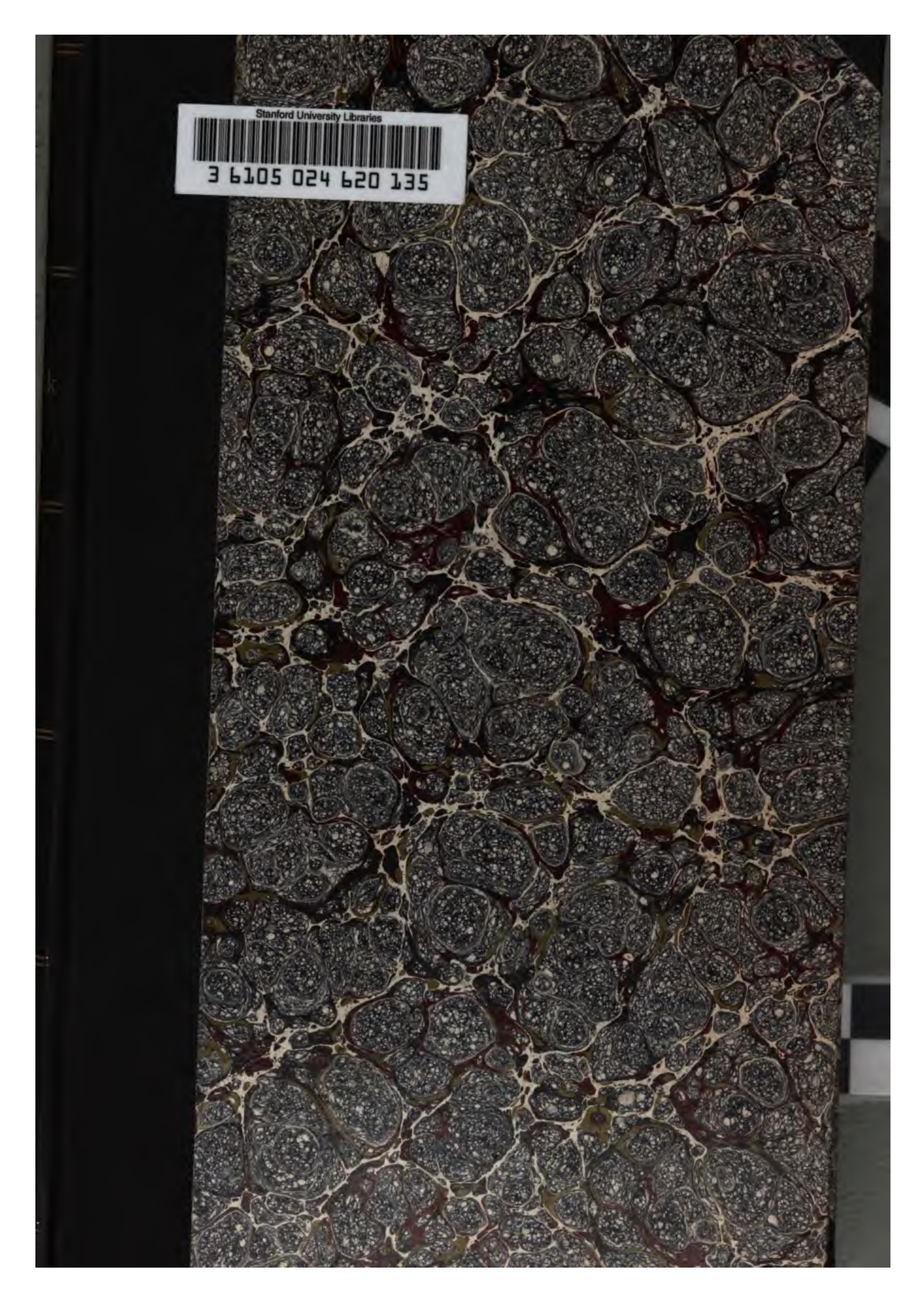



Stanford University Libraries
3 6105 024 620 135

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an
höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Achter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.
1846.

Inhaltsverzeichniss des achten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

(Fortsetzung der Abhandlung Theil VII. Nr. XIII.)

Die Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität.

§. 19.

Man denke sich wieder in der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlbüschel B, B' oder zwei Gerade A, A', und in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B'_1 oder zwei Gerade A_1, A'_1 gegeben; es seien der Reihe nach $a, b, c, d, e\ldots$ und $a', b', c', d', e'\ldots$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}\ldots$ und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}'\ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\ldots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1\ldots$; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1\ldots$ und $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1\ldots$ diejenigen Strahlen- und Punktenpaare dieser Gebilde, welche resp. durch die beliebigen Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}\ldots$; die beliebigen Geraden $a, b, c, d, e\ldots$ der Ebene $\mathfrak{E}$, und durch die beliebigen Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1\ldots$ und die beliebigen Geraden $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\ldots$ der Ebene $\mathfrak{E}_1$ bestimmt werden oder diese selber erst bestimmen; und zwar seien e, e'; $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$; e_1, e'_1; $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}'_1$ diejenigen zwei Elemente dieser vier Paar Gebilde, welche jedesmal mit dem gemeinschaftlichen Strahle oder Durchschnitte derselben zusammenfallen. Sind nun die Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ durch irgend zwei dieser vier Paar Gebilde dergestalt auf einander bezogen, dass entweder

α) $\boldsymbol{B}\ (a, b, c, d, e \ldots) = \boldsymbol{B}_1\ (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots)$ und
$\boldsymbol{B}'\ (a', b', c', d', e' \ldots) = \boldsymbol{B}'_1\ (a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1 \ldots)$; oder

β) $\boldsymbol{A}\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots) = \boldsymbol{A}_1\ (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1 \ldots)$ und
$\boldsymbol{A}'\ (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}' \ldots) = \boldsymbol{A}'_1\ (\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1 \ldots)$; oder aber

γ) $\boldsymbol{B}\ (a, b, c, d, e \ldots) = \boldsymbol{A}_1\ (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1 \ldots)$ und
$\boldsymbol{B}'\ (a', b', c', d', e' \ldots) = \boldsymbol{A}'_1\ (\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1 \ldots)$ ist,

indem das den Gebilden der einen Ebene gemeinschaftliche Element dem den Gebilden der anderen Ebene gemeinschaftlichen Elemente entspricht; so wird die neue Art geometrischer Verwandtschaft, in welche hierdurch die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und die Systeme ihrer Elemente treten, im Falle α) und β) mit dem Namen der **Collineation**, und im Falle γ) mit dem der **Reciprocität** bezeichnet; und man sagt: diese Ebenen und Systeme sind **collinear-** oder **reciprok-verwandt**.

Aus dieser Definition und dem in Nro. XXX. des 4ten Theils des Archivs. Einl. 5. entwickelten Satze ergibt sich nun auf den ersten Anblick das bekannte Theorem:

1. **Sind in einer Reihe von Ebenen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei unmittelbar aufeinander folgende collinear- oder reciprok-verwandt, so ist eine jede derselben mit einer jeden, und namentlich auch die erste mit der letzten collinear- oder reciprok-verwandt.**

Noch mehr: denkt man sich in jener Reihe von Ebenen je zwei unmittelbar auf einander folgende geometrisch verwandt **überhaupt**, aber so, dass das Hauptdreieck einer jeden Ebene nicht nur dem Hauptdreiecke der ihr vorangehenden, sondern auch dem der ihr nachfolgenden Ebene zugeordnet ist — was im Allgemeinen nicht nothwendig ist, indem eine jede Ebene in Bezug auf die vorangehende und die nachfolgende zwei verschiedene Hauptdreiecke haben kann — und sind z. B. der Reihe nach $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}', \boldsymbol{P}''$; $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}''_1$; $\boldsymbol{B}_{II}, \boldsymbol{B}'_{II}, \boldsymbol{B}''_{II}$; $\boldsymbol{P}_{III}, \boldsymbol{P}'_{III}, \boldsymbol{P}''_{III}$; $\boldsymbol{B}_{IV}, \boldsymbol{B}'_{IV}, \boldsymbol{B}''_{IV} \ldots$; die zugeordneten Hauptlinien und Hauptpunkte der Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_{II}, \mathfrak{E}_{III}, \mathfrak{E}_{IV} \ldots$; so werden sich einerseits in den betreffenden Gebilden $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_{II}, \boldsymbol{B}_{III}, \boldsymbol{A}_{IV} \ldots$ die Elemente $\boldsymbol{P}'', \boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{B}''_{II}, \boldsymbol{P}'_{III}, \boldsymbol{B}''_{IV} \ldots$, andererseits in den Gebilden $\boldsymbol{B}', \boldsymbol{B}'_1, \boldsymbol{A}'_{II}, \boldsymbol{B}'_{III}, \boldsymbol{A}'_{IV} \ldots$ die Elemente $\boldsymbol{P}'', \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}''_{II}, \boldsymbol{P}_{III}, \boldsymbol{B}''_{IV} \ldots$ entsprechen; folglich müssen auch in den alternirenden Gebilden $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_{II}, \boldsymbol{A}_{IV} \ldots$ die Elemente $\boldsymbol{P}'', \boldsymbol{B}''_{II}, \boldsymbol{B}''_{IV} \ldots$, und in den alternirenden Gebilden $\boldsymbol{B}', \boldsymbol{A}'_{II}, \boldsymbol{A}'_{IV} \ldots$ die Elemente $\boldsymbol{P}'', \boldsymbol{B}''_{II}, \boldsymbol{B}_{IV}'' \ldots$, d. h. die den Gebilden der 1ten, 3ten, 5ten... Ebene gemeinschaftlichen Elemente in beider Hinsicht sich entsprechen; und dasselbe gilt von denen der 2ten, 4ten, 6ten....

2. **Sind in einer Reihe von Ebenen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei unmittelbar aufeinander folgende geometrisch verwandt überhaupt, jedoch so,**

dass jede dieser Ebenen in Bezug auf die ihr folgende das nämliche Hauptdreieck als in Bezug auf die ihr vorangehende besitzt, so sind je zwei alternirende Ebenen dieser Reihe oder überhaupt je zwei, welche beide zwei Stellen von ungerader oder von gerader Zahl einnehmen, collinear- oder reciprok-verwandt.

§. 20.

Sind die Gebilde B, B' oder A, A' der Ebene $\mathfrak{E}$ projektivisch, so sind auch die Gebilde B_1, B'_1 oder A_1, A'_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ projektivisch, und wenn nun in dem gemeinschaftlichen Elemente der beiden ersteren zwei entsprechende e, e' oder $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ sich vereinigen, so werden den letzteren auch in den beiden anderen Gebilden zwei Elemente e_1, e'_1 oder $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}'_1$, die sich vereinigen, entsprechen müssen. Nun aber bestimmen die Punkte einer jeden Geraden der einen Ebene zwei perspectivische Strahlbüschel B, B', und die Strahlen eines jeden Punktes zwei perspektivische Gerade A, A', und umgekehrt; also folgt:

1.

α. In je zwei collinearen Ebenen entspricht nicht nur einem jeden Punkte der einen ein Punkt der anderen, sondern auch einer jeden Geraden der einen Ebene eine Gerade der anderen.

β. In je zwei collinearen Ebenen entspricht nicht nur einer jeden Geraden der einen eine Gerade der anderen, sondern auch einem jeden Punkte der einen Ebene ein Punkt der anderen.

γ. In je zwei reciproken Ebenen entspricht nicht nur einem jeden Punkte der einen Ebene eine Gerade der anderen, sondern auch einer jeden Geraden der ersteren ein Punkt der zweiten.

2.

α. Einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht wieder eine Gerade und deren Punkte; und einem jeden Punkte und dessen Strahlen entspricht wieder ein Punkt und dessen Strahlen.

β. Einem jeden Punkte und dessen Strahlen entspricht wieder ein Punkt und dessen Strahlen; und einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht wieder eine Gerade und deren Punkte.

γ. Einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht ein Punkt und dessen Strahlen; und einem jeden Punkt und dessen Strahlen entspricht eine Gerade und deren Punkte.

3.

α und β.

In jeder der beiden Ebenen gibt es eine Gerade, welche der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entspricht.

γ. In jeder der beiden Ebenen gibt es einen Punkt, welcher der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entspricht.

Eine jede der beiden so eben unter α und β. genannten Geraden soll die Achse der betreffenden Ebene, und ein jeder der beiden unter γ. genannten Punkte soll der Mittelpunkt der Ebene heissen.

4.

α und β.

Die unendlich entfernten Punkte der Achsen beider Ebenen sind entsprechende Punkte.

5.

α und β.

Allen Geraden, welche mit der Achse der einen Ebene parallel sind, entsprechen solche, welche ihrerseits mit der Achse der anderen parallel laufen.

§. 21.

Da in α. je zwei entsprechende Gerade in Ansehung der Punkte, in denen sie von den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 (oder B', B'_1) geschnitten werden, ebenfalls projektivisch sein müssen, und da die Punkte, in denen zwei Paar entsprechende Geraden sich schneiden, entsprechende Punkte sind; so werden auch irgend zwei entsprechende Strahlbüschel — indem man sie sich von irgend zwei entsprechenden Geraden durchschnitten denkt — in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch sein müssen; und ähnlich verhält es sich in β. und γ.

1.

α. In zwei collinearen Ebenen sind je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare, und je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch;

β. In zwei collinearen Ebenen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare, und je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch;

oder:

das Doppelverhältniss $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}:\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$, welches durch irgend vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ einer Geraden bestimmt wird, ist gleich dem Doppelverhältnisse $\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}:\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1}$, welches durch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ bestimmt wird; und das Doppelverhältniss $\frac{\sin . ac}{\sin . bc}:\frac{\sin . ad}{\sin . bd}$, welches irgend vier Strahlen a, b, c, d eines Punktes bestimmen, ist gleich dem Doppelverhältnisse $\frac{\sin . a_1c_1}{\sin . b_1c_1}:\frac{\sin . a_1d_1}{\sin . b_1d_1}$, welches die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 bestimmen.

γ. Jede Gerade der einen von zwei reciprok-verwandten Ebenen ist mit dem entsprechenden Strahlbüschel der anderen, und jedes Strahlbüschel der ersten ist mit der entsprechenden Geraden der zweiten Ebene — in Ansehung ihrer entsprechenden Elementenpaare projectivisch;

oder:

das Doppelverhältniss $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}:\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$, welches in irgend einer von beiden Ebenen durch vier beliebge Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ einer Geraden bestimmt wird, ist gleich dem Doppelverhältnsse $\frac{\sin . a_1 c_1}{\sin . b_1 c_1}:\frac{\sin . a_1 d_1}{\sin . b_1 d_1}$, welches durch die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 der anderen Ebene bestimmt wird.

Aus diesem Satze und aus der Definition der Collineation und Reciprocität ergibt sich nun sofort:

2.

α. Ist die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Paar projektivische Strahlbüschel B, B_1 und B', B'_1 bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man jene zwei Paar Strahlbüschel 1) entweder mit zwei beliebigen anderen Paar entsprechenden Strahlbüscheln, oder 2) mit irgend zwei Paar entsprechenden Geraden

β. Ist die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Paar projektivische Gerade A, A_1 und A', A'_1 bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man je zwei Paar Geraden 1) entweder mit zwei beliebigen anderen Paar entsprechenden Geraden, oder 2) mit irgend zwei Paar entsprechenden Strahlbüscheln beider Ebe-

beider Ebenen vertauscht, und die entsprechenden Strahlen- oder Punktenpaare derselben als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) sind je zwei im Sinne von α. collinear-verwandte Ebenen zugleich auch im Sinne von β. collinear-verwandt.

nen vertauscht, und die entsprechenden Punkten- oder Strahlenpaare derselben als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) sind je zwei im Sinne von β. collinear-verwandte Ebenen zugleich auch im Sinne von α. collinear-verwandt.

γ. Ist die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Strahlbüschel B, B' der ersten und zwei mit denselben projektivische Gerade A_1, A'_1 der zweiten Ebene bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man 1) jene zwei Strahlbüschel mit irgend zwei anderen Strahlbüscheln der Ebene $\mathfrak{E}$ und diese zwei Geraden mit den entsprechenden Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$, oder 2) jene zwei Strahlbüschel mit irgend zwei Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$ und diese zwei Gerade mit den entsprechenden Strahlbüscheln der Ebene $\mathfrak{E}_1$ vertauscht, und die entsprechenden Elementenpaare der neuen Gebilde als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) spielen beide Ebenen in dieser Beziehung zu einander durchaus eine und dieselbe Rolle.

Da nun zwei projektivische Gebilde vollkommen bestimmt sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Elemente derselben gegeben sind, so folgt aus dem letzten Satze:

3.

Die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald entweder irgend vier Paar entsprechende Punkte oder irgend vier Paar entsprechende Gerade derselben gegeben sind.

Die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald in einer von beiden Ebenen irgend vier Punkte und in der anderen die denselben entsprechenden Geraden gegeben sind.

Und zwar kann man in zwei Ebenen vier Elementenpaare beliebig annehmen und dann festsetzen, die Ebenen sollen collinear- oder reciprok-verwandt, und jene vier Elementenpaare sollen entsprechende sein.

Ist in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Involution von Punkten oder Strahlen gegeben, z. B. ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots) = A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots),$$

so folgt aus 1. z. B. für collineare Ebenen:

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = A(a, b, c, d \ldots a', b', c', d' \ldots)$$
$$= A'(a', b', c', d' \ldots a, b, c, d \ldots) = A'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

also

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = A'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots);$$

u. s. w.

4.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Punkten oder Strahlen der einen Ebene wieder eine Involution von Punkten oder Strahlen der anderen; den Hauptpunkten oder Hauptstrahlen der ersteren entsprechen die Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der letzteren, und daher entsprechen je vier harmonischen Punkten oder Strahlen der einen Ebene wiederum vier harmonische Punkte oder Strahlen der anderen.

In zwei reciprok-vewandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Punkten oder Strahlen der einen Ebene resp. eine Involution von Strahlen oder Punkten der anderen; den Hauptpunkten oder Hauptstrahlen der ersteren entsprechen die Hauptstrahlen oder Hauptpunkte der letzteren; und daher entsprechen je vier harmonischen Punkten oder Strahlen der einen Ebene vier harmonische Strahlen oder Punkte der anderen.

Da zwei projektivische Gerade ähnlich sind, wenn deren unendlich entfernte Punkte sich entsprechen, so folgt aus 4. des vorigen Paragraphen und aus 1. des jetzigen:

5.

In zwei collinear-verwandten Ebenen sind je zwei entsprechende Gerade, welche mit den Achsen parallel laufen, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich.

§. 22.

Man denke sich in einer von zwei collinear-verwandten Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, z. B. in $\mathfrak{E}$, alle diejenigen Geraden a, b, c, $d \ldots$, welche auf der Achse derselben senkrecht stehen; so entsprechen denselben, als Parallelen, lauter solche Linien in $\mathfrak{E}_1$, welche sich in einem und demselben Punkte der Achse von $\mathfrak{E}_1$ schneiden, und umgekehrt: jedem Strahle dieses Punktes entspricht eine von

jenen Senkrechten. Denkt man sich also denjenigen Strahl dieses Punktes, welcher auf der Achse von $\mathfrak{E}_1$ senkrecht ist, so folgt:

1. In zwei collinearen Ebenen gibt es allemal zwei, aber auch nur zwei, entsprechende Gerade, deren jede auf der betreffenden Achse senkrecht steht.

Jetzt denke man sich in $\mathfrak{E}$ irgend zwei Gerade, welche einen spitzen Winkel φ einschliessen, und zugleich die beiden Schaaren sämmtlicher Geraden, welche mit jenen zweien parallel laufen; so entsprechen diesen zwei Schaaren in $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ auf der Achse liegen; und denkt man sich über der Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, als Sehne, einen Kreis construirt, welcher des Winkels φ fähig ist, so müssen je zwei Strahlen dieser Strahlbüschel, welche sich auf der Peripherie dieses Kreises schneiden, zwei zu jenen beiden Parallelen-Schaaren gehörige Gerade entsprechen. Offenbar aber gibt es zwei solche Kreise, welche symmetrisch auf beiden Seiten der Achse liegen; und nur, wenn φ kein spitzer, sondern ein rechter Winkel ist, fallen beide in einen einzigen zusammen.

2. Sind in einer von zwei collinearen Ebenen irgend zwei Richtungen gegeben, so gibt es in derselben unzählige Paare von Geraden, welche jene Richtungen haben, und deren entsprehende in der anderen Ebene denselben Winkel, als jene, einschliesen; und zwar liegen die Durchschnitte dieser entsprechenden Geraden auf zwei congruenten Kreisen, welche einander in zwei Punkten der Achse schneiden.

Es seien endlich A, B, C drei beliebige Gerade der Ebene $\mathfrak{E}$, von denen A und B den spitzen Winkel φ; B und C den spitzen Winkel ψ; A und C den Winkel $(\varphi+\psi)$ einschliessen; den drei Schaaren Gerader, welche mit A, B, C parallel sind, entsprechen in $\mathfrak{E}_1$ drei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ auf der Achse von $\mathfrak{E}_1$ liegen; und beschreibt man auf beiden Seiten der Achse über der Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ einen des Winkels φ, und über der Strecke $\mathfrak{n}\mathfrak{s}$ einen des Winkels ψ fähigen Kreis, und verbindet irgend einen Durchschnitt dieser Kreise, welcher ausser der Achse liegt, mit den Punkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ durch die Geraden a_1, b_1, c_1, so müssen den letzteren in $\mathfrak{E}$ drei solche Gerade a, b, c entsprechen, welche beziehlich mit A, B, C parallel sind und also paarweise die Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$ einschliessen. Liegt nun, wie in Taf. I. Fig. 1., der Punkt $\mathfrak{n}$ zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{s}$, so hat nur der Durchschnitt solcher zwei Kreise, deren Mittelpunkte auf einerlei Seite der Achse liegen, die Eigenschaft, dass die von ihm ausgehenden Linien a_1, b_1, c_1 die drei Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$ einschliessen; liegt aber der Punkt $\mathfrak{n}$ ausserhalb $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{s}$, wie in Taf. I. Fig. 2., so kommt dieselbe Eigenschaft nur dem Durchschnitte solcher zwei Kreise zu, deren Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Achse liegen. In jedem anderen Falle nämlich erhält man die drei Winkel φ, ψ, $(\varphi-\psi)$. Es gibt also in $\mathfrak{E}_1$ allemal zwei Punkte s_1, σ_1, von welchen aus man drei Gerade a_1, b_1, c_1 ziehen kann, welche mit einander dieselben drei Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$, als die denselben entsprechenden Geraden a, b, c einschliessen, und zwar sind diese Punkte gleichweit von

der Achse **entfernt, und ihre Verbindungslinie steht auf der Achse senkrecht**, was unmittelbar aus der symmetrischen Lage der Kreise erhellt.

Da nach Steiner's „Abhängigkeit geom. Gebilde u. s. w. Thl. I. S. 47." zwei projektivische Strahlbüschel allemal projektivisch gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Winkel derselben, welche durch drei entsprechende Strahlenpaare bestimmt werden, gleich sind; so folgt aus der vorigen Betrachtung und aus §. 21. 1., dass **je zwei** Strahlen eines Punktes s_1, σ_1 den nämlichen (spitzen) Winkel, als die entsprechenden Strahlen des entsprechenden Punktes s, σ einschliessen.

Gesetzt nun, es gäbe noch zwei entsprechende projektivisch gleiche Strahlbüschel B, B_1, so könnte man in B die den drei Geraden A, B, C parallelen Strahlen ziehen und schliessen, dass die denselben entsprehenden Strahlen von B_1 durch die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ gehen, und dass der Punkt B_1 entweder mit s_1 oder mit σ_1 zusammenfallen müsse. Es gibt also nur zwei Paar solche Strahlbüschel.

Die Geraden A, B, C konnten eben so gut in der Ebene $\mathfrak{E}_1$, als in $\mathfrak{E}$, angenommen werden, und man würde in $\mathfrak{E}$, sowie vorhin die Punkte s_1, σ_1, zwei Punkte gefunden haben, welche dem so eben Gesagten gemäss durchaus einerlei mit s, σ sein müssen. Hieraus folgt, dass auch die Punkte s, σ gleichweit von der Achse der $\mathfrak{E}$ entfernt liegen, und ihre Verbindungslinie auf der letzteren senkrecht steht. Die Geraden $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ sind also jene zwei entsprechenden Geraden, welche beide auf der betreffenden Achse senkrecht stehen.

Es seien jetzt $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}_1$ die Punkte, in welchen die Achsen Q, P_1 der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ von den Senkrechten $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ geschnitten werden (Taf. I. Fig. 3.); so entspricht $\mathfrak{q}$ dem unendlich entfernten Punkte von $s_1\sigma_1$, und $\mathfrak{p}_1$ dem unendlich entfernten von $s\sigma$; sie sind also die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen dieser, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivischen Geraden. Man bestimme nun auf diesen letzteren zwei Punktenpaare $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ dergestalt, dass die Strecken $\mathfrak{q}\mathfrak{s} = \mathfrak{q}\mathfrak{t} = \mathfrak{p}_1 s_1 = \mathfrak{p}_1\sigma_1$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{q}s = \mathfrak{q}\sigma$ seien; so müssen sowohl die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ als auch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$ entsprechende Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sein; denn nach S. 250. des IV. Thls. des Archivs ist Rechteck $\mathfrak{q}s \,.\, \mathfrak{p}_1 s_1 = \mathfrak{q}\mathfrak{s} \,.\, \mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_{II}$, wenn $\mathfrak{s}_{II}$ der dem $\mathfrak{s}$ entsprechende Punkt ist; also ist, da $\mathfrak{q}\mathfrak{s} = \mathfrak{p}_1 s_1$, auch $\mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_{II} = \mathfrak{q}s = \mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{t}_1$, und da die Aufeinanderfolge der Punkte $\mathfrak{t}$, s, σ, $\mathfrak{s}$ mit der ihrer entsprechenden übereinstimmen muss, so fällt $\mathfrak{s}_{II}$ mit $\mathfrak{s}_1$ zusammen u. s. w.

Hiernach sind auch die Strecken $s\mathfrak{s} = s_1\mathfrak{s}_1 = \sigma\mathfrak{t} = \sigma_1\mathfrak{t}_1$, und $s\mathfrak{t} = s_1\mathfrak{t}_1 = \sigma\mathfrak{s} = \sigma_1\mathfrak{s}_1$. Man denke sich durch die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ (oder $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$) in den betreffenden Ebenen zwei Parallelen S, S_1 mit den Achsen Q, P_1, und durch die Punkte s, s_1 die entsprechenden Strahlenpaare $a, b, c, d \ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ gezogen, welche die S, S_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d} \ldots$; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1 \ldots$ schneiden — so sind, zufolge §. 20. 5., und weil $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ entsprechende Punkte sind, die S, S_1 entsprechende Gerade, und demnach $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d} \ldots$ und $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1 \ldots$ lauter entsprechende Punktenpaare. Aber die Strahlen a, b, c, $d \ldots$ bilden mit der

Senkrechten $s\sigma$ die nämlichen Winkel, als die entsprechenden $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ mit $s_1\sigma_1$; und es ist $s\sigma = s_1\sigma_1$; also ist auch $\mathfrak{s}\mathfrak{a} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{s}\mathfrak{b} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{b}_1$ u. s. w., d. h. die Geraden S, S_1 sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare *projektivisch-gleich*.

Legt man durch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$ mit Q, P_1 zwei Parallelen T, T_1, so gilt von ihnen das nämliche, als von S, S_1.

Es gehe durch den Punkt $\mathfrak{p}_1$ irgend eine Gerade, welche S_1 in $\mathfrak{a}_1$ und T_1 in α_1 schneide; so ist die derselben entsprechende Gerade mit der Senkrechten $s\sigma$ parallel und schneidet folglich die S und T in entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}$ und α, die auf *einerlei* Seite der Senkrechten liegen, was mit $\mathfrak{a}_1$ und α_1 nicht der Fall ist. Denkt man sich also die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so gelegt, dass die Punktenpaare $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ und $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ von S, S_1 nach einerlei Seite hin auf einander folgen, so müssen dagegen die entsprechenden Punktenpaare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ von T, T_1 nach entgegengesetzten Richtungen laufen.

Denkt man sich ausser S_1 und T_1 noch irgend eine dritte Gerade R_1 parallel mit P_1, welche von $s_1\sigma_1$ in $\mathfrak{r}_1$, und von jener durch $\mathfrak{p}_1$ gelegten Geraden in $\mathfrak{a}'_1$ geschnitten wird, so kann das Segment $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}'_1$ dem Segment $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$ nicht gleich sein, aber $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$ ist gleich $\mathfrak{s}\mathfrak{a}$, und letzteres ist dem dem $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}'_1$ entsprechenden Segmente $\mathfrak{r}\mathfrak{a}'$ der entsprechenden, mit Q parallelen Geraden R gleich; also sind die Geraden R, R_1 nicht projektivisch gleich. Nun aber können nur solche Gerade, welche mit den Achsen parallel sind, projektivisch-gleich sein, weil sonst zwei Paar unendlich entfernte Punkte, und folglich die unendlich entfernten Geraden selber entsprechend sein müssten; also gibt es ausser S, S_1 und T, T_1 kein drittes Paar entsprechende projektivisch-gleiche Gerade.

Als Ergebniss der ganzen vorigen Betrachtung kann man nun folgenden Satz aufstellen, der sich in der Folge als besonders wichtig herausstellen wird:

3.

In zwei collinearen Ebenen gibt es a) allemal zwei Paar entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlenpaare projektivisch gleiche Strahlbüschel bilden, aber es gibt kein drittes solches Paar; b) und diese Punktenpaare liegen auf denjenigen zwei entsprechenden Geraden, welche beide auf den Achsen der Ebenen senkrecht stehen, und sind gleichweit von der betreffenden Achse entfernt. c) Es gibt allemal zwei Paar entsprechende Gerade, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch gleich sind; aber es gibt kein drittes solches Paar; d) und zwar sind diese Geraden mit den Achsen parallel, und je zwei derselben Ebene sind gleichweit von der betreffenden Achse entfernt. e) In jeder Ebene ist die Entfernung der beiden Geraden von der Achse ebenso gross als in der anderen Ebene die Entfernung jener beiden Punkte von der Achse, und die Entfernung einer jeden solchen Geraden von einem jener Punkte ist eben so gross als die der entsprechenden Geraden von dem

entsprechenden Punkte. *f*) Denkt man sich die Ebenen und deren Achsen parallel mit einander, so ist allemal das eine Paar der projektivisch gleichen entprechenden Geraden gleichliegend, das andere ungleichliegend, und das nämliche gilt von den projektivisch gleichen entsprechenden Strahlbüscheln.

§. 23.

Befindet sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und sind B, B' irgend zwei Punkte desselben, so bestimmen die übrigen Punkte von $\mathfrak{K}$ zwei projektivische Strahlbüschel B, B'; diesen aber entsprechen in der collinear-verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B'_1, wovon jeder mit einem der ersteren projektivisch ist; also sind auch letztere unter sich projektivisch, d. h. dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ entspricht wieder ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$; und in der reciprok-verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$ entspricht jedem Strahlbüschel B, B' eine demselben projektivische Gerade A_1, A'_1; also sind letztere auch unter sich projektivisch; d. h. allen Punkten von $\mathfrak{K}$ entsprechen die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}_1$. Ist nun e' der gemeinschaftliche Strahl von B, B'; e'_1 der von B_1, B'_1, und sind e, e_1 die Tangenten in B und B_1, so sind in den Strahlbüscheln B, B', B'_1, B_1 der Reihe nach e, e', e'_1, e_1 entsprechende Strahlen, also auch e, e_1 in B, B_1 u. s. w.

1.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einem jeden Kegelschnitte wiederum ein Kegelschnitt, d. h. einem jeden Punkte des einen entspricht ein Punkt des andern, und der Tangente in jenem Punkte entspricht die Tangente im letzteren.

In zwei reciprok-verwandten Ebenen entspricht einem jeden Kegelschnitte wiederum ein Kegelschnitt, d. h. einem jeden Punkte des einen entspricht eine Tangente des anderen, und der Tangente im ersteren entspricht der Berührungspunkt der letzteren.

Ferner: ist $\mathfrak{C}$ irgend eine Curve der $n$ten Ordnung und der $m$ten *Klasse* in der Ebene $\mathfrak{E}$, d. h. wird $\mathfrak{C}$ von einer beliebigen Geraden A höchstens in n Punkten geschnitten, und gehen an $\mathfrak{C}$ von einem beliebigen Punkte B höchstens m Tangenten, so hat auch das der $\mathfrak{C}$ entsprechende System von Punkten $\mathfrak{C}_1$ mit der der A entsprechenden Geraden A_1 höchstens n Punkte, und das der $\mathfrak{C}$ entsprechende System von Geraden $\mathfrak{C}_1$ hat mit dem dem B entsprechenden Punkte B_1 höchstens m Gerade gemein u. s. w. u. s. w.

2.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Curve der einen Ebene wieder eine Curve

in der anderen, und zwar von derselben Ordnung und Klasse als die erstere ist; nämlich jedem Punkte der einen Curve entspricht ein Punkt der anderen, und der Tangente im ersteren entspricht die Tangente im letzteren.

In zwei reciprok-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Curve der einen Ebene wieder eine Curve in der anderen, deren Klasse der Ordnung der ersteren, und deren Ordnung der Klasse der ersteren gleich ist; nämlich einem jeden Punkte der einen Curve entspricht eine Tangente der anderen, und der Tangente im ersteren entspricht der Berührungspunkt der letzteren.

In einer Ebene $\mathfrak{E}$ befinde sich ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und in irgend einer anderen Ebene $\mathfrak{E}_1$ ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$; auf $\mathfrak{K}$ wähle man drei beliebige Punkte B, B', $\mathfrak{a}$ und ebenso auf $\mathfrak{K}_1$ drei beliebige Punkte B_1, B'_1, $\mathfrak{a}_1$, und ziehe in B, B' die Tangenten s, s', welche sich in $\mathfrak{s}$ schneiden, in B_1, B'_1 die Tangenten s_1, s'_1, die sich in $\mathfrak{s}_1$ schneiden, und verbinde endlich B, B' mit $\mathfrak{a}$ durch a, a', und B_1, B'_1 mit $\mathfrak{a}_1$ durch a_1, a'_1. Nach §. 21. 3. darf man nun festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen collinear, und zwar die vier Punktenpaare B, B_1; B', B'_1; a, a_1; $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ entsprechende Punkte derselben sein. Dann aber entspricht dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B_1, B'_1 und $\mathfrak{a}_1$ geht und in B_1, B'_1 zwei Gerade berührt, welche den Tangenten s, s' von $\mathfrak{K}$ entsprechen; nun aber sind s, s_1; s', s'_1 entsprechende Linien von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$; also hat dieser Kegelschnitt mit $\mathfrak{K}_1$ nicht nur die drei Punkte B_1, B'_1, $\mathfrak{a}_1$, sondern auch die beiden Tangenten in B_1, B'_1 gemein, d. h. er ist mit demselben identisch; u. s. w.

3.

Zwei beliebige Kegelschnitte sind auf unzählige Weisen mit einander collinear- oder auch reciprok-verwandt.

Unter anderen ist also auch ein jeder Kegelschnitt auf unzählige Weisen mit sich selber collinear- und reciprok-verwandt.

Besondere Fälle,

oder

die Verwandtschaften der Affinität, der Gleichheit, der Aehnlichkeit und der Congruenz.

§. 24.

Denkt man sich zwei collineare Ebenen im Sinne von β. bestimmt, so kann man a priori folgende besondere Fälle der Collineations-Verwandtschaft statuiren.

1. Ein Paar der Linien A, A_1; A', A'_1 sind projektivisch ähnlich.

2. Ein Paar derselben sind projektivisch-gleich.

3. Beide Paare sind projektivisch-ähnlich.

4. Beide Paare sind projektivisch-gleich.

5. In Nro. 3. ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken von A, A_1 gleich dem Verhältnisse der entsprechenden Strecken von A', A'_1.

6. 7. 8. 9. 10. In jedem der vorigen Fälle schliessen zugleich die Geraden A, A' denselben Winkel ein, als die Geraden A_1, A'_1; und zwar legt man die Geraden A, A_1 so auf einander, dass sie gleichliegend sind, so sind die Geraden A', A'_1 entweder

a) gleichliegend, oder

b) ungleichliegend.

Bestimmt man dagegen jene Ebenen im Sinne von α., so sind nur folgende Fälle denkbar:

11. Ein Paar der Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 sind projektivisch-gleich.

12. Beide Paare sind projektivisch-gleich; und zwar, wenn das eine Paar B, B_1 gleichliegend sind, so sind die beiden anderen B_1, B'_1 entweder

a) gleichliegend, oder

b) ungleichliegend.

13. 14. In Nro. 11. und 12. sind zugleich auch die Strecken B, B' und B_1, B'_1 einander gleich.

Die meisten der hier aufgeführten Fälle sind es aber nur scheinbar; entweder nämlich enthalten sie Bestimmungen, welche in collinearen Ebenen überhaupt gewissen Elementenpaaren derselben eigen sind, oder sie fallen mit anderen der hier genannten Fälle zusammen. Hier aber kann nur von solchen die Rede sein, in welchen sämmtliche Elementenpaare eine der allgemeinen untergeordnete Bestimmung erleiden, sowie von solchen, welche sich auf dieselbe Weise zu diesen Fällen selbst wieder verhalten.

Da nach §. 21. 5. und §. 22. 3. es in zwei collinearen Ebenen allemal unzählige Paare projektivisch-ähnlicher entsprechender Geraden und zwei Paar projektivisch-gleiche gibt, welche mit den Achsen parallel laufen, und da in Taf. I. Fig. 3. je zwei entsprechende Strahlen der Punkte s, s_1 oder σ, σ_1 mit jenen ersteren gleiche Winkel bilden müssen, so erhellt sogleich, dass Nro. 1., 2., 6. und 7. keine besondere Art von Collineations-Verwandtschaft begründen; und dasselbe gilt von Nro. 11., 12. *b*. und 13. wegen der projektivisch-gleichen Strahlbüschel s, s_1 und σ, σ_1, deren gegenseitige Lage der in 12. *b*. geforderten entspricht. Der Fall 14. *b*. ist derjenige, wenn in Taf. I. Fig. 3. die Strecken $s\sigma$ und $s_1\sigma_1$ gleich gross werden, d. h. wenn die Punkte s, σ mit t, $\mathfrak{s}$ u. s. w. zusammenfallen. Diese Besonderheit aber ist — hier wenigstens — desswegen von keinem Interesse, weil dieselbe auf die übrigen

Elemente der Ebenen keinen wesentlichen Einfluss übt. Es bleiben also nur noch die Fälle 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12. *a.* und 14. *a.* zu erwägen übrig. Der wichtigste derselben ist Nro. 3.; mit ihm fallen, wie sofort gezeigt werden soll, Nro. 4., 5., 8. und 10. *b.* zusammen, und Nro. 9. *b.* und die identischen Nro. 10. *a* und 12. *a.* bilden zwei besondere Arten von Nro. 3., denen wiederum die identischen Nro. 9. *a.* und 14. *a.* als die letzte Spitze von Besonderung sich unterordnen.

§. 25.

Sind sowohl die Geraden A, A_1 als A', A'_1 projektivisch-ähnlich, so sind die unendlich entfernten Punkte eines jeden Paares entsprechende Punkte; also entsprechen sich die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen gegenseitig, d. h. ihre Achsen fallen ins Unendliche hinaus.

Zwei collinear-verwandte Ebenen, deren unendlich entfernte Geraden sich gegenseitig entsprechen, heissen affin, und ihre Verwandtschaft die der Affinität.

Hieraus folgt sofort:

1. In zwei affinen Ebenen sind die unendlich entfernten Punkte je zweier entsprechenden Geraden entsprechende Punkte; und daher sind

2. Je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich; und

3. Jeder Schaar von Parallelen der einen Ebene entspricht wiederum eine Schaar von Parallelen in der anderen.

In Taf. I. Fig. 4. seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1 \ldots$ beliebige entsprechende Punktenpaare zweier affiner Ebenen, und zwar $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ die Durchschnitte von $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ae}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1$; so hat man kraft des zweiten Satzes dieses Paragraphen:

$$\Delta\,\mathfrak{abc} : \Delta\,\mathfrak{acd} = \mathfrak{bc} : \mathfrak{cd} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 = \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\,;$$
$$\Delta\,\mathfrak{acd} : \Delta\,\mathfrak{ace} = \mathfrak{ad} : \mathfrak{ae} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1 = \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1\,;$$

also auch $\Delta\,\mathfrak{abc} : \Delta\,\mathfrak{ace} = \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1$ oder

$$\Delta\,\mathfrak{abc} : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 = \Delta\,\mathfrak{ace} : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1 = \Delta\,\mathfrak{acf} : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$$

u. s. w.

Also ist auch Fig. $\mathfrak{abcef}$: Fig. $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1 = \Delta\,\mathfrak{abc} : \Delta\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 = \text{const.}$; und da jede krummlinichte Figur als eine geradlinichte mit unendlich-kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt ganz allgemein:

4. In zwei affinen Ebenen haben je zwei entsprechende Flächenräume ein bestimmtes unveränderliches Verhältniss zu einander.

5. Sind in zwei affinen Ebenen ein einziges Paar

entsprechende Flächenräume einander gleich, so sind je zwei solche Räume einander gleich.

Affine Ebenen heissen gleich, und ihre Verwandtschaft die der Gleichheit, wenn das Verhältniss ihrer entsprechenden Flächenräume das der Einheit ist.

Es seien in Taf. I. Fig. 5. B, B_1 die Mittelpunkte irgend zweier entsprechender Strahlbüschel affiner Ebenen; so sind diese Strahlbüschel hinsichtlich ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch und besitzen nach Thl. IV. des Archivs S. 249. zwei Paar entsprechende Strahlen a, b; a_1, b_1, die zu einander rechtwinklig sind (Schenkel der entsprechenden rechten Winkel). Sind nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ irgend zwei entsprechende Punkte von a, a_1 und b, b_1, und nimmt man die Strecken $B\mathfrak{c} = B\mathfrak{b}$, $B_1\mathfrak{c}_1 = B_1\mathfrak{b}_1$, so sind, weil $B\mathfrak{c} : B_1\mathfrak{c}_1 = B\mathfrak{b} : B_1\mathfrak{b}_1$, auch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ entsprechende Punkte von b, b_1, und es sind nicht nur $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, sondern auch $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ entsprechende Strecken. Nun aber ist

$$\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1,$$

also auch

$$\mathfrak{ab} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{ac} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1.$$

6. In zwei affinen Ebenen lassen sich zu jedem Paar entsprechenden Geraden unzählige andere finden, deren entsprechende Strecken zu einander in demselben Verhältniss als die der beiden ersteren stehen. (Vgl. §. 24. Fall 5.)

Nimmt man in Taf. I. Fig. 5. die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ auf a, a_1 beliebig an, macht $B\mathfrak{a} \,.\, B_1\mathfrak{a}_1 = q^2$ und bestimmt auf b eine Strecke $B\mathfrak{b}$ und demzufolge $B_1\mathfrak{b}_1$ dergestalt, dass

$$B\mathfrak{b}^2 : q^2 = B\mathfrak{b} : B_1\mathfrak{b}_1 = \text{const.},$$

so ist

$$B\mathfrak{a} \,.\, B_1\mathfrak{a}_1 = B\mathfrak{b} \,.\, B_1\mathfrak{b}_1 \text{ oder } B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b} = B\mathfrak{b}_1 : B\mathfrak{a}_1,$$

also

$$\text{W. } B\mathfrak{ab} = \text{W. } B_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1, \quad \text{W. } B\mathfrak{ab} + \text{W. } B_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = R$$

und

$$\text{W. } \mathfrak{bac} + \text{W. } \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = 2R.$$

7. In zwei affinen Ebenen gibt es unzählige Paare von Geraden, deren entsprechende denselben spitzen Winkel als sie selber einschliessen, und deren Strecken zu den entsprechenden Strecken in einem und demselben Verhältnisse stehen; im Allgemeinen aber lassen sich zwei solche Paare entsprechender Geraden nicht dergestalt legen, dass beide zugleich hinsichtlich ihrer entsprechenden Punkte gleichliegend sind. (Vgl. §. 24. Fall 10. b.)

In Taf. I. Fig. 6. seien a, a_1; b, b_1 wiederum die Schenkel zweier entsprechenden rechten Winkel B, B_1 und zwar so auf einander

gelegt, dass beide Paare gleichliegend sind, was in diesem Falle immer möglich ist; es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ in a, a_1 und $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1$ in b, b_1 entsprechende Punkte, und in denselben auf a, a_1 und b, b_1 Senkrechte errichtet, welche sich beziehlich in den Punkten $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1$ schneiden; die Verbindungslinie der letzteren schneide a, a_1 in $\mathfrak{s}$. Man beschreibe über der Strecke $B\mathfrak{s}$ als Durchmesser einen Kreis und errichte im Mittelpunkte $\mathfrak{i}$ der Strecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ eine Senkrechte, welche den ersteren in einem Punkte $\mathfrak{m}$ schneiden möge; verbinde $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{m}$ durch eine Gerade, welche die in $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ errichteten Senkrechten in $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$ schneidet, und lege durch letztere mit a, a_1 zwei Parallelen, wodurch man auf b, b_1 die Punkte $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ erhält. Diess vorausgesetzt, so ist:

$$B\mathfrak{b} : B_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{q} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{r} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{r}_1 = B\mathfrak{n} : B_1\mathfrak{n}_1,$$

also sind $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ entsprechende Punkte. Ferner ist, weil $\mathfrak{a}\mathfrak{i} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{i}$, auch $\mathfrak{q}\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{m}$, und es ist W. $B\mathfrak{m}\mathfrak{q} =$ W. $B_1\mathfrak{m}\mathfrak{q}_1 = R$; also $B\mathfrak{q} = B_1\mathfrak{q}_1$; nun aber ist $B\mathfrak{q} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, als Diagonalen eines Rechtecks, und $B_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; folglich ist auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; und macht man $B\mathfrak{c} = B\mathfrak{b}$, $B_1\mathfrak{c}_1 = B_1\mathfrak{b}_1$, so sind auch $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$ entsprechende Punkte, und $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$. Da nun die Geraden A, A_1; C, C_1, denen die Strecken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ angehören, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich sind, ein Paar entsprechende Strecken derselben aber gleich sind, so sind dieselben insbesondere projektivisch-gleich. Offenbar aber gibt es keine solche Gerade, wenn sowohl $B\mathfrak{a} > B_1\mathfrak{a}_1$, als auch $B\mathfrak{b} > B_1\mathfrak{b}_1$ ist. Ist M eine Parallele mit A, und gehen durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ irgend zwei Parallelen, welche M in $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ schneiden, so bilden auch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1$ ein Parallelogramm, folglich ist die Strecke $\mathfrak{v}\mathfrak{w} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{v}_1\mathfrak{w}_1$, d. h. in den Richtungen von A, A_1 und C, C_1 gibt es unzählige Paare projektivisch-gleicher entsprechender Geraden.

8. **In zwei affinen Ebenen gibt es im Allgemeinen zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die sich entsprechen und in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind.** (Vgl. §. 24. Fall 4.).

Sind zugleich die Dreiecke $B\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $B_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ von gleichem Inhalt, so ist

$$B\mathfrak{a} . B\mathfrak{b} = B_1\mathfrak{a}_1 . B_1\mathfrak{b}_1 \text{ oder}$$
$$B\mathfrak{a} : B_1\mathfrak{b}_1 = B_1\mathfrak{a}_1 : B\mathfrak{b},$$

woraus folgt, dass wenn $B\mathfrak{a} > B_1\mathfrak{a}_1$, nothwendig $B\mathfrak{b} < B_1\mathfrak{b}_1$ sein muss, die Geraden A, A_1; C, C_1 also nothwendig existiren; zugleich aber sind dann auch die Dreiecke congruent, also

$$\text{W. } B\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \text{W. } B_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1;$$
$$\text{W. } B\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \text{W. } B_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = R; \text{ W. } \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \text{W. } \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = 2R.$$

9. **In zwei gleichen Ebenen gibt es allemal zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die sich entsprechen und in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind; und zwar schliessen die beiden Schaaren der einen Ebene den nämlichen**

Winkel ein, als die der anderen; im Allgemeinen aber lassen sich zwei solche Paare entsprechender Geraden nicht dergestalt legen, dass beide zugleich hinsichtlich ihrer entsprechenden Punkte gleichliegend sind. (Vgl. §. 24. Fall 9. *b.*)

Denkt man sich für einen Augenblick (Taf. I. Fig. 7.) zwei affine Ebenen so auf einander gelegt, dass zwei ihrer entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden (A, A_1) sammt ihren entsprechenden Punkten sich decken, so werden im Allgemeinen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade (C, C_1) der anderen Parallelenschaar nicht auf einander fallen; es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1 \ldots$ entsprechende Punktenpaare von C, C_1; so ist $\mathfrak{ah} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{ag} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{af} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_1 \ldots$, also die Linien $\mathfrak{hh}_1$, $\mathfrak{gg}_1$, $\mathfrak{ff}_1 \ldots$ parallel, und W. $\mathfrak{ahh}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{h} = \psi_0$ oder $= \varphi_0$, jenachdem C, C_1 auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten von (AA_1) liegen. Da nun jede der Geraden $\mathfrak{hh}_1$, $\mathfrak{gg}_1$, $\mathfrak{ff}_1 \ldots$ zwei entsprechende Punktenpaare enthält, nämlich $\mathfrak{d}, \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{h}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{g}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{f}_1 \ldots$, so fallen in jeder zwei entsprechende Gerade zusammen, und man erhält also zwei Schaaren entsprechender Parallelen, welche gegen die Linien A, A_1 gleich geneigt sind. Sind φ und ψ die spitzen Neigungswinkel, welche den angedeuteten verschiedenen Lagen von C, C_1 entsprechen, und sind α, α_1 die von A und C, A_1 und C_1 eingeschlossenen Winkel, so ist

$$\alpha + \varphi = 2R - \alpha_1 - \varphi = \psi_0;$$
$$2\varphi = 2R - (\alpha + \alpha_1);$$
$$\psi - \alpha = 2R - \alpha_1 - \psi = \varphi_0;$$
$$2\psi = 2R - (\alpha_1 - \alpha);$$

und ebenso

$$2\varphi_0 = 2R - (\alpha_1 + \alpha),$$
$$2\psi_0 = 2R - (\alpha_1 - \alpha).$$

Nimmt man statt der Geraden A, A_1 irgend zwei andere entsprechende, mit ihnen parallele Gerade, z. B. diejenigen, welche durch $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$ gehen, so kann man dieselben zur Deckung bringen, ohne dass die Geraden $\mathfrak{hd}$ und $\mathfrak{h}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{gc}$ und $\mathfrak{g}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{fb}$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{b}_1 \ldots$ ihren Ort verlassen; nur die Abstände ihrer Punkte von einander ändern sich. — Oder will man, statt A, A_1, die C, C_1 zur Deckung bringen, so wende man die eine Ebene um die Senkrechte, welche von dem Punkte $(\mathfrak{aa}_1)$ auf $\mathfrak{hh}_1$ gefällt wird, herum, und dann behaupten die Geraden $\mathfrak{dh}$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1 \ldots$ wiederum ihre Stelle. Also besitzen die Ebenen nur zwei Paar Schaaren entsprechender Parallelen, welche gegen die Schaaren der entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden gleich geneigt sind.

10. In zwei affinen Ebenen gibt es allemal zwei, aber auch nur zwei Paar unendlich entfernte entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlen gegen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade einerlei Neigung haben.

[illegible]. dass beide Paare gleichliegend sind, was in diesem [illegible] immer möglich ist: es seien x, x_1 in a, a_1 und x, x_1 in b, b_1 [illegible] sprechende Punkte, und in denselben auf a, a_1 und b, b_1 [illegible] rechte errichtet, welche sich beziehlich in den Punkten [illegible] schneiden: die Verbindungslinie der letzteren schneide a, a_1 in [illegible]. [illegible] beschreibe über der Strecke Bx als Durchmesser einen Kreis errichte im Mittelpunkte [illegible] der Strecke [illegible] eine Senkrechte, welche den ersteren in einem Punkte [illegible] schneiden möge; verbinde [illegible] durch eine Gerade, welche die in x, x_1 errichteten Senkrechten in [illegible] schneidet, und lege durch letztere mit a, a_1 zwei P[illegible], wodurch man auf b, b_1 die Punkte [illegible] erhält. Dieses vorausgesetzt, so ist:

$$Bb : B_1b_1 = [illegible] = Ba : B_1x_1,$$

also sind b, b_1 entsprechende Punkte. Ferner ist, weil [illegible] auch [illegible], und es ist $W. Bnu = W. B_1nu_1 = R$; $Bx = B_1x_1$; nun aber ist $Bx = [illegible]$, als Diagonalen eines Rechtecks, und $B_1x_1 = [illegible]$; folglich ist auch [illegible] und [illegible] man $Bc = Bb$, [illegible] so sind auch [illegible] entsprechende Punkte, und [illegible]. Da nun die Geraden A, A_1; C, C_1 [illegible] die Strecken [illegible] angehören, in Ansehung ihrer [illegible] sprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich sind, [illegible] entsprechende Strecken derselben aber gleich sind, so sind [illegible] selben insbesondere projektivisch-gleich. Offenbar aber [illegible] keine solche Gerade, wenn sowohl $Bx \parallel B_1x_1$, als auch [illegible] ist. Ist M eine Parallele mit A, und gehen durch [illegible] zwei Parallelen, welche M in [illegible] schneiden, so bilden [illegible] entsprechenden Punkte [illegible] ein Parallelogramm, [illegible] ist die Strecke [illegible], d. h. in den [illegible] von A, A_1 und C, C_1 gibt es unzählige Paare proje[illegible] gleicher entsprechender Geraden.

8. In zwei affinen Ebenen gibt es im Allge[illegible] zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die [illegible] sprechen und in Ansehung ihrer entsprechende[illegible] tenpaare projektivisch-gleich sind. Vgl. §. 24.

Sind zugleich die Dreiecke Bab und $B_1a_1b_1$ von gle[illegible] halt, so ist

$$Ba . Bb = B_1a_1 . B_1b_1 \text{ oder}$$

$$Ba : B_1b_1 = B_1a_1 : Bb,$$

woraus folgt, dass wenn $Ba \parallel B_1a_1$, nothwendig [illegible] muss, die Geraden A, A_1; C, C_1 also nothwendig [illegible] gleich aber sind dann auch die Dreiecke congruent, also

$$W. Bab = W. B_1b_1a_1;$$

$$W. Bab + W. B_1a_1b_1 = R; \; W. [illegible] + W. [illegible]$$

9. In zwei gleichen Ebenen gibt es [illegible] Paar Schaaren paralleler Geraden, di[illegible] chen und in Ansehung ihrer entspre[illegible] paare projektivisch-gleich sind: [illegible] die beiden Schaaren der einen [illegible]



Ferner erhellt aus Nro. 9. unmittelbar:

11. *In zwei gleichen Ebenen gibt es allemal zwei Paar unendlich entfernte entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlen gegen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade einerlei Neigung haben, und zwar gehören dieselben wechselseitig der jedesmaligen anderen Schaar solcher Geraden an.*

Dass der Fall 8. des § 24. eine allgemeine Eigenschaft affiner Ebenen betrifft, leuchtet unmittelbar daraus hervor, dass in zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln allemal zwei Paar entsprechende Strahlen sich vereinigen müssen, sobald dieselben ungleichliegend sind. Denn demnach gibt es in zwei beliebigen entsprechenden Strahlbüscheln affiner Ebenen allemal zwei solche Paare entsprechender Geraden, welche einerlei (spitze) Winkel einschliessen.

§. 26.

Sind zur Bestimmung zweier affiner Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Paar projektivisch-ähnliche Gerade A, A_1 und A', A'_1 gegeben; ist der Winkel, welchen A, A' einschliessen, dem von A_1, A'_1 eingeschlossenen gleich, und ist das Verhältniss je zweier entsprechender Strecken von A, A_1 dem Verhältnisse je zweier solcher Strecken von A', A'_1 gleich, während zugleich auch beide Linienpaare so gelegt werden können, dass beide gleichliegend sind, so müssen die Verhältnisse aller entsprechenden Strecken beider Ebenen einander gleich sein. Denn ist $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von A, A' und schneidet irgend eine Gerade M die erstere in $\mathfrak{m}$, die letztere in $\mathfrak{m}'$; so ist das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ dem von den entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}'_1$ gebildeten Dreiecke $\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'_1$ ähnlich, indem $W.\,\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{m}' = W.\,\mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}'_1$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m}'\mathfrak{a} : \mathfrak{m}'_1\mathfrak{a}_1$ ist. Also ist auch $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' : \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1 = \text{const.}$, und da je zwei entsprechende Strecken der entsprechenden Geraden M, M_1 einerlei Verhältniss haben, und M beliebig angenommen ist, für den Fall solcher Geraden aber, welche durch den Punkt $\mathfrak{a}$ gehen oder mit A oder A' parallel sind, statt dieser letzteren eine der schon betrachteten Geraden M genommen werden kann, so müssen, wie gesagt, je zwei entsprechende Strecken beider Ebenen sich zu einander wie $\mathfrak{m}\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1$ verhalten.

1. *Sind in zwei affinen Ebenen irgend drei Paar entsprechende Strecken, welche zwei Dreiecke bilden, von einerlei Verhältniss, so stehen je zwei entsprechende Strecken derselben zu einander in demselben Verhältniss* (Vgl. §. 24. Fall 10. *a.*).

Affine Ebenen heissen ähnlich, und ihre Verwandtschaft die der Aehnlichkeit, wenn je zwei entsprechende Strecken derselben zu einander in einem und demselben Verhältniss stehen.

Sind in zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Paar projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B_1; $B'. B'_1$ gegeben, und können beide Paare zugleich gleichliegend gelegt werden, so müssen je zwei parallelen

Strahlen a, a' von B, B' ebenfalls zwei parallele Strahlen a_1, a'_1 von B_1, B'_1 entsprechen; folglich sind die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen entsprechende Gerade, und die Ebenen selbst sind affin. Zugleich aber bestimmen je zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ zwei Dreiecke $BB'\mathfrak{a}$, $B_1B'_1\mathfrak{a}_1$, deren entsprechende Winkel gleich sind; also ist $B\mathfrak{a} : B_1\mathfrak{a}_1 = B'\mathfrak{a} : B'_1\mathfrak{a}_1 = BB' : B_1B'_1$. Beide Ebenen sind also ähnlich.

2. Sind in zwei collinearen Ebenen zwei Paar entsprechende Strahlbüschel, deren Mittelpunkte nicht unendlich entfernt sind, projektivisch-gleich, und sind beide Paare gleichliegend, so sind diese Ebenen ähnlich (Vgl. §. 24. Fall 12. *a.*)

Es seien die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ affin, und je zwei entsprechende Strahlbüschel B, B_1 derselben projektivisch-gleich; B' sei ein zweiter Strahlbüschel in $\mathfrak{E}$, dessen Strahlen mit denen des B parallel laufen; so laufen auch die entsprechenden Strahlen des dem B' entsprechenden Strahlbüschels B'_1 mit den entsprechenden Strahlen von B_1 parallel; folglich sind auch B', B'_1 projektivisch-gleich, und zwar sowohl B, B_1 als B', B'_1 gleichliegend.

3 Zwei affine Ebenen können, ohne ähnlich zu sein, keine zwei entsprechende Strahlbüschel besitzen, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch-gleich sind, es sei denn, dass ihre Mittelpunkte unendlich entfernt liegen.

4. In zwei ähnlichen Ebenen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch-gleich.

Ferner zeigt man auf die bekannte Weise, dass

5. In zwei ähnlichen Ebenen das Verhältniss je zweier entprechender Flächenräume unveränderlich und zwar dem der Quadrate zweier entsprechender Strecken gleich ist.

Ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken zweier ähnlicher Ebenen dem der Einheit gleich, so müssen je zwei entsprechende Strecken einander gleich sein; in diesem Falle heissen die Ebenen congruent, und ihre Verwandtschaft die der Congruenz (Vgl. §. 24. Fall 9. *a.* u. 14. *a.*).

6. Zwei ähnliche Ebenen können, ohne congruent zu sein, keine entsprechenden Geraden besitzen, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind, es sei denn, wenn man will, die unendlich entfernten Geraden.

§. 27.

Da zwei projektivisch-ähnliche Gerade vollkommen bestimmt sind, wenn irgend zwei Paar ihrer entsprechenden Punkte gegeben sind, so folgt aus dem Obigen mit Leichtigkeit, dass

1. **Zwei affine Ebenen vollkommen bestimmt sind, sobald drei Paar entsprechende Punkte oder Gerade beliebig gegeben sind.**

2. **Zwei ähnliche Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald zwei Paar entprechende Punkte, oder auch ein Paar entsprechende Punkte und ein Paar entsprechende Geraden beliebig gegeben sind.**

3. **Zwei gleiche Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald zwei Paar entsprechende Gerade und auf dem einen von beiden ein Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind.**

4. **Zwei congruente Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald ein einziges Paar entsprechende Gerade und auf denselben ein einziges Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind.**

Eine Frage, welche bereits der Entdecker der geometrischen Verwandtschaften, Herr Professor Möbius, in seinem Barycentrischen Calcül aufgeworfen und die Bedeutsamkeit derselben für die gesammte Geometrie nachgewiesen hat, ist folgende: Wie viele und welche Stücke müssen gegeben sein, um eine einer gegebenen Figur collineare, affine, gleiche, ähnliche, congruente zu konstruiren? Die vorigen Sätze und der Satz §. 21. 3. führen sehr leicht zur Beantwortung dieser Frage. Hier soll nur noch die hierauf Bezug habende Betrachtung von §. 23. 3. weiter fortgesetzt werden.

Sind $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zwei Kegelschnitte, welche in zwei affinen Ebenen sich entprechen, und denkt man sich in $\mathfrak{K}$ eine Schaar paralleler Sehnen, so entsprechen denselben ebenfalls parallele Sehnen von $\mathfrak{K}_1$, und den Mittelpunkten der ersteren die Mittelpunkte der letzteren kraft §. 25. 2. und 3.; also entsprechen sich auch die den Richtungen der beiden Parallelenschaaren zugeordneten Durchmesser der Kegelschnitte, also auch die den letzteren parallelen Sehnen, die Mittelpunkte der letzteren, und folglich auch die jenen Durchmessern zugeordneten Durchmesser selbst.

5. **In zwei affinen Kegelschnitten entsprechen allemal dem Mittelpunkte des einen der Mittelpunkt des anderen und je zwei zugeordneten Durchmessern des einen zwei zugeordnete Durchmesser des anderen. Und daher entsprechen sich auch die Achsen derselben** (als die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel der von den zugeordneten Durchmessern gebildeten projektivischen Strahlbüschel).

Und da einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene nur ein unendlich entfernter der anderen entsprechen kann, so folgt ferner:

6. **Eine Hyperbel kann nur mit einer Hyperbel, eine Ellipse mit einer Ellipse, und eine Parabel mit einer Parabel affin sein.**

7. **Den Asymptoten einer Hyperbel entsprechen allemal die Asymptoten der affinen Hyperbel.**

Aus §. 26. 4. ergibt sich:

8. **In zwei ähnlichen Kegelschnitten entsprechen je zwei zugeordneten Durchmessern des einen zwei solche zugeordnete des anderen, welche denselben Winkel als jene einschliessen.**

In zwei beliebigen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien zwei beliebige Ellipsen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ gegeben; B, B' seien die Endpunkte irgend eines Durchmessers von $\mathfrak{K}$, und es sei $\mathfrak{a}$ ein Endpunkt des demselben zugeordneten Durchmessers; ebenso seien B_1, B'_1 die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers von $\mathfrak{K}_1$, und $\mathfrak{a}_1$ sei ein Endpunkt des zugeordneten Durchmessers. Jetzt denke man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ affin, und zwar B, B_1; B', B'_1; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ als entsprechende Punktenpaare derselben; so entspricht der Ellipse $\mathfrak{K}$ eine Ellipse K_1, welche durch die Punkte B_1, B'_1, $\mathfrak{a}_1$ geht, und welche in B_1, B'_1 zwei Gerade berührt, denen in $\mathfrak{E}$ die Tangenten in B, B' entsprechen. Ferner ist nach 5. die Strecke $B_1 B'_1$ ein Durchmesser von K_1; also fallen die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ und K_1 zusammen, und da die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und K_1 sich entsprechen, so entsprechen sich auch die beiden Durchmesser von $\mathfrak{K}$, K_1, welche durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ gehen; in $\mathfrak{K}$ aber ist der eine dieser letzteren dem BB' zugeordnet; also ist auch der andere dem $B_1 B'_1$ in K_1 zugeordnet. Demnach sind sowohl die Geraden, welche $\mathfrak{K}_1$, als auch diejenigen, welche K_1 in B_1, B'_1 berühren, mit diesem dem $B_1 B'_1$ zugeordneten Durchmesser parallel, d. h. sie fallen zusammen. Und da es immer nur einen einzigen Kegelschnitt gibt, welcher durch drei gegebene Punkte geht und in zweien derselben zwei gegebene Gerade berührt, so sind $\mathfrak{K}_1$ und K_1 identisch.

Oder sind $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ irgend zwei Hyperbeln, und sind B, B'; B_1, B'_1 wiederum die Endpunkte irgend zweier Durchmesser derselben, so denke man sich durch B, B' nach dem einen unendlich entfernten Punkte α von $\mathfrak{K}$ zwei Strahlen a, a', und nach dem anderen β die Strahlen b, b', und ebenso nach dem einen unendlich entfernten Punkte α_1 von $\mathfrak{K}_1$ durch B_1, B'_1 die Strahlen a_1, a'_1, und nach dem anderen β_1 die Strahlen b_1, b'_1 gezogen, und setze fest, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen collinear, und zwar a, a_1; b, b_1; a', a'_1; b', b'_1 sollen entsprechende Gerade, oder, was einerlei ist, die Punkte B, B_1; B', B'_1; α, α_1; β, β_1 sollen entsprechende Punkte sein. Dann aber müssen sich die unendlich entfernten Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ entsprechen; folglich sind die Ebenen affin. Der Hyperbel $\mathfrak{K}$ entspreche in $\mathfrak{E}_1$ eine Hyperbel K_1; so fällt der Mittelpunkt der letzteren mit dem von $\mathfrak{K}_1$, zugleich aber auch die unendlich entfernten Punkte der einen Hyperbel mit denen der anderen, folglich auch deren Asymptoten zusammen. Die Hyperbeln $\mathfrak{K}_1$, K_1 haben also ausser den Punkten B_1, B'_1 auch noch zwei Tangenten und deren Berührungspunkte gemein; folglich sind sie identisch.

Sind endlich $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zwei beliebige Parabeln, und denkt man sich an $\mathfrak{K}$ irgend zwei Tangenten A, A', welche dieselben in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ berühren, und an $\mathfrak{K}_1$ auch zwei beliebige Tangenten A_1, A'_1 gelegt, welche dieselben in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$ berühren, so kann man festsetzen, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen affin, und zwar die Geraden A, A_1;

A', A'_1; $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}'_1$ entsprechende Gerade sein. Entspricht nun der Parabel $\mathfrak{K}$ eine Parabel K_1, so geht letztere durch die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$, welche den $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ entsprechen, und berührt in diesen zwei Gerade A_1, A'_1, welche den Tangenten A, A' entsprechen. Die Parabeln $\mathfrak{K}_1$, K_1 haben also zwei Tangenten und deren Berührungspunkte und ausserdem die unendlich entfernte Tangente gemein; folglich sind dieselben identisch.

9. **Zwei beliebige Ellipsen sind allemal affine Figuren; und zwar darf man in jeder zwei zugeordnete Durchmesser beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass die der einen denen der anderen entsprechen sollen.**

10. **Zwei beliebige Hyperbeln sind allemal affine Figuren; und zwar darf man ausser den Asymptoten in jeder einen Durchmesser (und den ihm zugeordneten) beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass die einen den anderen entsprechen sollen.**

11. **Zwei beliebige Parabeln sind allemal affine Figuren; und zwar darf man in jeder zwei Tangenten beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sowohl diese Tangenten als auch deren Berührungspunkte einander entsprechen sollen.**

In Taf. II. Fig. 8. sei P eine beliebige Parabel, A, A' seien zwei beliebige Tangenten derselben, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ deren Berührungspunkte, $\mathfrak{s}_I\mathfrak{s}_{II}$ die der Sehne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ parallele Tangente; $\mathfrak{a}'_1$ deren Berührungspunkt und $\mathfrak{s}$ der Durchschnitt von A, A'; so ist die Gerade $\mathfrak{s}\mathfrak{a}'_1$, als harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes der Sehne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, der dieser letzteren zugeordnete Durchmesser, also $\mathfrak{a}'_1$ der Scheitel des Parabelsegments über $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$. Da nun $\mathfrak{s}$ der harmonische Pol von $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ist, folglich die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{m}$ mit dem Punkte $\mathfrak{a}'_1$ und dem unendlich entfernten der Parabel harmonisch sind, so ist $\mathfrak{s}\mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}'_1$, folglich

$$\mathfrak{s}_I\mathfrak{s}_{II} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \text{ und } \Delta\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_1 = \frac{1}{2}\,\Delta\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{s} = 2\Delta\mathfrak{s}_I\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{s}.$$

Man denke sich nun mit der Parabel P eine zweite, P_1, zusammengefallen, und wähle für P die Tangenten A, A', für P_1 die Tangenten A_1, A'_1 (wovon erstere mit A, letztere mit $\mathfrak{s}_I\mathfrak{s}_{II}$ zusammenfällt) beliebig aus; so darf man festsetzen, P und P_1 sollen affin und zwar A, A_1; A', A'_1; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'_1$ entsprechende Elemente sein. Dann aber sind nicht nur die Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}'_1\mathfrak{s}_1$, sondern auch die Parabelsegmente über den Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}'_1$ entsprechende Flächenräume. Denn, um das letztere ganz ausser Zweifel zu setzen, ist $\mathfrak{p}$ irgend ein innerhalb des $\Delta\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{s}$ liegender Punkt von P, und ist p die Tangente in $\mathfrak{p}$, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ von p und A, p und A' nothwendig zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{s}$; also liegen auch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}'_1$ zwischen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{a}'_1$ und $\mathfrak{s}_1$, und sowie $\mathfrak{p}$ zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ liegt, muss auch auf der Tangente p der dem $\mathfrak{p}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{p}_1$ zwischen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}'_1$, also innerhalb des Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}'_1\mathfrak{s}_1$ liegen. Nach §. 25. 4 ist also

$$S.\,aa' : S.\,a_1a'_1 = \Delta aa's : \Delta a_1a'_1s_1;$$

aus demselben Grunde aber ist auch

$$S.\,aa' : S.\,a'a'_1 = \Delta aa's : \Delta a'a'_1s_{II};$$

folglich ist

$$S.\,aa' : S.\,a_1a'_1 : S.\,a'a'_1 = \Delta aa's : \Delta a_1a'_1s_1 : \Delta a'a'_1s_{II};$$

hieraus aber ergibt sich nun:

$$(S.\,aa' - S.\,a_1a'_1 - S.\,a'a'_1) : (\Delta aa's - \Delta a_1a'_1s_1 - \Delta a'a'_1s_{II})$$
$$= \Delta aa'a'_1 : (\Delta aa'a'_1 + \Delta s_1s_{II}s) = S.\,aa' : \Delta aa's;$$

also da

$$\Delta s_1s_{II}s = \frac{1}{2}\Delta aa'a'_1,\quad \Delta aa's = 2\Delta aa'a_1$$

ist, so hat man die Proportion

$$1 : \frac{3}{2} = S.\,aa' : 2\Delta aa'a'_1,$$

d. h.

$$S.\,aa' = \frac{4}{3}\Delta aa'a'_1.$$

12. Ein jedes Parabelsegment beträgt vier Drittheile des Dreiecks, dessen Grundlinie die Sehne, und dessen Scheitel der Scheitel dieses Segmentes ist.

Auf einander gelegte collineare und reciproke Ebenen.

A.

Collineare.

§. 28.

Werden irgend zwei collineare Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig auf einander gelegt, und sind B, B_1; B', B'_1 irgend zwei Paar entsprechende Strahlbüschel derselben, so ist sowohl

$$B(a, b, c, d\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots),$$

als auch

$$B'(a', b', c', d'\ldots) = B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1\ldots);$$

also schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen von B, B_1 auf einem Kegelschnitte K, welcher auch die Punkte B, B_1 enthält, und je zwei entsprechende Strahlen von B', B'_1 auf einem zweiten Kegelschnitte K', der auch durch die Punkte B', B'_1 geht. Es sind nun aber die Strahlen BB' und $B_1B'_1$ allemal entsprechende sowohl von B und B_1, als auch von B' und B'_1; also haben die Kegelschnitte K, K' nothwendig einen Punkt i gemein, und dann nothwendig noch einen zweiten p, und wenn einen dritten q, auch noch einen vierten r, es sei denn, dass sie sich berühren oder oskuliren. Von diesen drei Punkten p, q, r gehört keiner den Geraden BB', $B_1B'_1$ selber an; denkt man sich also irgend einen derselben mit B, B', B_1, B'_1 durch die Geraden a, a', a_1, a'_1 verbunden, so müssen den a, a' von $\mathfrak{E}$ die a_1, a'_1 in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen; folglich fallen in jedem dieser drei Punkte zwei entsprechende Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zusammen. Das nämliche lässt sich aber nicht vom Punkte i sagen; denn rechnet man ihn zu $\mathfrak{E}$, so kann demselben irgend ein Punkt $\mathfrak{i}_1$ der Geraden $B_1 B'_1$ entsprechen, der nicht mit i identisch ist. Gäbe es aber noch einen vierten Punkt, in welchem sich entsprechende vereinigten, so würde derselbe zwei entsprechende Strahlen von B, B_1, und zwei andere von B', B'_1 bestimmen, also ebenfalls den Kegelschnitten K, K' gemeinschaftlich angehören, was widersprechend ist, da diese Kegelschnitte nicht zusammenfallen können.

Verbindet man die Punkte p und q, q und r, r und p durch drei Gerade R, P, Q, so sieht man sogleich, dass in einer jeden zwei entsprechende Geraden beider Ebenen zusammenfallen; eine jede vierte Gerade aber von derselben Eigenschaft würde wenigstens eine der drei ersteren in einem neuen Punkte schneiden, der zwei entsprechende vereinigte, was dem Vorigen widerspricht. Oder wählt man statt der Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 zwei Paar entsprechende Gerade A, A_1; A', A'_1, so sind sämmtliche Gerade, welche die entsprechenden Punkte von A, A_1 verbinden, die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, und sämmtliche Gerade, welche die entsprechenden Punkte von A', A'_1 verbinden, sind die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}'$; diese beiden Kegelschnitte haben allemal eine Tangente i gemein, welche den Durchschnitt von A, A' mit dem von A_1, A'_1 verbindet; also haben sie nothwendig noch eine, und wenn eine dritte, auch noch eine vierte Tangente gemein, es sei denn, dass sie sich berühren oder oskuliren. In jeder der drei letzteren fallen zwei entsprechende Gerade der Ebenen zusammen, und nur in der ersteren geschieht dies nicht.

Existirt nur einer der Punkte p, q, r, z. B. p, so kann auch nur eine der, auf die letzte Weise erhaltenen Geraden P, Q, R, nämlich P, existiren; denn zwei der letzteren würden auch die dritte, und alle drei auch drei Punkte p, q, r fordern, und umgekehrt; und dass P im Allgemeinen nicht durch p gehen kann, erhellt daraus, dass, wenn in zwei auf einander gelegten projekti-

zwischen Geraden ein Paar entsprechende Punkte sich vereinigen, im Allgemeinen allemal ein zweites solches Paar sich nachweisen lässt.

1. Werden zwei collineare Ebenen beliebig aufeinander gelegt, so gibt es im Allgemeinen entweder nur einen oder drei Punkte in denselben, in denen sich zwei entprechende vereinigen; und zwar gibt es im ersten Falle nur eine, durch jenen Punkt nicht gehende Gerade, in welcher zwei entsprechende sich vereinigen; im letzten Falle dagegen ist jede Verbindungslinie der drei Punkte eine solche Gerade.

Ein jeder der Punkte p, q, r wird ein Situationspunkt, und eine jede der Geraden P, Q, R eine, dem ersteren zugeordnete, Situationslinie der collinearen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ genannt.

Da je zwei entprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch sind und perspektivisch werden, wenn in ihrem Durchschnitt zwei entsprechende Punkte sich vereinigen, und da ähnliches von zwei entprechenden Strahlbüscheln gilt, in deren gemeinschaftlichem Strahle entsprechende zusammenfallen, so folgt:

2. Je zwei entsprechende Strahlen eines Situationspunktes sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare perspektivisch, und zwar liegt ihr Projektionspunkt auf der zugeordneten Situationslinie; und

Je zwei entsprechende Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf einer Situationslinie liegen, sind in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare perspektivisch, und zwar geht ihr perspektivischer Durchschnitt durch den zugeordneten Situationspunkt.

Mittels §. 21. 3. ergibt sich:

3. Die Verwandtschaft der Collineation zweier auf einander gelegter Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald ein Situationspunkt, oder eine Situationslinie, und irgend drei Paar entsprechende Punkte oder Geraden beliebig gegeben sind.

4. Wenn von zwei aufeinander gelegten collinearen Ebenen ein Situationspunkt und ausserdem drei Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind, die zugeordnete Situationslinie und zu einem beliebig gegebenen Punkte der einen Ebene den entsprechenden Punkt der anderen zu finden.

Auflösung.

Sind in Taf. II. Fig. 9. der Situationspunkt p und die entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ gegeben, so verbinde man p mit den letzteren durch die Geraden a, a_1; b, b_1; c, c_1, ziehe $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ac}$ (oder $\mathfrak{ab}$), welche a und b resp. in α und β schneiden, und ebenso $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ (oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$), welche a_1 und b_1 resp. in α_1 und β_1 schneiden; endlich ziehe man $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\alpha\alpha_1$, welche

sich in $\mathfrak{a}_0$, und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und $\beta\beta_1$, welche sich in $\mathfrak{b}_0$ schneiden; so ist die Gerade P, welche $\mathfrak{a}_0$ mit $\mathfrak{b}_0$ verbindet, die gesuchte Situationslinie. — Ist nun $\mathfrak{q}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, so verbinde man denselben mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch zwei Gerade, welche b und a resp. in β' und α' schneiden, ziehe sofort die Geraden $\mathfrak{a}_0\alpha'$ und $\mathfrak{b}_0\beta'$, welche a_1 und b_1 resp. in α'_1 und β'_1 schneiden, und noch die Geraden $\mathfrak{a}_1\beta'_1$ und $\mathfrak{b}_1\alpha'_1$; so ist der Durchschnitt $\mathfrak{q}_1$ dieser letzteren der dem $\mathfrak{q}$ entsprechende Punkt.

Beweis.

Die Geraden a, a_1; b, b_1; c, c_1 entsprechen sich paarweise, weil auf je zweien derselben, z. B. auf a, a_1, zwei Paar entsprechende Punkte p, p_1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ liegen, und da aus demselben Grunde auch die Geraden $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ sich entsprechen, so gilt diess auch von den Punkten β, β_1; α, α_1. Nach Lehrsatz 2. liegen demnach die Punkte $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ auf der dem p zugeordneten Situationslinie. — Kraft desselben Satzes entsprechen sich nun auch die Punkte α', α'_1; β', β'_1, und mithin auch die Geraden $\mathfrak{b}\alpha'$, $\mathfrak{b}_1\alpha'_1$; $\mathfrak{a}\beta'$, $\mathfrak{a}_1\beta'_1$. Also sind $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$, als Durchschnitte zweier Paar entsprechender Geraden, entsprechende Punkte.

5. **Wenn von zwei auf einander gelegten affinen Ebenen drei Paar entsprechende Punkte oder Gerade beliebig gegeben sind, einen Situationspunkt beider Ebenen, d. h. einen Punkt zu finden, in welchem sich zwei entsprechende Punkte vereinigen.**

Auflösung.

Sind in Taf. II. Fig. 10. die entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ gegeben, so ziehe man die Geraden $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, die sich in γ schneiden, und lege durch $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{ab}$, durch $\mathfrak{c}_1$ mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ zwei Parallelen, die sich in γ_1 schneiden; ebenso sei β der Durchschnitt von $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, und β_1 der Durchschnitt zweier durch $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{ac}$, und durch $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ parallel gelegten Linien. Jetzt verbinde man γ mit γ_1, und β mit β_1 durch zwei Gerade; so ist der Durchschnitt p dieser letzteren der gesuchte Situationspunkt.

Beweis.

Denn legt man durch p der Reihe nach mit $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ Parallelen, welche beziehlich die $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ in den Punkten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$ schneiden, so ist

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{ad}} = \frac{\gamma\gamma_1}{\gamma p} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}, \text{ und } \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ae}} = \frac{\beta\beta_1}{\beta p} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1};$$

und da auch die Lage der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{b}_1$ die nämliche als die der Punkte γ, p, γ_1; β, p, β_1, folglich übereinstimmend sein muss, so sind $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ entsprechende Punkte und somit nach §. 25. 3. sind die Geraden $p\mathfrak{d}$, $p\mathfrak{d}_1$; $p\mathfrak{e}$, $p\mathfrak{e}_1$ ebenfalls entsprechend. Dem Durchschnitte von $p\mathfrak{d}$ und $p\mathfrak{e}$ entspricht also der Durchschnitt von $p\mathfrak{d}_1$ und $p\mathfrak{e}_1$.

Denkt man sich die zwei entsprechenden Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in p liegen, so haben dieselben, wie je zwei concentrische projektivische Strahlbüschel, im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Strahlen gemein; diese können jedoch auch ganz fehlen oder im Grenzfalle sich zu einem einzigen vereinigen; und da bei auf einander gelegten affinen Ebenen jedesmal die entsprechenden unendlich entfernten Geraden sich vereinigen, so folgt:

6. In zwei beliebig auf einander gelegten affinen Ebenen gibt es allemal einen Situationspunkt, welchen die unendlich entfernte Gerade als Situationslinie zugeordnet ist; und ausserdem gibt es im Allgemeinen zwei oder (nur eine oder) keine Situationslinien und Situationspunkte, und diese gehören den beiden ersteren an.

§. 29.

Ein ausgezeichneter Fall, dessen allgemeine Möglichkeit Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin. 1833" zuerst nachgewiesen hat, ist derjenige, dass in zwei entsprechenden Strahlbüscheln je zwei entsprechende Strahlen, und dass zugleich in zwei entsprechenden Geraden je zwei entsprechende Punkte einander decken. Für uns ist dieser Fall durch die in §. 22. angestellten Betrachtungen bereits erledigt.

a) In der That: legt man irgend zwei collineare Ebenen dergestalt auf einander, dass irgend eines der beiden Paare projektivisch gleicher entsprechender Geraden, z. B. T, T_1 in Taf. I. Fig. 3., sammt ihren entsprechenden Punkten einander decken, so werden auch die Mittelpunkte σ, σ_1 und die entsprechenden Strahlenpaare zweier projektivisch gleicher Strahlbüschel zusammenfallen müssen. Die Achsen beider Ebenen sind dann unter einander und mit T, T_1 parallel, und die zwei andern projektivisch gleichen Geraden S, S_1 sind von dem Punkte $(\sigma\sigma_1)$, sowie auch die Mittelpunkte der zwei anderen projektivisch gleichen Strahlbüschel s, s_1 von der Geraden (TT_1) gleichweit entfernt.

b) Dreht man jetzt die eine Ebene um den Punkt $(\sigma\sigma_1)$, ohne sie jedoch von der anderen zu trennen, um einen Winkel von 180°, so müssen jetzt die Geraden S, S_1 sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren sich decken, während das nämliche auch noch von den entsprechenden Strahlenpaaren der Strahlbüschel σ, σ_1 gilt. Die Geraden T, T_1 nehmen dann den Punkt $(\sigma\sigma_1)$, und die Punkte s, s_1 die Gerade (SS_1) in die Mitte.

c) Man denke sich die Ebenen in die Lage *a*) zurückgebracht, nun aber die eine um die Gerade (TT_1) — ohne Verschiebung — herumgewendet, so fallen die Strahlbüschel s, s_1 und deren entsprechende Strahlenpaare auf einander u. s. w.

d) Und denkt man sich jetzt wieder die eine Ebene um den Punkt (ss_1) — ohne Umwendung — um 180° herumgedreht, so

kommen die Geraden S, S_1 sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren zur Deckung u. s. w.

1. Sind irgend zwei collineare Ebenen gegeben, so lassen sich dieselben auf vier verschiedene Arten dergestalt aufeinander legen, dass sowohl zwei entsprechende Strahlbüschel und deren entsprechende Stralenpaare, als auch zwei entsprechende Gerade und deren entsprechende Punktenpaare einander decken. Man erhält nämlich allemal eine von diesen vier Lagen, wenn man die beiden auf den Achsen senkrecht stehenden entsprechenden Geraden auf einander legt und sodann diejenigen zwei entsprechenden projektivisch gleichen Geraden oder die Mittelpunkte derjenigen zwei entsprechenden projektivisch-gleichen Strahlbüschel, welche gleichliegend sind, sich decken lässt; und die drei anderen erhält man hiernach, indem man die eine Ebene entweder um den Mittelpunkt der vereinigten Strahlbüschel und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herumdreht, oder um die vereinigten Geraden, ohne Verschiebung, herumwendet, oder, wenn diess letztere geschehen, jene Drehung um den Mittelpunkt der neuen vereinigten Strahlbüschel wieder eintreten lässt. In keinem Falle aber, selbst nicht, wenn beide Paare projektivisch-gleicher Geraden und die Mittelpunkte beider Paare projektivisch-gleicher Strahlbüschel auf einander fallen, können zugleich die entprechenden Elementenpaare des einen Paars und auch die des anderen einander decken, es sei denn, dass die Ebenen congruent sind.

Zwei auf einander gelegte Ebenen heissen collinear und collinear-liegend, und ihr Situationspunkt Collineationspunkt, ihre Situationslinie Collineationslinie, wenn sie collinear sind und sich in einer der vier so eben angedeuteten Lagen befinden; und ähnlicherweise werden die Ausdrücke affin und affin-liegend, ähnlich und ähnlich-liegend, Affinitätspunkt, Affinitätslinie, Aehnlichkeitspunkt und Aehlichkeitslinie zu verstehen sein.

2. In zwei collinearen und collinear-liegenden Ebenen liegen je zwei entsprechende Punkte mit dem Collineationspunkte in gerader Linie, und schneiden sich je zwei entsprechende Gerade in einem Punkte der Collineationslinie.

3. In zwei collinearen und collinear-liegenden Ebenen sind die Achsen derselben mit der Collineationslinie parallel, und eine jede von beiden ist ebensoweit von dieser letzteren, als die andere vom Collineationspunkte entfernt.

Aus den Sätzen 3., 4., 6. des §. 26. und den Sätzen 8., 10. des §. 25. erhellt nun sogleich:

4. Zwei affine Ebenen können allemal, aber auch nur dann in affine Lagen gebracht werden, wenn auf

den einen Paar Schenkeln zweier entsprechenden rechten Winkel das Verhältniss der entsprechenden Strecken grösser, und auf den anderen kleiner als die Einheit ist.

5. Zwei affine Ebenen lassen sich im Allgemeinen auf unzählige verschiedene Arten in affine Lage bringen. Befinden sie sich nämlich in einer solchen, so erhält man sofort eine andere, indem man die eine Ebene entweder um die Affinitätslinie ohne Verschiebung herumwendet, oder um einen beliebigen Punkt der Affinitätslinie und zwar um einen bestimmten unveränderlichen Winkel herumdreht, oder auch dergestalt verschiebt, dass irgend ein Strahl des Affinitätspunktes in seinem Orte verharrt. Der Affinitätspunkt liegt allemal unendlich entfernt, wofern nicht der besondere Fall der Aehnlichkeit vorhanden ist; und zwar liegt derselbe allemal in einer von zwei festen Richtungen der als ruhend vorgestellten Ebene, welche bei jeder Drehung oder Umwendung der anderen Ebene mit einander wechseln.

6. Zwei ähnliche Ebenen lassen sich auf unzählige verschiedene Arten in ähnliche Lage bringen, indem man zu diesem Zwecke nur irgend zwei Paar entsprechende Strahlen auf einander zu legen braucht. Die Aehnlichkeitslinie ist jedesmal, der Aehnlichkeitspunkt dagegen nie unendlich entfernt.

In Taf. II. Fig. 11. sind zwei gleiche Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ dargestellt; S, S_1 sind zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade, welche sich sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren decken; T, T_1 sind ebenfalls projektivisch-gleich, aber ungleichliegend, und dasselbe gilt von den Parallelen b, b_1; c, c_1; d, d_1.... Wendet man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um die Gerade (SS_1) herum, so fallen die Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_1$... auf ε_1, ν_1. μ_1..., die Geraden $\mathfrak{e}\varepsilon_1$, $\mathfrak{n}\nu_1$, $\mathfrak{m}\mu_1$... sind nun mit (SS_1) parallel und vereinigen eine jede zwei entsprechende Strahlen. Dreht man dagegen die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um einen beliebigen Punkt von (SS_1), z. B. um $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$, und zwar um 180^0 herum, so tritt jetzt die Gerade (TT_1) an die Stelle von (SS_1) und die Geraden S, S_1 sind ungleichliegend u. s. w.

7. Zwei gleiche Ebenen lassen sich auf unzählige verschiedene Arten dergestalt aufeinander legen, dass zwei entsprechende Gerade und deren entsprechende Punktenpaare, und zugleich zwei entsprechende Punkte und deren entsprechende Strahlenpaare einander decken. Dieser Punkt, der Projektionspunkt beider Ebenen, ist allemal unendlich weit entfernt, und je zwei seiner vereinigten Strahlen, die Projektionsstrahlen der Ebenen, sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich. Die Grundlinie der Ebenen, d. h. die Gerade, deren jeder Punkt zwei entsprechende vereinigt, ist entweder unter einem bestimmten, unveränderlichen Winkel gegen die Projektionsstrahlen geneigt, oder mit den-

selben parallel; im ersten Falle sind je zwei in einem Projektionstrahl vereinigte Gerade ungleichliegend, im zweiten aber gleichliegend, und der eine Fall entsteht aus dem anderen, indem man die eine Ebene um die Grundlinie herumwendet. Dreht man im ersten Falle die eine Ebene um irgend einen Punkt der Grundlinie, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten, so wird jetzt einer der Projektionsstrahlen zur Grundlinie, die neuen Projektionsstrahlen aber sind wieder ungleichliegend; und dreht man im zweiten die Ebene um das doppete Complement jenes unveränderlichen Winkels, so ändert auch jetzt die Grundlinie ihre Richtung, aber auch jetzt werden die neuen Projektionsstrahlen wieder gleichliegend. Endlich erhält man in beiden Fällen nach und nach immer neue Grundlinien von derselben Richtung, wenn man die eine Ebene bloss so verschiebt, dass ein Projektionsstrahl in seinem Orte verharrt.

Keiner weiteren Erklärung endlich wird der folgende Satz bedürfen:

8. Zwei congruente Ebenen lassen sich allemal so legen, dass je zwei entsprechende Elemente derselben sich decken. Dreht man sodann die eine Ebene um irgend einen festen Punkt, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herum, so sind je zwei entsprechende Gerade parallel und, sowie auch je zwei entsprechende Punkte, von jenem festen Punkte, dem Mittelpunkte der Ebenen, gleichweit entfernt; wendet man dagegen die eine Ebene um irgend eine Gerade ohne Verschiebung herum, so liegen beide Ebenen zu einander symmetrisch, d. h. je zwei entsprechende Gerade schneiden sich auf jener Geraden, der Symmetrallinie, und bilden mit ihr gleiche Winkel, und je zwei entsprechende Punkte sind gleichweit von der Symmetrallinie entfernt, und ihre Verbindungslinie steht auf derselben senkrecht. Verschiebt man endlich die eine Ebene dergestalt, dass irgend eine Gerade in ihrem Orte verharrt, so sind je zwei entsprechende Punkte und je zwei entsprechende Gerade gleichweit von einander entfernt.

§. 30.

Wenn in zwei auf einander gelegten collinearen Ebenen irgend zwei Punkte einander in doppeltem Sinne entsprechen, so müssen in der sie verbindenden Geraden zwei entsprechende sich vereinigen, also eine Situationslinie bilden, und nach dem 4ten Thl. des Archivs S. 258. *b*. müssen je zwei entsprechende Punkte dieser Geraden sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. die Geraden selbst sind involutorisch; folglich fallen die Durchschnitte ihrer Parallelstrahlen, d. h. die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte, zusammen; jene Situationslinie geht also

durch den Durchschnitt der beiden Achsen. Man sieht sogleich, dass diess nicht im Allgemeinen stattfinden kann, indem man ja zwei entsprechende Gerade so auf einander legen kann, dass die den unendlich entfernten Punkten derselben entsprechenden Punkte nicht zusammenfallen. Legt man sie aber wirklich auf diese Weise, so müssen auch die beiden Strahlbüschel, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der zugeordnete Situationspunkt ist, involutorisch sein, sonst aber im Allgemeinen keine anderen Geraden und keine anderen Strahlbüschel. Eine Ausnahme bildet ganz allein der in §. 24. unter Nro. 14. *b* bezeichnete Fall. Sind nämlich die Abstände der Mittelpunkte s, s_1 der projektivisch-gleichen Strahlbüschel von den Achsen einander gleich, so kann man die Ebenen so auf einander legen, dass zu gleicher Zeit die Achsen Q, P_1 (Taf. I. Fig. 3.) und die Punkte s, s_1 und σ, σ_1 einander decken, und dann werden einerseits die Strahlbüschel σ, σ_1 und je zwei ihrer entsprechenden Strahlenpaare, sowie auch die Geraden T, T_1 mit ihren entsprechenden Punktenpaaren einander decken; andererseits aber die Strahlbüschel s, s_1, sowie die Geraden S, S_1, eine Involution bilden. Ist nun $\mathfrak{g}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, so liegt sein entsprechender $\mathfrak{g}_1$ auf der Geraden, welche $\mathfrak{g}$ mit $(\sigma\sigma_1)$ verbindet; in dieser aber vereinigen sich zwei entsprechende, und den unendlich entfernten Punkten beider entsprechen zwei Punkte, welche sich auf der Achse (QP_1) vereinigen; also sind dieselben involutorisch, und die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ entsprechen sich in doppeltem Sinne. Oder ist g irgend eine Gerade von $\mathfrak{E}$, so schneidet sie die ihr entsprechende g_1 in einem Punkte von (TT_1), in welchem sich zwei entsprechende vereinigen; da nun die Punkte, wo diese Geraden g, g_1 die (SS_1) schneiden, sich in doppeltem Sinne entsprechen, so gilt diess auch von g, g_1; und demnach gehören letztere zu zwei involutorischen Strahlbüscheln.

Wären die Strecken $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ nicht einander gleich, und man legte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so auf einander, dass die Achsen Q, P_1 sich vereinigen, so könnten dieselben nicht collinear liegen, und höchstens nur die Punkte der Situationslinien sich in doppeltem Sinne entsprechen. Da aber in diesem Falle der eine Situationspunkt der unendlich entfernte von (QP_1) sein würde, so wären zwei Situationslinien mit (QP_1) parallel, also die in denselben vereinigten Geraden projektivisch-ähnlich; solche aber können nach dem 4ten Thl. des Archivs S. 261. *a* niemals involutorisch sein. Dagegen würde diess von den in der dritten Situationslinie vereinigten Geraden, aber auch nur von diesen allein, gelten, weil hier die Durchschnitte der Parallelstrahlen in endlicher Entfernung sich vereinigen.

a) **In zwei beliebig auf einander gelegten collinearen Ebenen gibt es im Allgemeinen keine zwei Punkte und keine zwei Gerade, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen.** *b*) **Legt man sie aber dergestalt auf einander, dass zwei entsprechende Gerade einander, und zugleich die den Achsen angehörigen Punkte sich decken, oder so, dass in zwei entsprechenden rechten Winkeln die ungleichnamigen Schenkel auf einander fallen, so sind jene zwei Gerade und die im zugeordneten Situationspunkte vereinigten Strahl-**

büschel, und andererseits die mit diesen Winkeln concentrischen Strahlbüschel und die mit der zugeordneten Situationslinie vereinigten Geraden involutorisch, d. h. je zwei entsprechende Elemente derselben entsprechen sich in doppeltem Sinne, im Allgemeinen aber auch nur diese allein. *c*) Fallen die Achsen beider Ebenen auf einander, so entspricht jede denselben parallele Gerade einer anderen in doppeltem Sinne, und das nämliche gilt von den Punkten derjenigen Situationslinie, welche nicht mit den Achsen parallel ist, sonst aber im Allgemeinen von keinem anderen Elemente. *d*) Sind in beiden Ebenen die Mittelpunkte der projektivisch-gleichen Strahlbüschel gleichweit von einander entfernt ($s\sigma = s_1\sigma_1$), und liegen die Ebenen collinear, so entspricht jeder Punkt einem anderen, und jede Gerade einer anderen in doppeltem Sinne.

B.

Auf einander gelegte reciproke Ebenen.

§. 31.

Denkt man sich irgend zwei reciprok-verwandte Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig auf einander gelegt, und ist A irgend eine Gerade von $\mathfrak{E}$ und B_1 der ihr entsprechende Punkt von $\mathfrak{E}_1$, ferner $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... die Punkte von A, und a_1, b_1, c_1, d_1... die denselben entsprechenden Strahlen von B_1, so ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots).$$

Sind nun $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... diejenigen Punkte von A, in welchen dieselbe von a_1, b_1, c_1, d_1... geschnitten wird, so ist auch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots).$$

Oder sind a, b, c, d... diejenigen Strahlen des Punktes B_1, welche nach den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... gehen, so ist

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots) = B(a, b, c, d\ldots).$$

Nach §. 20. 2, müssen auch die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... entsprechenden Geraden durch die den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1... entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... gehen, und die den Strahlen a, b, c, d... estsprechenden Punkte auf den den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.. liegen.

Je zwei Punkte einer Geraden, von denen ein jeder auf der dem anderen entsprechenden Geraden liegt, insofern immer nur der eine zu der anderen und der andere zu der anderen Ebene gerechnet wird, sollen zwei zugeordnete

Punkte jener Geraden; und je zwei Strahlen eines Punktes, von denen ein jeder nach dem anderen entsprechenden Punkte geht, wobei ebenfalls nicht beide Strahlen zu jeder Ebene gerechnet werden, sollen zwei zugeordnete Strahlen jenes Punktes heissen.

1. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen bilden die zugeordneten

Punktenpaare einer jeden Geraden zwei in Ansehung derselben projektivische Gerade.

Strahlenpaare eines jeden Punktes zwei in Ansehung derselben projektivische Strahlbüschel.

Rechnet man einen Punkt zu beiden Ebenen zugleich, so entsprechen demselben im Allgemeinen zwei verschiedene Gerade, und dem Durchschnitte der letzteren auch zwei Gerade, welche ihrerseits den ersteren zum Durchschnitte haben; und ebenso entsprechen einer jeden Geraden zwei Punkte, und der Verbindungslinie der letzteren zwei andere Punkte, welche auf jener ersteren liegen. Zwei Punkte, von denen ein jeder der Durchschnitt der dem anderen in doppeltem Sinne entsprechenden Geraden ist, sollen zwei Wechselpunkte, und zwei Gerade, von denen eine jede die der anderen in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte enthält, sollen zwei Wechselstrahlen beider Ebenen heissen. Je zwei Wechselpunkte und Wechselstrahlen sind also in doppeltem Sinne zugeordnete Punkte und Strahlen. Denkt man sich nun die zugeordneten Punktenpaare einer Geraden, welche irgend zwei Wechselpunkte mit einander verbindet, so müssen dieselben, weil in den projektivischen Geraden, die sie bilden, ein einziges Paar sich in doppeltem Sinne entsprechen, eine Involution von Punkten bilden, und desshalb je zwei zugeordnete Punkte dieser Geraden Wechselpunkte beider Ebenen sein u. s. w.

2. Je zwei zugeordnete Punkte einer Geraden sind Wechselpunkte beider Ebenen, sobald diess von einem einzigen Paare solcher Punkte gilt; und dann bilden sie eine Involution von Punkten.

2. Je zwei zugeordnete Strahlen eines Punktes sind Wechselstrahlen beider Ebenen, sobald diess von einem einzigen Paare solcher Strahlen gilt; und dann bilden sie eine Involution von Strahlen.

Denkt man sich zwei Gerade a, b, deren jede zwei Wechselpunkte verbindet, und ist p ihr Durchschnittspunkt, ferner P die Gerade, welche dem Punkte p entspricht, insofern derselbe zu $\mathfrak{E}_1$ gerechnet wird, endlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Punkte, wo die Geraden a, b von P geschnitten werden, so sind nach dem vorigen Satze sowohl p und $\mathfrak{a}$, als auch p und $\mathfrak{b}$ Wechselpunkte, d. h. rechnet man p zur Ebene $\mathfrak{E}$, so geht die entsprechende Gerade von p ebenfalls durch die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Der Punkt p ist also ein solcher Punkt beider Ebenen, welchem ein und dieselbe Gerade P entspricht, es mag derselbe zu der einen oder zur anderen Ebene gerechnet werden. Ist nun c irgend eine dritte Gerade, welche zwei Wechselpunkte verbindet, und ist $\mathfrak{c}$ ihr Durchschnitt mit P, so liegt der Wechselpunkt von $\mathfrak{c}$ auf c; aber die Geraden, welche

dem Punkte $\mathfrak{c}$ in dem einen und dem anderen Sinne entsprechen, gehen beide durch p, d. h. p ist der Wechselpunkt von $\mathfrak{c}$; also geht die Gerade c durch p. Gäbe es nun noch einen Punkt von derselben Eigenschaft als p, so würden die Geraden a, b, c... auch durch diesen gehen, was unmöglich ist.

3. In zwei aufeinander gelegten reciproken Ebenen

gehen sämmtliche Geraden, wovon jede zwei Wechselpunkte verbindet, durch einen und denselben Punkt, und diesem Punkte entsprechen in beiden Ebenen zwei Gerade, welche mit einander zusammenfallen. Es gibt aber nur einen Punkt, welcher diese beiden Eigenschaften zugleich besitzt.	liegen die Durchschnitte je zweier Wechselstrahlen auf einer und derselben Geraden, und dieser Geraden entsprechen in beiden Ebenen zwei Punkte, welche sich mit einander vereinigen. Es gibt aber nur eine Gerade, welche diese beiden Eigenschaften zugleich besitzt.

Da die Gerade, welche die Mittelpunkte M, M_1 beider Ebenen verbindet, der Wechselstrahl der unendlich entfernten Geraden ist, so folgt aus dem vorigen Satze rechts:

4. Diejenige Gerade, welche die Mittelpunkte beider Ebenen mit einander verbindet, läuft mit derjenigen parallel, deren entsprechende Punkte sich vereinigen.

Es sei A irgend eine Gerade, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$... seien ihre Punkte; in $\mathfrak{E}$ liegend vorgestellt, entspreche ihr der Punkt B_1, in $\mathfrak{E}_1$ liegend, der Punkt B, und ebenso den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$... einerseits die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ von B_1, andererseits die Strahlen $a, b, c, d \ldots$ von B. Dann sind die Durchschnitte von a, a_1; b, b_1; c, c_1; $d, d_1 \ldots$ die Wechselpunkte von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$..., und da

$$B(a, b, c, d...) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}...) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1...),$$

so ist auch

$$B(a, b, c, d\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots);$$

d. h. diese Durchschnitte sammt den Punkten B, B_1 liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Und da der oben mit p bezeichnete Punkt der Wechselpunkt des Durchschnittes von A und P ist, oder auch, weil die Geraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, welche p mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$... verbinden, durch die Wechselpunkte der letzteren gehen, und

$$B(a, b, c, d\ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) \equiv p(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots),$$

also

$$B(a, b, c, d\ldots) = p(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots)$$

ist, so liegt auch p auf $\mathfrak{K}$. In den Strahlbüscheln p, B entspricht demjenigen Strahle von p, welcher nach dem Durchschnitte von A und P geht, der beiden gemeinschaftliche Strahl Bp; also berührt ersterer den $\mathfrak{K}$ im Punkte p.

Durch ein analoges Räsonnement gelangt man zur rechten Seite des folgenden Doppelsatzes, worin wir der Kürze wegen den Punkt p den Pol und die Gerade P die Polare der beiden Ebenen nennen wollen:

5. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

liegen die sämmtlichen Punkte, deren Wechselpunkte einer und derselben Geraden angehören, auf dem Umfange eines Kegelschnitts, welcher auch die beiden, dieser Geraden entsprechenden Punkte enthält und im Pole der beiden Ebenen diejenige Gerade berührt, welche nach dem Durchschnitte jener Geraden und der Polare der beiden Ebenen gerichtet ist.	umhüllen die sämmtlichen Geraden, deren Wechselstrahlen einem und demselben Punkte angehören, einen Kegelschnitt, welcher auch die beiden, diesem Punkte entsprechenden Geraden, und ausserdem die Polare der beiden Ebenen in demjenigen Punkte berührt, welcher mit jenem ersteren Punkte und dem Pole der beiden Ebenen in gerader Linie liegt.

Der Kegelschnitt, welcher die Wechselpunkte der Punkte einer Geraden enthält, soll der Wechselpunkt-Kegelschnitt dieser Geraden, und derjenige, welcher von den Wechselstrahlen der Strahlen eines Punktes umhüllt wird, soll der Wechselstrahlen-Kegelschnitt dieses Punktes — in Bezug auf die reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ — genannt werden.

Die Anwendung, welche wir von dem vorigen Satze machen werden, erfordert noch folgende anderweitige Betrachtung. Es sei K irgend ein Kegelschnitt, p ein beliebiger Punkt und P die harmonische Polare von p in Bezug auf K; ferner seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ die Strahlen von p, welche K in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_0, \alpha_0$; $\mathfrak{b}_0, \beta_0$; $\mathfrak{c}_0, \gamma_0$; $\mathfrak{d}_0, \delta_0\ldots$ und eine beliebige Gerade A in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots$ schneiden; endlich seien $a_1, b_1, c_1, d_1\ldots$ die harmonischen Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots$, welche die Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ resp. in den Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots$ schneiden, und $a, b, c, d\ldots$ die Geraden, welche $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots$ mit dem harmonischen Pole B von A verbinden. Diess vorausgesetzt, so sind je zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1\ldots$ resp. mit $\mathfrak{a}_0, \alpha_0$; $\mathfrak{b}_0, \beta_0$; $\mathfrak{c}_0, \gamma_0$; $\mathfrak{d}_0, \delta_0\ldots$ harmonisch, und die Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; $d, d_1\ldots$, als zugeordnete harmonische Polaren des Punktes B für K, bilden eine Involution; also hat man

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) \equiv B(a, b, c, d\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots),$$

und folglich

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots),$$

d. h. die Punkte a, b, c, d... nebst p und B liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$. Da die Gerade, welche die Punkte B und p verbindet, die harmonischen Pole von A und P enthält, also die harmonische Polare des Durchschnittspunktes von A und P ist, so muss derselben im Strahlbüschel p der nach diesem letzteren Punkte gehende Strahl entsprechen, dieser Strahl also den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ in p berühren. Nach gehöriger Berücksichtigung der anderen Seite erhält man also folgenden Doppelsatz:

6. Ist irgend ein Kegelschnitt und ist in der Ebene desselben irgend ein Punkt und irgend eine Gerade gegeben, und bestimmt man auf jedem Strahle dieses Punktes denjenigen Punkt, welcher zu den beiden Durchschnitten des Kegelschnittes und dem Durchschnitte jener Geraden der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt, oder, um umfassender zu reden, welcher der dem Durchschnite jener Geraden zugeordnete harmonische Pol in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so gehören alle diese Punkte einem neuen Kegelschnitte an, welcher auch den harmonischen Pol der gegebenen Geraden enthält, und in dem gegebenen Punkte diejenige Gerade berührt, die nach dem Durchschnitte der gegebenen Geraden und der harmonischen Polare des gegebenen Punktes gerichtet ist.

6. Ist irgend ein Kegelschnitt und in der Ebene desselben irgend eine Gerade und irgend ein Strahlbüschel gegeben, und bestimmt man für jeden Punkt dieser Geraden denjenigen Strahl desselben, welcher mit den beiden an den Kegeschnitt gehenden Tangenten und mit dem jenem Strahlbüschel angehörigen Strahle harmonisch und zwar dem letzteren zugeordnet ist, oder, um umfassender zu reden, welcher die diesem letzteren Strahle zugeordnete harmonische Polare in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so umhüllen alle diese Strahlen einen neuen Kegelschnitt, welcher auch die harmonische Polare des Mittelpunktes des gegebenen Strahlbüschels, und die gegebene Gerade in demjenigen Punkte berührt, der mit diesem Mittelpunkte und dem harmonischen Pole der gegebenen Geraden in gerader Linie liegt.

Ein besonderer Fall der linken Seite dieses Satzes ist, wenn die gegebene Gerade unendlich entfernt ist, oder der zu bestimmende Punkt in der Mitte der jedesmaligen Sehne liegen soll.

7. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

auf einer beliebig gegebenen Geraden einen Punkt zu finden, dessen entsprechende Geraden durch diesen Punkt selber gehen.

in einem beliebig gegebenen Strahlbüschel einen Strahl zu finden, dessen entsprechende Punkte auf diesem Strahle selber liegen.

Auflösung. Zu drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ der gegebenen Geraden A suche man die entsprechenden Geraden a_1, b_1, c_1, welche A in den Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ schneiden; denke sich zwei projektivische Gerade A, A_1, wovon $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ drei Paar entsprechende Punkte sind, und suche diejenigen zwei Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$ von A, A_1, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen, so hat jeder von beiden die verlangte Eigenschaft.

Auflösung. Zu drei beliebigen Strahlen a, b, c des gegebenen Strahlbüschels B suche man die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und verbinde sie mit B durch a_1, b_1, c_1; denke sich zwei projektivische Strahlbüschel B, B_1, wovon a, b, c und a_1, b_1, c_1 drei Paar entsprechende Strahlen sind, und suche diejenigen zwei Strahlen (ee_1), (ff_1) von B, B_1, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen; so hat jeder von beiden die verlangte Eigenschaft.

Beweis (links). Denn sind e_1, f_1 die entsprechenden Geraden von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, und schneiden sie die A (A_1) in ε_1, φ_1, so hat man nach §. 21. γ.:

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, e_1, f_1\ldots) \equiv A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots);$$

also

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots).$$

Aber nach der Konstruktion ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1\ldots),$$

also auch

$$A(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1\ldots),$$

und da zwei projektivische Gebilde durch drei Paar entsprechende Elemente bestimmt sind, so fallen $\mathfrak{e}_1$ und ε_1, φ_1 und $\mathfrak{f}_1$ zusammen.

Sind die Punktenreihen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ ungleichliegend, so gibt es bekanntlich allemal zwei Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$; sind sie dagegen gleichliegend, so gibt es entweder zwei, oder nur einen, oder auch keinen solchen Punkt. Ist aber in der Ebene $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1)$ ein einziger solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ vorhanden, so gibt es auf jedem Strahle desselben im Allgemeinen nothwendig einen zweiten $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$, und somit unzählig viele in der Ebene.

§. 8. Ist in zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen ein einziger Punkt vorhanden, dessen entsprechende Geraden durch ihn selber gehen, oder eine einzige Gerade, deren entsprechende Punkte auf ihr selber liegen, so gibt es im Allgemeinen unzählig viele solche Punkte und Gerade.

Auf drei beliebigen Strahlen α, β, γ des Punktes p seien $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0 drei solche Punktenpaare, deren entsprechende Geraden durch die betreffenden Punkte selber gehen; so sind jedes Paar die Hauptpunkte derjenigen Involution, welche

von den Wechselpunkten der betreffenden Geraden gebildet wird, also mit je zwei Wechselpunkten, z. B. mit p und dem der Geraden P angehörigen Punkte harmonisch. Denkt man sich also durch die fünf Punkte $\mathfrak{a}_0$, α_0, $\mathfrak{b}_0$, β_0, $\mathfrak{c}_0$ einen Kegelschnitt K gelegt, so ist P, die Polare der beiden Ebenen, zugleich die harmonische Polare des Poles p der beiden Ebenen in Bezug auf K, und folglich liegt auch der Punkt γ_0 auf K. Denkt man sich ferner eine beliebige Gerade A und einerseits den Wechselpunkt-Kegelschnitt von A, welcher die Strahlen α, β, γ, δ... von p in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... schneidet, andererseits auf jedem dieser Strahlen denjenigen Punkt bestimmt, welcher zu den beiden Durchschnitten $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0; $\mathfrak{d}_0$, δ_0... des Kegelschnittes K und zu dem Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... der Geraden A der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese Punkte nach Lehrsatz 6. auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$, welcher im Punkte p diejenige Gerade berührt, die nach dem Durchschnitte von A und P gerichtet ist. Nun aber sind auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_0$, γ_0 harmonisch; also haben die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ vier Punkte p, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ gemein; zugleich aber auch die Tangente in p (5.), also fallen sie zusammen. Denkt man sich also auf einem beliebigen vierten Strahle δ von p zwei Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie selber gehen, so sind nicht nur diese, sondern auch die Punkte $\mathfrak{d}_0$, δ_0 des Kegelschnittes K sowohl mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ als auch mit p und dem der P angehörigen Punkte harmonisch; jene beide ersteren fallen also mit $\mathfrak{d}_0$, δ_0 zusammen. Wiederholt man endlich dieses ganze Räsonnement auf der Seite rechts, so erhält man zunächst folgenden Doppelsatz:

9. **In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen**

liegen sämmtliche Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie selber gehen, auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes, für welchen der Pol der beiden Ebenen der harmonische Pol der Polare der beiden Ebenen ist, und je zwei Wechselpunkte der beiden Ebenen zwei zugeordnete harmonische Pole sind.

umhüllen sämmtliche Gerade, deren entsprechende Punkte auf ihnen selber liegen, einen einzigen Kegelschnitt, für welchen die Polare der beiden Ebenen zugleich die harmonische Polare des Pols der beiden Ebenen ist, und je zwei Wechselstrahlen der beiden Ebenen zwei zugeordnete harmonische Polaren sind.

Jeder Mittelpunkt der beiden Ebenen hat offenbar einen unendlich entfernten Punkt zum Wechselpunkte, nämlich denjenigen der Geraden, welche ihn mit dem Punkte p verbindet; also läuft die harmonische Polare des einen, M, in Bezug auf den Kegelschnitt K (links) mit der Geraden pM, und die des anderen, M_1, mit der Geraden M_1p parallel; da nun pM und pM_1 selber mit einander nicht parallel sind, so kann die Gerade MM_1, welche man die **Mittellinie** der beiden Ebenen nennen kann, nicht durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K (links) gehen. Dagegen geht dieselbe nothwendig durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K (rechts), indem ihr Wechselstrahl die unendlich entfernte Gerade ist, folglich auch der harmonische Pol dieser

letzteren in Bezug auf diesen Kegelschnitt der ersteren angehören muss.

10. Die Mittellinie der beiden Ebenen geht durch den Mittelpunkt desjenigen Kegelschnittes, dessen Tangenten durch die ihnen selbst entsprechenden Punkte gehen, und nur dann auch durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes, der diese Punkte enthält, wenn der Pol der beiden Ebenen unendlich entfernt ist, oder die Mittellinie mit der Polare der beiden Ebenen zusammenfällt.

In Taf. II. Fig. 12. sei $\mathfrak{K}$ derjenige Kegelschnitt, dessen Punkte auf ihren entsprechenden Geraden liegen, und K derjenige, welcher von diesen letzteren umhüllt wird; so wird, wenn irgend zwei Tangenten von K mit a, b oder c_1, d_1 bezeichnet werden, jenachdem sie in $\mathfrak{E}$ oder in $\mathfrak{E}_1$ liegen sollen, und nun den a und b die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, der der c_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{c}$ auf a, und der der d_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{d}$ auf b liegen, und also der andere Durchschnitt dieser Tangente mit $\mathfrak{K}$ sein müssen. Dem Durchschnitte $\mathfrak{s}$ von a und b entspricht also die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, und dem Durchschnitte $\mathfrak{t}_1$ von c_1 und d_1 entspricht die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$; folglich ist der Durchschnitt $(\mathfrak{s}_1\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ der Wechselpunkt von $(\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1)$, und beide liegen mit dem Pole p beider Ebenen in gerader Linie. Man denke sich $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{c}$ durch zwei Gerade verbunden, welche sich im Punkte $\mathfrak{q}$ schneiden, und von diesem Punkte und dem Punkte p nach $(\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1)$ die Geraden g, h gezogen; so ist h die harmonische Polare des Punktes $\mathfrak{q}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}$, folglich, da h durch den Punkt p geht, liegt $\mathfrak{q}$ auf der Polare P beider Ebenen, welche die harmonische Polare von p für $\mathfrak{K}$ ist. — Die Geraden g, h sind mit den Tangenten a, b harmonisch, also zwei zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf K, d. h. der harmonische Pol von h für K liegt auf g; derselbe liegt aber auch auf P, welche auch für K die harmonische Polare von p ist; demnach ist $\mathfrak{q}$ der harmonische Pol von h nicht nur in Bezug auf $\mathfrak{K}$, sondern auch auf K; und es gibt somit auf der Linie P unzählige Punktenpaare $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, welche in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und K zugleich zugeordnete harmonische Pole sind. Die Polare der beiden Ebenen ist also eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante von $\mathfrak{K}$ und K, und ebenso zeigt man, dass der Pol der beiden Ebenen ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben ist. Haben aber irgend ein System von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante P gemein, welche zugleich in Bezug auf alle die harmonische Polare eines und desselben Punktes p ist, so sage ich, diese Kegelschnitte haben längs der Geraden P eine reelle oder ideale doppelte Berührung.

11. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen gibt es im Allgemeinen zwei sich entsprechende Kegelschnitte, welche längs der Polare beider Ebenen als Berührungssehne, und unter dem Pole beider Ebenen, als Berührungspole, eine reelle oder ideale doppelte Berührung haben, und die Eigenthümlichkeit

besitzen, dass einer jeden Tangente eines bestimmten von beiden die Punkte, in welchen sie den anderen schneidet, und jedem Punkte dieses letzteren die Tangenten, welche von ihm an den ersteren gehen, auf bestimmte und unzweideutige Weise entsprechen. Dahingegen entsprechen den Punkten des ersteren zwar auch die Tangenten des anderen, doch liegen diese Punkte nicht auf diesen Tangenten.

Sind irgend zwei Kegelschnitte K, $\mathfrak{K}$, welche sich doppelt berühren, gegeben; sind c_1, d_1, f_1 irgend drei Tangenten eines beliebigen von beiden — vorausgesetzt, dass beide einander ausschliessen — und bezeichnet man zwei derselben, z. B. c_1, d_1, zugleich auch mit a, b; den Durchschnitt von a und b mit $\mathfrak{s}$; den von c_1 und d_1 mit $\mathfrak{t}_1$; die Punkte, wo a und b den anderen Kegelschnitt schneiden, mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}$; die Punkte, wo $\mathfrak{f}_1$ ihn schneidet, mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{k}_1$; die Geraden $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ mit t und s_1, und hat man bei dieser Bezeichnung darauf gesehen, dass nicht $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{k}_1\mathfrak{b}_1$, sondern $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{k}_1\mathfrak{d}$ es sind, deren Durchschnitt auf der Berührungssehne P liegt — so kann man sich zwei mit der Ebene der beiden Kegelschnitte zusammengefallene reciproke Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ denken und festsetzen, dass die Geraden c_1, d_1, f_1, s_1 von $\mathfrak{E}_1$ den Punkten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{E}$ entsprechen sollen, und da drei dieser Punkte auf ihren entsprechenden Geraden liegen, so gibt es nach 8. unzählige solche Punkte und Geraden, und diese bestimmen nach 11. zwei sich doppeltberührende Kegelschnitte, deren einer mit K die Tangenten c_1, d_1, f_1, der andere mit $\mathfrak{K}$ die Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ gemein hat, und da dem Punkte $\mathfrak{a}_1$, als dem Durchschnitte von c_1, s_1, die Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{s}$, und dem Durchschnitte $\mathfrak{b}_1$ von d_1, s_1 die Verbindungslinie von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{s}$ entsprechen muss, also auch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ auf ihren entsprechenden Geraden liegen, so hat der letztere Kegelschnitt fünf Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{K}$ gemein, ist also mit demselben identisch. Er geht also auch durch den Punkt $\mathfrak{k}_1$. Endlich müssen in dem neuen Paare von Kegelschnitten sowohl als in dem gegebenen die Durchschnitte von $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{k}_1\mathfrak{d}$ auf der Berührungssehne liegen; also fällt die Berührungssehne des einen Paars mit der des anderen zusammen, und da es immer nur einen Kegelschnitt gibt, welcher einen gegebenen $\mathfrak{K}$ längs einer gegebenen Geraden P doppelt berührt und eine gegebene Gerade c_1 zur Tangente hat, so fällt auch K mit dem anderen neuen Kegelschnitte zusammen.

12. Sind in einer Ebene irgend zwei Kegelschnitte, welche eine reelle oder ideale doppelte Berührung haben, gegeben, so kann man *a*) sich allemal zwei Ebenen denken, welche mit der ersteren zusammengefallen sind, und festsetzen, diese Ebenen sollen reciprok, und jene Kegelschnitte sollen in doppeltem Sinne entsprechende Kegelschnitte sein, d. h. die Punkte und Tangenten des einen den Tangenten und Punkten des anderen, sowohl wenn der erstere in der einen, als wenn er in der anderen Ebene liegend vorgestellt wird; *b*) und zugleich kann man festsetzen, dass alle Tangenten eines bestimmten von beiden durch die

ihnen entsprechenden Punkte des anderen gehen, nicht aber zu gleicher Zeit, dass auch die Tangenten in diesen letzteren Punkten durch die Berührungspunkte der ersteren gehen sollen. *c*) Diese Beziehung der beiden Ebenen auf einander ist allemal nur auf eine einzige Weise möglich, es sei denn, dass die Kegelschnitte einander gegenseitig ausschliessen, in welchem Falle allein ein jeder von den Tangenten des anderen geschnitten wird, so dass man einmal die Punkte des einen auf den entsprechenden Tangenten des anderen, und ein zweitesmal die Punkte des zweiten auf den entsprechenden Tangenten des ersten liegen lassen kann; und *d*) man erhält diese Beziehung, indem man drei Tangenten (c_1, d_1, f_1) des einen Kegelschnittes, welche den anderen in drei Punktenpaaren $(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{d}, \mathfrak{b}_1; \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1)$ schneiden, beliebig auswählt und einer jeden einen dieser Punkte $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f})$ und ausserdem der Verbindungslinie $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$ von zweien der drei anderen Punkte den gegenseitigen Durchschnitt der betreffenden zwei Tangenten (c_1, d_1) entsprechen lässt; oder auch indem man vier Tangenten des einen beliebig annimmt und eine jede einem der beiden Punkte entsprechen lässt, in welchen sie den anderen Kegelschnitt schneidet; doch ist in beiden Fällen darauf zu achten, dass die Verbindungslinie je zweier, derselben Ebene zugewiesenen Punkte, z. B. $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, und diejenige der ihnen zugesellten Punkte $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ einander nicht auf der Berührungssehne schneiden.

Legt man die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ dergestalt auf einander, dass die Mittelpunkte M, M_1 derselben sich decken, so wird die unendlich entfernte Gerade zur Polare, und der Punkt (MM_1) oder M zum Pole beider Ebenen, und da dieser letztere auch jetzt der harmonische Pol der ersteren für jeden der Kegelschnitte K, $\mathfrak{K}$ sein muss, so ist derselbe zugleich der Mittelpunkt dieser Kegelschnitte. Ferner ist die unendlich entfernte Gerade eine gemeinschaftliche Sekante dieser Kegelschnitte, d. h. dem unendlich entfernten Punkte einer jeden Geraden ist ein und derselbe unendlich entfernte Punkt als harmonischer Pol in Bezug auf beide Kegelschnitte zugeordnet; also sind je zwei zugeordnete Durchmesser des einen zweien des anderen parallel, und hieraus folgt, dass K, $\mathfrak{K}$ ähnliche und ähnlichliegende Kegelschnitte sind (Vgl. Thl. 5. des Archivs. S. 238.).

13. Werden zwei reciproke Ebenen dergestalt auf einander gelegt, dass ihre Mittelpunkte einander decken, so sind die beiden entsprechenden Kegelschnitte, von denen die Punkte des einen auf den entsprechenden Tangenten des anderen liegen, ähnlich und ähnlich liegend.

Jede Gerade einer von zwei reciproken Ebenen, welche durch deren Mittelpunkt geht, wird ein **Durchmesser** derselben genannt, und ein Durchmesser a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ heisst einem Durchmesser a von $\mathfrak{E}$ **zugeordnet**, wenn der erstere nach dem ent-

sprechenden unendlich entfernten Punkte des letzteren gerichtet ist. Liegen die beiden Ebenen auf einander und concentrisch, so sind die zugeordneten Durchmesser nichts anders als die zugeordneten Strahlen des gemeinsamen Mittelpunktes M und bilden folglich zwei projektivische Strahlbüschel M, M_1. Denkt man sich nun die eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ um den Mittelpunkt M dergestalt gedreht, dass die ungleichnamigen Schenkel s und t_1, s_1 und t der entsprechenden rechten Winkel dieser Strahlbüschel, welche sie bekanntlich immer besitzen, einander decken, d. h. legt man die Strahlbüschel M, M_1 involutorisch, so ist jedem Durchmesser (ab_1) ein und derselbe Durchmesser (a_1b) zugeordnet, er mag nun in $\mathfrak{E}$ oder in $\mathfrak{E}_1$ liegend vorgestellt werden. Es sei $\mathfrak{a}$ irgend ein Punkt von a; so ist die ihm entsprechende Gerade α_1 mit a_1 parallel und geht durch den Wechselpunkt von $\mathfrak{a}$; und ist $\mathfrak{b}_1$ der mit $\mathfrak{a}$ zusammenliegende Punkt von b_1, so ist die ihm entsprechende Gerade β mit b parallel und geht durch den Wechselpunkt von $\mathfrak{b}_1$. Aber sowohl die Geraden a_1 und b als auch die Wechselpunkte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ sind identisch; also fallen die beiden dem Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1)$ entsprechenden Geraden α_1 und β zusammen. Hieraus folgt:

14. **Zwei reciproke Ebenen lassen sich allemal so auf einander legen, dass ihre zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden, und dann fallen je zwei Gerade, welche einem und demselben Punkte, und je zwei Punkte, welche einer und derselben Geraden beider Ebenen entsprechen, mit einander zusammen.**

Auch für diese Lage der beiden Ebenen nun lässt sich, wie oben, zeigen, dass diejenigen Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen, einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ angehören, und dass diese Geraden einen Kegelschnitt K umhüllen. Die beiden Tangenten aber, welche von irgend einem Punkte des $\mathfrak{K}$ an K gelegt werden, müssen nach dem vorigen Satze zusammenfallen; also liegt dieser Punkt auf dem Umfange des K, und somit fallen die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, K selbst zusammen.

Sind in Taf. II. Fig. 13. K, $\mathfrak{K}$ die beiden ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte, welche bei einer concentrischen, sonst aber beliebigen Lage der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ die vereinigten entsprechenden Elementenpaare enthalten, und denkt man sich die eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ um eine der den Kegelschnitten gemeinschaftlichen Achsen, z. B. um A, herumgewendet, so fallen die Scheiteltangenten α_1 und $\mathfrak{n}_1$ in ihre frühere Stelle β und ν zurück, ihre Endpunkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{n}_1$ aber fallen in die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$; ferner fallen die beiden Tangentenpaare σ und σ_1, τ und τ_1, welche von den Scheiteln des anderen Kegelschnittes ausgehen, zusammen, so dass also nun jedem der vereinigten Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1)$, $(\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1)$, $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ zwei vereinigte und durch ihn selbst gehende Gerade entsprechen. Zugleich sieht man, dass die zwei Paar zugeordneten Durchmesser a, a_1 und b, b_1 mit den ungleichnamigen Schenkeln auf einander fallen u. s. w. Der neue Kegelschnitt, welcher also jetzt an die Stelle der beiden vorigen K, $\mathfrak{K}$ tritt, geht folglich durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und wird in denselben von den Geraden α_1, $\mathfrak{n}_1$, σ, τ berührt.

Hätte man den Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ gleich anfangs durch Drehung der einen eine andere Lage zu einander gegeben, und sodann die eine um die neue Achse A herumgewendet, so würde man gleichwohl wieder dieselbe Lage der Ebene $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ wie vorhin erhalten haben, weil beidemale die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel in den Strahlbüscheln der zugeordneten Durchmesser zusammenfallen müssen, und es nur zwei solche rechte Winkel geben kann; es sei denn, dass man die andere Achse B statt A zur Umwendungsachse nähme.

Diess ergibt sich mit mehr Klarheit und Einfachheit, wenn wir die Sache unabhängig von den Kegelschnitten $K, \mathfrak{K}$ betrachten. Es seien die Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ beliebig concentrisch gelegt; die Winkel st (Taf. II. Fig. 14.) und $s_1 t_1$ seien die von zwei Paar zugeordneten Durchmessern s, s_1 und t, t_1 gebildeten rechten Winkel; so kann man die Ebenen zweimal durch Drehung und wiederum zweimal durch Umwendung so legen, dass die Durchmesser s und t_1, t und s_1 auf einander fallen; durch Drehung nämlich, indem man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ entweder um den spitzen Winkel st_1 rechts herum, oder um das Supplement dieses Winkels links herum dreht; und durch Umwendung, indem man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ entweder um die Gerade A, welche den spitzen Winkel st_1 hälftet, oder um die auf A senkrechte Gerade B wendet. In einer jeden von diesen vier Lagen erhalten auch je zwei entsprechende Elemente beider Ebenen eine verschiedene Lage zu einander; ausserdem aber gibt es keine fünfte.

Liegen die zugeordneten Durchmesser bereits involutorisch, so kann man sich zur Umwendung der Ebenen statt der Geraden A, B der Durchmesser s, t selber bedienen. Sind nun $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ irgend zwei Wechselpunkte von s, und dreht man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um 180°, so bilden auch jetzt die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ in ihrer neuen Lage zwei Wechselpunkte, dieselben schliessen aber den Mittelpunkt M der von den Wechselpunkten gebildeten Involution ein oder aus, jenachdem sie ihn vorher aus- oder einschlossen; und zwar gilt diess zugleich dann auch von je zwei Wechselpunkten des Durchmessers t. Wendet man dagegen die eine Ebene um den Durchmesser t herum, so tritt nur auf s jener Unterschied der Lage ein. Nun aber sind die Hauptpunkte der genannten Involution allemal zwei Punkte des in Rede stehenden Kegelschnitts, und sie existiren oder nicht, jenachdem der Mittelpunkt der Involution ausserhalb oder zwischen je zwei zugeordneten Punkten liegt; ferner ist es klar, dass je zwei zugeordnete Durchmesser der beiden Ebenen jetzt zugleich zugeordnete Durchmesser des Kegelschnittes sind, und solche zwei Durchmesser schneiden denselben entweder alle beide, oder nur der eine von beiden; also kann man mit vollkommener Sicherheit schliessen:

15. **Werden zwei reciproke Ebenen dergestalt auf einander gelegt, dass ihre zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden,** *a*) **so gehören die sämmtlichen Punkte, welche auf ihren entsprechenden Geraden liegen, dem Umfange eines Kegelschnittes an, welcher diese Geraden in jenen Punkten berührt.** *b*) **Dreht man nun die eine Ebene um einen Winkel von zwei Rechten um ihren gemeinsamen**

Mittelpunkt, so erscheint jener Kgelschnitt als Hyperbel, als Ellipse, oder er verschwindet ganz, jenachdem er anfangs eine Hyperbel, oder nicht vorhanden, oder eine Ellipse war. *c*) Wendet man dagegen die eine Ebene um eine Achse jener Involution oder, was einerlei ist, um eine Achse jenes Kegelschnittes herum, so erscheint derselbe von Neuem als Hyperbel, wenn er vorher eine Ellipse oder nicht-vorhanden war; dagegen erscheint er als Ellipse oder verschwindet, wenn er vorher eine Hyperbel war, jenachdem die Umwendung um die Haupt- oder um die Nebenachse derselben geschieht. *d*) Ueberhaupt lassen sich die beiden Ebenen allemal auf vier verschiedene Weisen so auf einander legen, dass die zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden, und zwar erscheint jener Kegelschnitt allemal in zweien dieser Lagen als Hyperbel, in einer einzigen als E-lipse, und in der letzten verschwindet er.

Endlich denke man sich irgend einen Kegelschnitt K, drei beliebige Punkte desselben und die Tangenten in diesen Punkten gegeben; zwei dieser letzteren seien, der eine (BB_1), der andere $(B'B'_1)$, die Tangente in jenem (AA_1), die in diesem $(A'A'_1)$, der dritte Punkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und die Tangente in demselben (aa_1), endlich der Durchschnitt von (AA_1) und $(A'A'_1)$ sei mit $(\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1)$ und die Verbindungslinie von (BB_1) und $(B'B'_1)$ mit (ss_1) bezeichnet. Jetzt denke man sich, zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien mit der Ebene des gegebenen Kegelschnittes zusammengefallen, und setze fest, diese Ebenen sollen reciprok, und zwar die vier Punkte B, B', $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$ und die vier Geraden A_1, A'_1, s_1, a_1 entsprechende Elemente derselben sein; so wird auch dem Durchschnitte $\mathfrak{s}_1$ von A_1, A'_1 die Verbindungslinie s von B, B', dem Durchschnitte B_1 von s_1, A_1 die Verbindungslinie A von $\mathfrak{s}$, B, und dem Durchschnitte B'_1 von s_1, A'_1 die Verbindungslinie A' von $\mathfrak{s}$, B' entsprechen. Endlich entspricht dem Durchschnitte von A_1, a_1 die Verbindungslinie von B, $\mathfrak{a}$; und dem Durchschnitte von A'_1, a_1 die Verbindungslinie von B', $\mathfrak{a}$; folglich auch dem Punkte $\mathfrak{a}_1$ die Tangente a. Den vier Punkten (BB_1), $(B'B'_1)$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$, $(\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1)$ entsprechen also vier Paar vereinigte Gerade (A_1A), (A'_1A'), (a_1a), (s_1s); also gehören diese Punkte einem Kegelschnitte K an, welcher diese Gerade berührt, und dessen sämmtliche Punkte und Tangenten die nämliche Eigenschaft als jene besitzen u. s. w.

16. Ist in einer Ebene ein beliebiger Kegelschnitt gegeben, so kann man sich allemal zwei Ebenen denken, welche mit der Ebene dieses Kegelschnittes zusammenfallen, und festsetzen, dieselben sollen reciprok sein, und jeder Tangente des Kegelschnittes ihr Berührungspunkt, sowie auch einer jeden Geraden ein und derselbe Punkt in Bezug auf beide Ebenen entsprechen.

In diesem Falle wird jeder Punkt der harmonische Pol der ihm entsprechenden Geraden, und letztere die harmonische Polare jenes Punktes in Bezug auf die beiden Ebenen oder auch jenen

Kegelschnitt genannt; diese Benennung soll aber auch noch dann gelten, wenn die zugeordneten Durchmesser zweier reciproken Ebenen involutorisch liegen, und kein Kegelschnitt vorhanden ist, dessen Punkte auf den entsprechenden Geraden liegen.

Die Theorie der geometrischen Verwandtschaft der Reciprocität kehrt also an ihrem Schlusse, der offenbar ein nothwendiger ist, zu jenen einfachen Eigenschaften der Kegelschnitte zurück, von welchen die neuere Geometrie sowohl in ihrer historischen als systematischen Entwickelung ihren Ausgang nahm; und ebenso hatten sich uns auch bereits als letzte und partikulärste Erscheinungen der Collineation jene Eigenschaften der Aehnlichkeit, der Gleichheit, der Congruenz ergeben, auf welchen die Elemente der sogenannten Geometrie der Alten beruhen. Theils aber ist die Art, wie diese Erscheinungen von Neuem hervortreten, eine andere als früher, nämlich nicht als Eigenschaften blosser Figuren, sondern von Systemen sämmtlicher Elemente einer oder mehrerer Ebenen; theils sind neue Erscheinungen hinzugekommen, von deren Vorhandensein man anfangs nichts wusste. — Schon Möbius hat darauf aufmerksam gemacht, dass den Elementarsätzen über die Bestimmungsstücke, welche gegeben sein müssen, um eine einer gegebenen Figur congruente, ähnliche, gleiche zu construiren, analoge, die Verwandtschaft der Affinität und der Collineation betreffende Sätze sich hinzugesellen lassen; und die Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren könnte man freier und allgemeiner d. h. ohne Hülfe eines Kegelschnittes darstellen, selbst wenn man von dem allgemeinen Begriffe der Reciprocität, wie er oben aufgestellt worden, nicht ausgehen wollte. — Diese Eigenthümlichkeit im Entwickelungsgange der Geometrie, welche wir auch im 4ten Theile des Archivs. S. 278. wahrzunehmen Gelegenheit hatten, scheint von allgemein-wissenschaftlicher Natur und besonders geeignet zu sein, über das Verhältniss der neuern Geometrie zu der der Alten das genügende Licht zu verbreiten. Die strenge Wissenschaft schreitet zwar immer nur vom Allgemeinen zum Besondern, d. h. von dem was weniger, zu dem was mehr Bestimmungen enthält, fort; aber etwas anderes ist das Allgemeine der Erscheinung und das Allgemeine dem Begriffe nach; jenes ist, wie der Punkt, die Gerade, das Dreieck, der Kreis, nur das einfache Element, welches in allen oder mehreren besonderen Gebilden erscheint, woraus die letzteren äusserlich zusammengesetzt und mittels desselben konstruirt werden; dieses dagegen ist das Gesetz oder Princip, wodurch, wie z. B. die Trsnsversalentheorie, das Princip der Projektivität, des Punktes der mittleren Entfernung, der Fusspunkten-Vielecke und Fusspunkten-Curven, eine Mannichfaltigkeit von Gebilden auf einander bezogen und deren Eigenschaften durch innere Fortbestimmung entwickelt werden. — Der Punkt ist das allen Figuren gemeinsame Element und gilt desshalb der Anschauung für allgemeiner als z. B. der Kegelschnitt, während er andererseits wieder nur als eine besondere Art von Kegelschnitt erscheint. — Indem die Geometrie von einfacheren zu zusammengesetzteren Gebilden fortschreitet, verschafft

sie sich die Gewissheit und das Fundament ihrer Principe, worunter schon jeder Lehrsatz gerechnet werden kann; und indem sie die letzteren diskutirt, bringt sie Klarheit, Ordnung und Vollständigkeit in die Erscheinungen und wird sich ihrer Methode mehr und mehr bewusst; dieses letztere Moment tritt aber natürlich gegen das erstere zurück, so lange die gewonnenen Gesetze selbst eines reicheren Inhalts entbehren, und wenn dann zu einer Zeit, wie der unsrigen, umfassendere Gesetze entdeckt und mit Vorliebe, vielleicht mit Vernachlässigung der gewohnten äusseren Form ausgebeutet werden, so kann es den Anschein erhalten, als wenn eine ganz neue Art von Geometrie sich Bahn bräche, und man kann vergessen, dass auch die Alten ihre geometrische Analysis gehabt, und dass die Neueren weder ihre Theorien ohne die Elemente befestigen, noch auch ohne fortgesetzte Synthesis zu ferneren Entdeckungen würden fortschreiten können.

II.

Abgekürztes Verfahren bei der Kubikwurzelausziehung.

Von dem

Herrn Schulrath J. H. T. Müller,

Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.

Bei der Anwendung der gewöhnlichen Formel zur Ausziehung der Kubikwurzel, nämlich:

$$(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$$

wird, wie Jeder weiss, mit zunehmender Zahl der Ziffern, die Berechnung der zweiten Zeile bald sehr beschwerlich. Der Einsender dieses hatte, um die Rechnung möglichst zu erleichtern, in seinem Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik den drei letzten stets wiederkehrenden Gliedern folgende Gestalt

$$\{3a.a.x^2 + (3a.x+b).b\}.b$$

gegeben, nach welcher sich die Zahl der Multiplicationen vermindert und der Werth von $3a$ sich zweimal benutzen lässt. Hiernach hat man die bis zu irgend einer Stelle gefundene Wurzel zu verdreifachen, dieses Product nochmals mit der Wurzel zu multipliciren und durch Division mit dem Hundertfachen dieses Werthes in den neuen Theilradicanden die nächste Ziffer b zu finden. Wird hierauf diese Ziffer dem bereits berechneten Dreifachen der bisherigen Wurzel rechts angehängt, die so erhaltene Zahl mit dieser Ziffer multiplicirt, das Product unter $3a.a$, jedoch zwei Stellen weiter rechts, gestellt und die Summe beider Producte nochmals mit der letztgefundenen Ziffer multiplicirt, so ist der neue vollständige Subtrahendus gefunden.

Ist z. B. 23456 die bereits gefundene Wurzel, so erhält man durch Verdreifachung und nachherige Multiplication mit 23456

```
                          70368₉
                          23456
                         ------
                         140736
                          211104
                           281472
                            351840
                             422208
                         -------------
als neuen Divisor:       1650551808 . . ,  und wenn 9 die neue Wur-
                               6333201     zelziffer ist, durch Anhän-
                         -------------
                         165061514001      gung derselben an obige
                        -------------- (9  70368, indem man mit 9
als neuen Subtrahendus: 1485553626009      multiplicirt etc.
```

Auch könnte

$$3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$$

in

$$\{3ax(ax+b) + b^2\}.b$$

verwandelt werden, was jedoch keine grössere Erleichterung gewährt.

Hierbei blieb aber der Uebelstand, dass mit jeder neuen Wurzelziffer die Zahl der Producte um 1 zunimmt.

Diess lässt sich beseitigen, wenn bei der Aufsuchung jedes neuen Divisors der nächstvorhergehende Divisor benutzt wird. Da nämlich bei der nächsten Theilradication der Divisor $3a.a$ in $3(ax+b)^2 = 3a.a.x^2 + (2ax+b).3b$ übergeht, so hat man nur die bisherige Wurzel, ohne ihre letzte Ziffer, zu verdoppeln, rechts an das erhaltene Product diese Ziffer zu hängen, die so erhaltene Zahl mit dem Dreifachen derselben Ziffer zu multipliciren und das entstandene Product um das Hundertfache des vorigen Divisors zu vermehren, damit der neue Divisor erhalten werde.

Der vorige durch 2345 des obigen Beispiels bestimmte Divisor war 16497075. Man erhält jetzt durch Verdoppelung von 2345 und Anhängung der letzten Wurzelziffer 6:

4690_6
140718 (3 und durch Multiplication mit 3.6 etc.
844308 (6
16497075..
1650551808 als neuen Divisor.

Um die oben angegebene Berechnung des neuen Subtrahendus mit möglichst wenig Ziffern abzumachen, stelle man über die 4690_6 die verdreifachte bisherige Wurzel 23456, hänge hieran die neue Wurzelziffer 9 und verfahre dann wie oben. Dann erhält die ganze Theilrechnung folgende Gestalt:

70368_9
4690_6
140718 (3
844308 (6
16497075..
1650551808..
6333201
165061514001
1485553626009 (9

Nach der zuerst gezeigten Methode, obwohl sie schon um Vieles kürzer als die durch $3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$ bezeichnete ist, sind demungeachtet zur Berechnung von n geltenden Wurzelziffern noch $3+4+5+..+n+1=\frac{n-1.n+4}{1.2}$; nach der zuletzt angegebenen aber, welche bei jeder Theilrechnung bloss vier Multiplicationen erfordert, nur $4(n-2)+3=4n-5$ Producte zu bilden, wo in beiden Fällen die eigentlich immer nur die letzte Wurzelziffer betreffenden Verdoppelungen und Verdreifachungen der Wurzel nicht mitgezählt worden sind. Man erspart daher bei $n$maliger Wurzelausziehung die Berechnung von $\frac{n-2.n-3}{1.2}$ Producten. Aus diesem Grunde dürfte das, soviel der Einsender weiss, bisher noch nicht angewandte Verfahren einige Beachtung verdienen und sich vielleicht zur Aufnahme in die Lehrbücher der Arithmetik eignen.

III.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem

Herrn Professor Dr. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

I. Ueber die mechanische Construction der Lemniscate.

Der geometrische Ort für die Fusspunkte aller Perpendikel, welche von dem Mittelpunkte einer Hyperbel auf die Tangenten derselben gefällt werden können, ist bekanntlich eine schleifenförmige Curve, von den Schriftstellern vorzugsweise „die Fusspunktencurve der Hyperbel" genannt, mit einer Gleichung vom vierten Grade

$$(x^2+y^2)^2=\alpha^2x^2-\beta^2y^2$$

zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, wobei die Abscissen x auf der Queeraxe der Hyperbel von dem Mittelpunkte derselben an gerechnet werden und wobei α die halbe Queeraxe, β die halbe Nebenaxe der Hyperbel bedeutet *). Setzt man hier $x=u\cos\psi$, $y=u\sin\psi$, so erhält man die Polargleichung

$$u^2=\alpha^2\cos\psi^2-\beta^2\sin\psi^2.$$

---

*) Man kann über die Fusspunktencurven der Kegelschnitte überhaupt eine Abhandlung in Crelle's Journal. Bd. XX. S. 88. von Herrn Rudolf Wolf in Bern nachsehen, worin jedoch, was die Fusspunktencurve der Ellipse anbetrifft, die zur Gleichung

$$u^2=\alpha^2\cos\psi^2+\beta^2\sin\psi^2$$

hinzugefügte Bemerkung (S. 90.): Dies sei „eine durch die Untersuchungen des Herrn Hofrath Gauss schon bekannte Form der Ellipsengleichung", nicht so zu verstehen ist, als wäre die gedachte Fusspunktencurve selbst eine Ellipse.

Für den Fall, dass die Hyperbel **gleichseitig**, also $\beta = \alpha$ ist, nehmen diese Gleichungen die einfachere Form an

$$(x^2+y^2)^2-\alpha^2(x^2-y^2)=0,$$
$$u^2=\alpha^2\cos 2\psi;$$

und die Fusspunktencurve geht, wie hieraus ersichtlich ist, in die **gemeine Lemniscate** über. Nun hat Herr Dr. **Haedenkamp** in dem dritten Theile dieses Archivs. Seite 400. folgende mechanische Construction für die Fusspunktencurve der Hyperbel, also namentlich auch für die Lemniscate, bekannt gemacht. „Denkt man sich zwei gleiche Kreise, deren Mittelpunkte C und C' seien, und bewegt eine gerade Linie gleich der Axe CC' so, dass deren Endpunkte sich in entgegengesetzter Richtung in den Peripherien der beiden Kreise bewegen, so beschreibt die Mitte der Linie CC' die Fusspunktencurve einer Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{r}{4}\cos\psi^2-\left(\frac{d^2-r^2}{4}\right)\sin\psi^2=u^2$$

ist, wobei r den Radius der Kreise, d die Entfernung der Mittelpunkte und u den Radius Vector der Curve vorstellt. Macht man

$$d^2=2r^2,$$

so wird die Curve eine Lemniscate.“

Diese Entdeckung muss in doppelter Hinsicht interessant genannt werden. Denn einerseits macht die Construction der in Untersuchung stehenden Curven auf die hier gelehrte Art weit weniger Mühe, als wenn man einzelne Tangenten an die Hyperbel construiren und die Fusspunkte der zugehörigen, vom Mittelpunkte darauf gefällten Perpendikel bestimmen wollte. Zweitens aber, weil diese Curven alsdann durch einen Punkt (den Halbirungspunkt von d) beschrieben werden, der mit zwei andern, auf gegebenen Curven fortrückenden Punkten, nämlich den Endpunkten von d, fest verbunden ist, so lässt sich die von **Chasles** und **Abel-Transon** ersonnene und vor einiger Zeit von mir erläuterte Methode *) zur geometrischen Construction der Tangente, Normale und des Krümmungshalbmessers sehr bequem anwenden. Allein bei einer genaueren Prüfung fand ich, dass die obige, von **Haedenkamp** aufgestellte Gleichung nicht ganz richtig ist, dass nämlich der Divisor 4 in den beiden Gliedern links vom Gleichheitszeichen beide Male weggestrichen werden muss. Die folgende Rechnung wird diese Behauptung rechtfertigen.

Wenn wir die Abscissen x auf der Axe CC' und zwar vom Halbirungspunkte dieser Axe an zählen, und wenn wir den nächstgelegenen Scheiteln der beiden Kreise C und C' beziehungsweise die Abscissen ξ und $-\xi$ zuschreiben, so hat der Kreis C die Gleichung

$$y^2=2r(x-\xi)-(x-\xi)^2,$$

---

*) S. Theil VII. Heft 1. dieses Archivs.

und dem Kreise um C entspricht die Gleichung

$$y^2 = 2r(-x-\xi) - (-x-\xi)^2$$
$$= -2r(x+\xi) - (x+\xi)^2.$$

Wenn wir daher die sich bewegende Gerade in einer beliegen Stellung fixiren und unter x_2 und y_2 die Coordinaten desjenigen Endpunkts verstehen, welcher auf der Peripherie des Kreises C ruht, und unter x_1, y_1 die Coordinaten ihres andern, auf dem Kreise C' befindlichen Endpunkts, so bestehen die Gleichungen

$$(1) \qquad y_2 = \pm\sqrt{2r(x_2-\xi) - (x_2-\xi)^2},$$
$$(2) \qquad y_1 = \pm\sqrt{-2r(x_1+\xi) - (x_1+\xi)^2}.$$

Es sei nun ferner die constante Länge der sich bewegenden Geraden gleich d, wobei wir grösserer Allgemeinheit wegen noch nicht $d = CC' = 2(\xi+r)$ voraussetzen wollen, so ist jedenfalls

$$(3) \qquad (y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 = d^2.$$

Endlich möge der Halbirungspunkt der sich bewegenden Geraden bei der angenommenen Stellung die Coordinaten x und y haben, so ist

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2}(x_2+x_1),$$
$$(5) \qquad y = \frac{1}{2}(y_2+y_1);$$

und man wird die Gleichung zwischen x und y für die vom Halbirungspunkt beschriebene Curve gewinnen, sobald es gelingt aus diesen fünf Gleichungen (1) bis (5) die vier Grössen x_1, x_2, y_1, y_2 zu eliminiren.

Die Gleichung (4) giebt aber

$$x_2 = 2x - x_1,$$

also

$$x_2 - x_1 = 2(x - x_1),$$

und mit Rücksicht hierauf erhält man aus (3) den Werth

$$y_2 - y_1 = \pm\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2};$$

aber wegen (5) ist

$$y_2 + y_1 = 2y,$$

daher wird

4*

$$y_2 = y \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2},$$

$$y_1 = y \mp \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2}.$$

Stellt man hiermit die Gleichungen (1) und (2) zusammen, so erhellt, dass es nur noch darauf ankommt, aus den beiden Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} y \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2} = \pm\sqrt{2r(2x-x_1-\xi)-(2x-x_1-\xi)^2}, \\ y \mp \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2} = \pm\sqrt{-2r(x_1+\xi)-(x_1+\xi)^2} \end{cases}$$

die partikularisirende Grösse x_1 zu eliminiren.

Quadrirt man aber und addirt, so erhält man

$$y^2 + \frac{1}{4}d^2 - (x-x_1)^2 = 2r(x-x_1-\xi) - x^2 - (x-x_1-\xi)^2,$$

also

$$y^2 + \frac{1}{4}d^2 = 2r(x-x_1-\xi) - x^2 - \xi^2 + 2(x-x_1)\xi,$$

oder

$$(7)\qquad x^2 + y^2 + \frac{1}{4}d^2 - \xi^2 = 2(r+\xi)(x-x_1-\xi),$$

und wenn man die Gleichungen (6), nachdem man sie quadrirt hat, von einander subtrahirt, so ergiebt sich sogleich

$$y\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2} = 2rx - 2x^2 + 2x(x_1+\xi)$$
$$= 2rx - 2x(x-x_1-\xi).$$

Substituirt man nun hier die aus (6) fliessenden Werthe

$$2(x-x_1-\xi) = \frac{x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2-\xi^2}{r+\xi},$$

$$2(x-x_1) = \frac{x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2+2r\xi+\xi^2}{r+\xi};$$

so hat man folgende Gleichung:

$$y\sqrt{[(r+\xi)^2 d^2 - (x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2+2r\xi+\xi^2)^2]}$$
$$= x(2r^2 + 2r\xi - x^2 - y^2 - \frac{1}{4}d^2 + \xi^2),$$

oder

$$(8)\quad \begin{cases} y^2.[(r+\xi)^2 d^2-(x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2+2r\xi+\xi)^2] \\ \qquad = x^2.[2(r+\xi)^2-(x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2+2r\xi+\xi^2)]^2. \end{cases}$$

Sie ist vom sechsten Grade und entspricht dem allgemeinsten Falle.

Sobald aber

$$d = CC' = 2(r+\xi)$$

angenommen wird, so geht (8) über in

$$y^2[\frac{1}{4}d^4-(x^2+y^2+\frac{1}{2}d^2-r^2)^2] = x^2[\frac{1}{2}d^2-(x^2+y^2+\frac{1}{2}d^2-r^2)]^2,$$

und nun kann durch $[\frac{1}{2}d^2-(x^2+y^2+\frac{1}{2}d^2-r^2)]$ auf beiden Seiten dividirt werden, wodurch sich ergiebt:

$$y^2[\frac{1}{2}d^2+(x^2+y^2+\frac{1}{2}d^2-r^2)] = x^2[\frac{1}{2}d^2-(x^2+y^2+\frac{1}{2}d^2-r^2)],$$

d. h.

$$y^2(x^2+y^2+d^2-r^2) = x^2(r^2-x^2-y^2),$$

oder, gehörig geordnet:

$$(9)\qquad (x^2+y^2)^2+(d^2-r^2)y^2-r^2x^2=0.$$

Dies ist die verlangte Gleichung, welche, wie man sieht, der Fusspunktencurve einer Hyperbel angehört und durch die Substitution

$$x = u\cos\psi,\quad y = u\sin\psi$$

sofort in

$$u^2 = r^2\cos\psi^2-(d^2-r^2)\sin\psi^2$$

transformirt wird.

II. Ueber die sogenannte Neoide.

In einer pädagogischen Zeitschrift kam mir neulich ein Artikel zu Gesicht, worin Jemand, um seine Leser an transcendente Curven zu erinnern, beispielsweise den Namen Neoide aufführt.

Dem grössten Theil der Geometer dürfte zwar unter dieser Benennung keine bestimmte Curve bekannt geworden sein, das Verständniss wird aber dadurch möglich gemacht, dass auf Burg's Lehrbuch der Mathematik (Wien. 1832.) Bezug genommen wird, worin sich allerdings (Bd. III. S. 241.) der Beleg findet. Allein Burg muss zur Aufstellung dieser Species einer transcendenten Curve sich haben verleiten lassen durch ganz besondere Umstände, worüber man sich nicht leicht wird eine Muthmaassung bilden können, denn weder vor noch nach Erscheinen jenes Lehrbuchs findet sich von der Neoide bei den Schriftstellern eine Spur, und die so benannte Curve bedarf auch in der That keines besonderen Namens, vielmehr sind schon von dem berühmten Mathematiker des Alterthums, dem Vater der höheren Geometrie, ihre Eigenschaften erforscht und bekannt gemacht, und die Nachkommen haben, um sein Gedächtniss zu ehren, gerade diese Curve nach seinem Namen benannt. Was Herr Professor Burg über die Entstehung seiner Neoide angiebt, läuft nämlich darauf hinaus, dass der Radius eines Kreises, während er sich um den Mittelpunkt dreht, allmählich grösser wird, und zwar in direktem Verhältniss mit dem wachsenden Polarwinkel φ. Stellt also r die ursprüngliche Länge des Radius, entsprechend dem Polarwinkel $\varphi=0$ vor, und entspricht dem Polarwinkel $\varphi=\pi$ die Länge $r+a$, so findet zwischen einem beliebigen φ und dem zugehörigen Radius Vector u die Gleichung Statt

$$u=r+\frac{a\varphi}{\pi},$$

und gerade so steht sie am angeführten Orte. Nun ist aber weiter nichts merkwürdig, als wie man sich durch diese oft gebrauchte Gleichung einer wohlbekannten Curve konnte necken lassen, wie namentlich der gelehrte und umsichtige Professor Burg die wahre Natur derselben einen Augenblick verkennen mochte. Zumal sobald man

$$\varphi=\psi-\frac{\pi r}{a}$$

setzt, verwandelt sich die vorige Gleichung augenblicklich in

$$u=\frac{a\psi}{\pi}=\frac{2a}{2\pi}\cdot\psi,$$

nämlich in die Jedermann geläufige und zehn Seiten vorher (S. 231.) von Herrn Burg selbst aufgestellte Polargleichung der Archimedischen Spirale! Die Neoide ist also nichts anders als eine Archimedische Spirallinie, bei welcher der constante Abstand zweier auf einander folgender Windungen $2a$ beträgt.

III. Ueber die Nabelpunkte auf dem Ellipsoid.

Auf jedem dreiaxigen Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

wobei $a>b>c$ vorausgesetzt werden soll, kann man bekanntlich kreisförmige Schnitte dadurch hervorbringen, dass man die schneidende Ebene durch die mittlere Axe $2b$ unter einem solchen Neigungswinkel ϑ gegen die Ebene XY legt, dass

$$\operatorname{tang}\vartheta=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$$

ist. Die Coordinaten desjenigen auf der Oberfläche des Ellipsoids gelegenen Punkts, in welchem ein solcher Kreis sich mit der durch die Axen $2a$ und $2c$ bestimmten, in der Ebene XZ liegenden Ellipse durchschneidet, sind

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\\ y_1 &= 0,\\ z_1 &= \pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}. \end{aligned}$$

Im Ganzen giebt es natürlich vier solche Punkte, von denen je zwei in einem Durchmesser der Ellipse $(2a, 2c)$ liegen.

Es giebt aber auf dem dreiaxigen Ellipsoid auch vier Punkte, in welchen die Fläche eine sphärische Krümmung besitzt, so dass rings herum alle Normalschnitte gleich grosse Krümmungshalbmesser haben, und diese Punkte, die sogenannten Nabelpunkte (ombilics) liegen ebenfalls auf dem Umfange der Ellipse $(2a, 2c)$. Man weiss, dass die Existenz so wie die Ausmittelung dieser Punkte von der Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} (1+q^2)s-pqt&=0,\\ (1+q^2)r-(1+p^2)t&=0,\\ (1+p^2)s-pqr&=0 \end{aligned}$$

abhängt, von denen die dritte jedesmal eine Folge der beiden andern ist, und wobei in herkömmlicher Weise durch p, q, r, s, t die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}$ vorgestellt werden *). Auf das Ellipsoid

*) Vergl. z. B. Cauchy Applications du Calc. infinités. à la Géometrie. Leç. XIX. p. 354. Leroy Analyt. Geom. §. 397. und §. 429. Moigno Calc. diff. et Calc. intégr. T. I. Leç. XXXIV. p. 372.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bezogen, nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$\frac{(b^2-c^2)\,c^4xy}{a^2b^4z^3}=0,$$

$$\frac{(a^2-b^2)\,c^4}{a^2b^2z^3}\left[\left(\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-1\right]=0,$$

$$\frac{(a^2-c^2)\,c^4xy}{a^4b^2z^3}=0;$$

und man erhält daraus, mit Rücksicht auf die gegebene Gleichung des Ellipsoids, für die Coordinaten eines Nabelpunktes die Werthe:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_2&=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\\ y_2&=0,\\ z_2&=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den bei (1) aufgestellten führt nun zu einem interessanten Lehrsatze. Um diesen aber mit grösserer Leichtigkeit entwickeln zu können, will ich den geneigten Leser ersuchen, sich, wenigstens in Gedanken, folgende einfache Figur zu entwerfen. Eine halbe Ellipse stelle den durch die Coordinatenebene XZ hervorgebrachten elliptischen Hauptschnitt mit den Axen $2a$ und $2c$ vor, ihr Mittelpunkt sei O, und an die Endpunkte der grossen Axe $2a$ seien die Buchstaben A, A', an den Endpunkt der Halbaxe c sei C gesetzt. Nun nehme man auf dem elliptischen Quadranten AC einen Punkt M an, welcher den Scheitel eines kreisförmigen Schnitts vorstellen möge, und fälle das Perpendikel MP auf OA, so dass den Gleichungen (1) zu Folge

$$OP=+x_1=a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

$$MP=\quad z_1=c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

sein soll. Ferner nehme man auf dem elliptischen Quadranten CA' einen Punkt N an, welcher den auf diesem benachbarten Quadranten gelegenen Nabelpunkt vorstellen möge, und fälle das Perpendikel NQ auf OA', so ist den Gleichungen (2) zu Folge

$$OQ=-x_2=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

$$NQ=\quad z_2=c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Es besteht also die Gleichung

$$OP \times MP = OQ \times NQ,$$

oder die Proportion

$$OQ : MP = OP : NQ.$$

Dies sind aber, wie allgemein bekannt ist, die charakteristischen Relationen, welche zwischen den Coordinaten der Endpunkte zweier conjugirter Diameter in der Ellipse Statt finden; wir haben also folgenden Lehrsatz:

Wenn man einerseits den auf dem elliptischen Quadranten $\begin{Bmatrix} AC \\ A'C \end{Bmatrix}$ gelegenen Scheitel eines kreisförmigen Schnitts, andererseits den auf dem benachbarten Quadranten $\begin{Bmatrix} A'C \\ AC \end{Bmatrix}$ gelegenen Nabelpunkt mit dem Mittelpunkte des Ellipsoids verbindet, so ist der eine dieser Semidiameter mit dem andern conjugirt.

Mit Anwendung dieses Satzes würde man, sobald es darauf ankäme, die Formeln (2) für die Coordinaten eines Nabelpunkts möglichst bequem zu reproduciren, und wenn man auch die Formeln (1) erst entwickeln müsste, folgende einfache Rechnung zu machen haben. Da der durch die Axe $2b$ und den Punkt M gehende Schnitt des Ellipsoids ein Kreis sein soll, so muss $OM^2 = b^2$, d. h.

$$x_1^2 + z_1^2 = b^2,$$

aber auch

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

sein. Hieraus erhält man

$$x_1^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{b^2}{c^2} - 1,$$

also

$$x_1 = a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

und

$$z_1^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

also

$$z_1 = c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Nun ist zu Folge der bekannten Eigenschaft conjugirter Diameter und ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Coordinaten

$$x_2 : z_1 = a : c,$$
$$x_1 : z_2 = a : c;$$

folglich

$$x_2 = \frac{a}{c} \cdot z_1 = a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$
$$z_2 = \frac{c}{a} \cdot x_1 = c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}};$$

welches die verlangten Formeln sind

Dem vorher gefundenen Lehrsatze lässt sich jedoch auch noch eine andere Seite abgewinnen. Alle das Ellipsoid schneidende Ebenen, welche nicht durch den Mittelpunkt O gehen, aber parallel zu der durch $2b$ und M gelegten Ebene sind, liefern bekanntlich lauter kreisförmige Schnitte, und da die an die Ellipse ACA' im Punkte N zu construirende Tangente vermöge der Eigenschaft conjugirter Diameter parallel mit OM läuft, so muss offenbar die in N an das Ellipsoid zu legende tangirende Ebene mit den Ebenen der gedachten kreisförmigen Schnitte gleichfalls parallel ausfallen. Deshalb steht ein in N auf diese tangirende Ebene errichtetes Perpendikel senkrecht auf allen diesen kreisförmigen Schnitten, und man kann daher sagen: ein Nabelpunkt auf dem Ellipsoid ist zugleich ein solcher Punkt, dessen Normallinie perpendikulär auf den kreisförmigen Schnitten steht, welcher Satz sich auch umkehren lässt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man für den Krümmungshalbmesser an einem Nabelpunkte des Ellipsoids den einfachen Ausdruck

$$R = \frac{b^3}{ac}$$

findet.

IV.

Bestimmung der grössten, in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse.

Von

Herrn Wilhelm Mösta,

Stud. der Math. zu Marburg.

Im zweiten Theile dieses Archivs. Seite 400., so wie im vierten Bande. Seite 373., sind von Herrn L. Mossbrugger einige Aufgaben, die Lehre vom Maximum und Minimum betreffend, gelöst worden, unter welchen sich auch folgende findet: die grösste Ellipse in ein gegebenes Parallelogramm zu beschreiben. Mit dieser Aufgabe verwandt ist die Bestimmung der grössten, in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse, welche ich auf folgendem Wege versucht habe.

§. 1.

Es sei (Taf. II. Fig. 15.) ABC das gegebene Dreieck, dessen Seiten a, b, c, und die diesen gegenüber liegenden Winkel α, β, γ heissen mögen. Wir wollen die verlangte Ellipse auf rechtwinklige Coordinaten beziehen und nehmen desshalb AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Coordinaten an.

Die Lage der gesuchten Ellipse wird bestimmt sein, wenn die Coordinaten der Berührungspunkte der Ellipse mit den Seiten des Dreiecks und somit auch die des Mittelpunktes O derselben bekannt sind. Die Berührungspunkte seien M, N, Q und ihre Coordinaten beziehungsweise:

$$x_1, y_1=0;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3.$$

Unser nächstes Ziel ist nun, den Inhalt der gesuchten Ellipse, den wir mit Z bezeichnen wollen, auszudrücken durch diese Coordinaten, nämlich

$$Z = f(x_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3)$$

darzustellen.

Verbinden wir den Halbirungspunkt K der Sehne QM mit A, so liegt, wie man leicht einsehen wird, der Mittelpunkt der Ellipse in der Verlängerung dieser Linie AK. Dasselbe gilt von der Linie BS, welche durch den Halbirungspunkt der Sehne MN gezogen worden ist; daher wird sich der Mittelpunkt O der Ellipse als der Durchschnitt dieser beiden Geraden ergeben.

Die Gerade AK geht durch die Punkte

$$\begin{matrix} x = 0 & & x = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \\ & \text{und} & \\ y = 0 & & y = \dfrac{y_3}{2}\,; \end{matrix}$$

daher ist ihre Gleichung

$$y = \frac{y_3}{x_1 + x_3} \,.\, x. \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

Ebenso ergibt sich für die Gerade BS, da sie durch die Punkte

$$\begin{matrix} x = c & & x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ & \text{und} & \\ y = 0 & & y = \dfrac{y_2}{2} \end{matrix}$$

geht, die Gleichung

$$y = \frac{y_2}{x_1 + x_2 - 2c}\,(x - c). \;\ldots\ldots\; (2)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) resultirt für die Coordinaten des Durchschnittspunktes O:

$$\left.\begin{cases} x = \dfrac{c\,y_2(x_1 + x_3)}{y_2(x_1 + x_3) - y_3(x_1 + x_2 - 2c)} \\[2ex] y = \dfrac{c\,y_2 y_3}{y_2(x_1 + x_2) - y_3(x_1 + x_2 - 2c)} \end{cases}\right\} \ldots (3)$$

Ferner finden wir leicht:

$$\left.\begin{cases} AO = \dfrac{c\,y_2}{y_2(x_1 + x_3) - y_3(x_1 + x_2 - 2c)} \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\[1ex] AK = \tfrac{1}{2} \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\[1ex] OK = \left(\dfrac{c\,y_2}{y_2(x_1 + x_3) - y_3(x_1 + x_2 - 2c)} - \tfrac{1}{2}\right) \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\[1ex] MK = \tfrac{1}{2} \sqrt{y_3^2 + (x_1 - x_3)^2} \end{cases}\right\} \ldots (4)$$

Wird nun AO bis E verlängert, so erkennt man auf der Stelle, dass DE ein der Sehne QM zugeordneter Durchmesser ist. Daher erhalten wir, wenn die conjugirten Diameter mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden, folgende Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} MK^2 &= \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2}(\mathfrak{A}^2 - OK^2) \\ AK &= \frac{\mathfrak{A}^2 - OK^2}{OK} \\ AO &= \frac{\mathfrak{A}^2}{OK} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Setzen wir hier für AO und OK die in (4) gefundenen Werthe, so ergibt sich:

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{cy_2(y_3^2 + (x_1+x_3)^2)\,[2cy_2 - y_2(x_1+x_3) + y_3(x_1+x_2-2c)]}{2[y_2(x_1+x_3) - y_3(x_1+x_2-2c)]^2} \ldots (6)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{cy_2(y_3^2 + (x_1-x_3)^2)}{2[y_2(x_1+x_3) - y_3(x_1+x_2-2c)]} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Es ist ferner

$$\operatorname{tang} KAM = \frac{y_3}{x_1+x_3};$$

daher

$$\sin KAM = \frac{y_3}{\sqrt{y_3^2 + (x_1+x_3)^2}}.$$

Aus dem Dreieck AKM folgt weiter:

$$x_1 : MK = \sin AKM : \sin MAK,$$

woraus

$$\sin AKM = \frac{x_1}{MK} \cdot \sin MAK,$$

d. i.

$$\sin AKM = \frac{x_1\,y_3}{\frac{1}{2}\sqrt{y_3^2 + (x_1+x_3)^2}\,\sqrt{y_3^2 + (x_1-x_3)^2}} \ldots\ldots (8)$$

Der Inhalt einer Ellipse wird nun bekanntlich ausgedrückt durch

$$Z = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \pi \cdot \sin AKM,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (6), (7), (8):

$$Z = c \cdot \pi \frac{x_1\,y_2\,y_3}{N} \sqrt{\frac{2cy_2}{N} - 1} \ldots\ldots\ldots (9)$$

wo der Kürze wegen

$$y_2(x_1+x_2)-y_3(x_1+x_2-2c)=N$$

gesetzt ist.

§. 2.

In dieser Formel für Z kommen vor die Grössen: x_1, x_2, y_2, x_3, y_3. Da aber der Inhalt der Ellipse bestimmt wird durch zwei beliebige, jedoch von einander unabhängige von diesen fünf Grössen, weil die Lage und Gestalt einer in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse schon durch zwei Berührungspunkte vollkommen determinirt ist, so kommt es jetzt darauf an, Z als Function von zwei independenten Variabeln, etwa $Z=f(x_1, y_2)$ darzustellen. Hierzu sind drei neue Gleichungen zwischen jenen fünf Grössen erforderlich, welche man, wie folgt, erhält.

Verbinden wir A, B, C mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten N, Q, M der Ellipse, so schneiden sich diese drei Verbindungslinien nach einem bekannten Satze in einem Punkte, und man hat die Relation:

$$AM.QC.BN=AQ.CN.BM,$$

d. i.

$$x_1(b-x_3\sec\alpha)\frac{y_2}{\sin\beta}=x_3\sec\alpha\left(a-\frac{y_2}{\sin\beta}\right)(x-x_1)\ \ldots\ (10)$$

Ausserdem haben wir noch:

$$\left\{\begin{array}{l} y_3=x_3\operatorname{tang}\alpha \\ y_2=(c-x_2)\operatorname{tang}\beta \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (11)$$

Aus (10) ergibt sich:

$$x_3=\frac{b x_1 y_2\cos\alpha}{(2x_1-c)y_2+a(c-x_1)\sin\beta}\ \ldots\ldots\ (12)$$

daher aus (11):

$$y_3=\frac{b x_1 y_2\sin\alpha}{(2x_1-c)y_2+a(c-x_1)\sin\beta}\ \ldots\ldots\ (13)$$

$$x_2=c-y_2\operatorname{cotg}\beta.\ \ldots\ldots\ldots\ (14)$$

Indem wir die Werthe für x_2, x_3, y_3 aus (12), (13), (14) in (9) substituiren, erhalten wir:

$$Z=\tfrac{1}{2}bac\sin\alpha\,\frac{U}{W}(c-x_1)y_2\ \ldots\ldots\ (15)$$

wo $U=bx_1\sin\alpha-x_1y_2$ und $W=x_1y_2+b\sin\alpha(c-x_1)$.

§. 3.

Damit nun dieser Ausdruck ein Maximum werde, müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial Z}{\partial y_2}\right)=0;$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung:

$$\tfrac{1}{3}bc\pi\sin\alpha\left[(c-x_1)y_2\cdot\tfrac{1}{2}\frac{U^{-\frac{1}{2}}}{W^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)-\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{3}{2}}}\cdot y_2-\tfrac{3}{2}\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{5}{2}}}(c-x_1)y_2\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\right]=0,$$

$$\tfrac{1}{3}bc\pi\sin\alpha(c-x_1)\left[\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{3}{2}}}+\tfrac{1}{2}y_2\frac{U^{-\frac{1}{2}}}{W^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)-\tfrac{3}{2}y_2\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)\right]=0;$$

oder einfacher:

$$(c-x_1)\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)-2U-3(c-x_1)\frac{U}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=0,$$
$$2U+y_2\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)-3y_2\frac{U}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)=0.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)=b\sin\alpha-y_2=\frac{U}{x_1}\ \text{und}\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=y_2-b\sin\alpha=-\frac{U}{x_1},$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)=-x_1\qquad\text{und}\ \left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)=x_1.$$

Daher lässt sich die erste der beiden gefundenen Bedingungsgleichungen durch U, die andere durch x_1 dividiren, und man erhält, sobald mit W multiplicirt worden ist, die Gleichungen

$$2x_1y_2-b(c-x_1)\sin\alpha=0,$$
$$2x_1y_2+2b(c-x_1)\sin\alpha=3cy_2.$$

Wird die erste mit 2 multiplicirt und zur andern addirt, so ergibt sich sofort

$$x_1=\frac{c}{2};$$

alsdann ist

$$y_2=\frac{a}{2}\sin\beta=\frac{b}{2}\sin\alpha;$$

daher aus (14): $x_2 = c - \frac{a}{2}\cos\beta,$

„ (13): $y_3 = \frac{b}{2}\sin\alpha,$

„ (12): $x_3 = \frac{b}{2}\cos\beta.$

Wir haben somit das interessante Resultat gefunden, dass die grösste Ellipse, die in ein Dreieck beschrieben werden kann, die Seiten desselben in ihren Mitten berührt, und dass ihr Mittelpunkt in Folge dessen mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammenfällt.

Der Inhalt dieser Ellipse selbst ergibt sich aus (15), indem man für x_1 und y_2 die oben gefundenen Werthe substituirt, als:

$$J = \frac{1}{6\sqrt{3}} bc\pi \sin\alpha.$$

Der Inhalt des Dreiecks ABC ist aber $= \frac{b.c}{2}\sin\alpha$. Daher besteht die Proportion:

$$\text{Dreieck} : \text{Ellipse} = \frac{b.c}{2}\sin\alpha : \frac{1}{6\sqrt{3}} b.c.\pi\sin\alpha$$
$$= 3\sqrt{3} : \pi \text{ *)}.$$

---

*) Ueber die Bestimmung der grössten in ein gegebenes Viereck zu beschreibenden Ellipse, womit die in dem obigen Aufsatze aufgelöste Aufgabe begreiflicherweise nahe zusammenhängt, da ein Viereck in ein Dreieck übergeht, wenn man eine Seite desselben verschwinden lässt, s. m. eine treffliche Abhandlung von Gauss in der monatlichen Correspondenz. Band XXII. S. 112. und Aufsätze von Pfaff, Mollweide und Schumacher ebendas. S. 223., S. 227. und S. 507; auch eine Abhandlung von mir in dem ersten Theile meiner Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Brandenburg. 1838. 4. G.

V.

Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten.

Von
dem Herausgeber.

Zur Uebung der Anfänger in der Rechnung mit imaginären Grössen scheint mir folgende Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten, die ich dem Wesentlichen nach aus den Exercices de Mathématiques par Cauchy. 4me et 41me Livr. p. 79. entlehne, recht zweckmässig zu sein.

Wir wollen zuerst die reine Gleichung des zweiten Grades

1) $$x^2 = a + b\sqrt{-1}$$

auflösen, wo a und b reelle Grössen bezeichnen, und setzen zu dem Ende

2) $$x = p + q\sqrt{-1},$$

wo p und q ebenfalls reelle Grössen bezeichnen. Führen wir diesen Ausdruck von x in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir die Gleichung

3) $$p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1},$$

aus der sich zur Bestimmung der Grössen p und q die beiden folgenden Gleichungen ergeben:

4) $$p^2 - q^2 = a,\ 2pq = b.$$

Wegen der zweiten dieser beiden Gleichungen und der Gleichung 2) hat man

5) $$x = p + \frac{b}{2p}\sqrt{-1}$$

oder

6) $$x = \frac{b}{2q} + q\sqrt{-1}.$$

Quadrirt man aber die beiden Gleichungen 4) und addirt sie dann zu einander, so erhält man

7) $$p^2 + q^2 = \sqrt{a^2+b^2},$$

wo natürlich, weil p^2+q^2 stets eine positive Grösse ist, die Quadratwurzel positiv genommen werden muss. Aus den beiden Gleichungen

$$p^2 - q^2 = a,\quad p^2+q^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

ergiebt sich nun auf der Stelle durch Addition und Subtraction

8) $$p^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad q^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

Also ist

9) $$p = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad q = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und nach 5) und 6) erhält man daher für x die beiden Werthe.

10) $$x = \pm\left\{\frac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\},$$

oder

11) $$x = \pm\left\{\frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\}.$$

Für $b=0$ und ein positives a liefert die Gleichung 10) die beiden folgenden Werthe für x:

12) $$x = \pm a^{\frac{1}{2}}.$$

Für $b=0$ und ein negatives a liefert die Gleichung 11) die beiden folgenden Werthe für x:

13) $$x = \pm(-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Für $a=0$ und ein positives b liefern die Gleichungen 10) und 11) die beiden folgenden Werthe für x:

14) $$x = \pm\left\{\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right\};$$

[illegible]

$$15) \qquad x = \pm \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + \sqrt{-1}).$$

Für $a = 0$ und ein negatives b liefern die Gleichungen 10) und 11) die beiden folgenden Werthe für x:

$$16) \qquad x = \pm \left\{(-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}} - (-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}\right\},$$

der

$$17) \qquad x = \pm (-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}} (1 - \sqrt{-1}).$$

Man hat, um alles dieses richtig zu verstehen, nur stets fest-nhalten, dass nach dem Obigen $\sqrt{a^2 + b^2}$ jederzeit positiv zu ehmen ist.

Die zwei Wurzeln der Gleichung

$$18) \qquad x^2 = \sqrt{-1}$$

ind also nach 14) und 15):

$$19) \qquad x = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1}\right)$$

der

$$20) \qquad x = \pm \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Die zwei Wurzeln der Gleichung

$$21) \qquad x^2 = -\sqrt{-1}$$

ind dagegen nach 16) und 17):

$$22) \qquad x = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1}\right)$$

der

$$23) \qquad x = \pm \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Haben wir nun die Gleichung

$$24) \qquad x^2 + Ax + B = 0$$

ufzulösen, so lässt sich dieselbe bekanntlich auf die Form

$$25) \qquad (x + \frac{A}{2})^2 = \frac{A^2}{4} - B$$

bringen, und nun ganz wie die Gleichung 1) auflösen, welc wir durch das folgende Beispiel erläutern wollen.

Die gegebene Gleichung sei

$$26)\qquad x^2-(5+4\sqrt{-1}).x+6+8\sqrt{-1}=0,$$

so bringt man dieselbe zuerst leicht auf die Form

$$\left\{x-(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1})\right\}^2=(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1})^2-(6+8\sqrt{-1}),$$

d. i. auf die Form

$$\left\{x-(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1})\right\}^2=-\frac{15}{4}+2\sqrt{-1}.$$

Setzt man nun im Obigen $a=-\frac{15}{4}$, $b=2$, so ist nach 1

$$27)\qquad x-(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1})=\pm(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1}),$$

und folglich

$$28)\qquad x=\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}\pm(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1}).$$

Also hat die Gleichung 26) die beiden folgenden Wurzeln:

$$29)\qquad \begin{cases} x=\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}-(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1})=2, \\ x=\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}+(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1})=3+4\sqrt{-1}; \end{cases}$$

von denen die erste reell, die zweite imaginär ist.

Dieses Exempel ist deshalb lehrreich, weil man aus de selben sieht, dass eine quadratische Gleichung mit imaginä Coefficienten eine reelle und eine imaginäre Wurzel haben ka da bekanntlich im Gegentheil die Wurzeln einer quadratisch Gleichung, deren Coefficienten beide reell sind, immer entwed beide reell, oder beide imaginär sind.

Eine ähnliche Ausführung für die cubischen Gleichungen imaginären Coefficienten wird eine gute Uebung für Schüler

VI.

Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch.

Von

Herrn P. Seeling,

Elementarlehrer zu Hückeswagen im Regierungsbezirk Düsseldorf.

---

§. 1.

Vermittelst der Kettenbrüche kann man aus unvollständigen uben die Wurzel ziehen. Dieses soll zuerst an einem Beispiele Zahlen gezeigt und dann auch allgemein dargestellt werden.

Es sei $x=\sqrt[3]{10}$.

Die grösste in $\sqrt[3]{10}$ enthaltene ganze Zahl ist $=2$. Also ist

$$x=2+\frac{\sqrt[3]{10}-2}{1}.$$

r Bruch $\frac{\sqrt[3]{10}-2}{1}$ ist kleiner als 1. Man setze denselben $=\frac{1}{x^I}$; ist

$$x^I=\frac{1}{\sqrt[3]{10}-2},$$

zwar $x^I>1$. Um den Nenner rational zu machen, multiplizire n Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4$ [1]). n erhält derselbe die Form:

$$\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{10-8}=\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{2}.$$

---

1) Weil $(a-b).(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Die grösste in $\sqrt[3]{100}$ steckende ganze Zahl ist 4, und die grösste in $2\sqrt[3]{10}$ steckende ebenfalls 4. Demnach ist die grösste in

$$\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{2}$$

enthaltene ganze Zahl $=6$, und

$$\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{2}$$

ist also

$$=6+\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}-8}{2}.$$

Diesen letzten Bruch setze man $=\frac{1}{x^{II}}$, so ist

$$x^{II}=\frac{2}{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}-8}.$$

Um den Nenner rational zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner dieses Bruches mit

$$(\sqrt[3]{100})^2+(2\sqrt[3]{10})^2+8^2-\sqrt[3]{100}.2\sqrt[3]{10}+8.\sqrt[3]{100}+8.2\sqrt[3]{10}\ ^{2)}$$
$$=12\sqrt[3]{100}+26\sqrt[3]{10}+44.$$

Dann erhält man:

$$x^{II}=\frac{2(12\sqrt[3]{100}+26\sqrt[3]{10}+44)}{100+80-512+480}=\frac{6\sqrt[3]{100}+13\sqrt[3]{10}+22}{37}.$$

Die grösste in diesem Bruche, den man auch so schreiben kann:

$$\frac{\sqrt[3]{21600}+\sqrt[3]{21970}+22}{37},$$

enthaltene ganze Zahl ist

$$\frac{27+28+22}{37}=2.$$

Demnach ist

$$x^{II}=2+\frac{6\sqrt[3]{100}+13\sqrt[3]{10}-52}{37}.$$

---

2) Weil $(a+b-c).(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)=a^3+b^3-c^3+3abc.$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{III}}$, so ist

$$x^{III} = \frac{37}{6\sqrt[3]{100}+13\sqrt[3]{10}-52}.$$

Um den Nenner rational zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner mit $481\sqrt[3]{100}+1036\sqrt[3]{10}+1924$ (siehe Anmerkung 2). Dann erhält der Bruch die Form:

$$\frac{37(481\sqrt[3]{100}+1036\sqrt[3]{10}+1924)}{21600+21970-140608+131680} = \frac{13\sqrt[3]{100}+28\sqrt[3]{10}+52}{18}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl ist

$$\frac{60+60+52}{18} = 9.$$

In dieser Weise kann die Berechnung der Quotienten beliebig weit fortgesetzt werden.

Die Wurzelgrösse $\sqrt[3]{10}$ ist also

$$= 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \text{u. s. w.}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

Kettenbruchsnenner: 2, 6, 2, 9, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{265}{123}$, u. s. w.

§. 2.

Um das Verfahren übersichtlich darzustellen, werde hier noch ein Beispiel aufgelöset.

Es sei:

$$x = \sqrt[3]{19} = 2 + \left(\frac{\sqrt[3]{19}-2}{1} = \frac{1}{x^{I}}\right).$$

$$x^{I} = \frac{1}{\sqrt[3]{19}-2} = \frac{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}+4}{11} = 1 + \left(\frac{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}-7}{11} = \frac{1}{x^{II}}\right).$$

$$x^{II} = \frac{11}{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}-7}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}+1}{8} = 2+\left(\frac{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}-15}{8} = \frac{1}{x^{III}}\right),$$

$$x^{III} = \frac{8}{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}-15}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}+21}{1} = 63+\left(\frac{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}-42}{1} = \frac{1}{x^{IIII}}\right),$$

$$x^{IIII} = \frac{1}{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}-42} = \frac{190\sqrt[3]{361}+507\sqrt[3]{19}+1308}{2843} = 1+ \text{ u. s. w.}$$

Die Näherungswerthe von $\sqrt[3]{19}$ werden demnach sein:

Kettenbruchsnenner: 2, 1, 2, 63, 1, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{507}{190}$, $\frac{515}{193}$, u. s. w.

§. 3.

Obiges Verfahren soll nun allgemein dargestellt werden. Es sei A eine ganze Zahl, aber kein vollständiger Kubus. Ferner sei die grösste in $\sqrt[3]{A}$ enthaltene ganze Zahl $= a$. Dann ist

$$x = \sqrt[3]{A} = a + \frac{\sqrt[3]{A}-a}{1}.$$

Diesen Bruch setze man $= \frac{1}{x^I}$, so ist

$$x^I = \frac{1}{\sqrt[3]{A}-a} = \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2}{A-a^3} \text{ (s. Anm. 1.).}$$

Man setze $A-a^3 = b$, so ist

$$x^I = \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2}{b}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl sei a^I, so ist

$$x^I = a^I + \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2-a^Ib}{b}.$$

oder, wenn man $a^I b - a^2 = c$ setzt,

$$x^I = a^I + \frac{\sqrt[3]{A^2} + a\sqrt[3]{A} - c}{b}.$$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{II}}$, so ist

$$x^{II} = \frac{b}{\sqrt[3]{A^2} + a\sqrt[3]{A} - c} = \frac{b[(a^2+c)\sqrt[3]{A^2} + (A+ac)\sqrt[3]{A} + c^2 - aA]}{A^2 + a^3A - c^3 + 3aAc}.$$

(siehe Anmerkung 2.)

$$= \frac{b^2[a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}b - 2a^2a^I - a]}{b^2[-a^{I3}b + 3a^2a^{I2} + 3aa^I + 1]}$$

$$= \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}b - 2a^2a^I - a}{-a^{I3}b + 3a^2a^{I2} + 3aa^I + 1}$$

$$= \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2}{(aa^I+1)^3 - a^{I3}A}. \quad {}^{3)}$$

Man setze $(aa^I+1)^3 - a^{I3}A = d$, so ist

$$x^{II} = \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2}{d}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl sei a^{II}. Dann ist

$$x^{II} = a^{II} + \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2 - a^{II}d}{d},$$

oder, wenn man $a^{II}d + a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A = e$ setzt,

$$x^{II} = a^{II} + \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} - e}{d}.$$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{III}}$, so ist

---

3) Man wird sich von der Richtigkeit dieser und der folgenden Reductionen überzeugen, wenn man für die Grössen b, c, d, e nach einander ihre Werthe einsetzt.

$$x^{III} = \frac{d}{a^I \sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} - e}$$

$$= \frac{d\{[(aa^I+1)^2 + a^I e]\sqrt[3]{A^2} + [a^{I2}A + e(aa^I+1)]\sqrt[3]{A} + e^2 - a^I(aa^I+1)A\}}{a^{I3}A^2 + (aa^I+1)^3 A - e^3 + 3a^I(aa^I+1)Ae} \quad \text{(s. Anm. 2)}$$

$$= \frac{d^2\{(a^I a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [(aa^I+1)a^{II}+a]\sqrt[3]{A} + a^{II2}d + 2a^{II}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] + a^3a^I + a^2 - a^I A\}}{d^2\{-a^{II3}d - 3a^{II2}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] - 3a^{II}(a^3a^I + a^2 - a^I A) + A - a^3\}}$$

$$= \frac{(a^I a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [(aa^I+1)a^{II}+a]\sqrt[3]{A} + a^{II2}d + 2a^{II}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] + a^3a^I + a^2 - a^I A}{-a^{II3}d - 3a^{II2}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] - 3a^{II}(a^3a^I + a^2 - a^I A) + A - a^3}$$

$$= \frac{(a^I a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [a^{II}(aa^I+1)+a]\sqrt[3]{A} + (aa^I+1).[a^{II}(aa^I+1)+a]^2 - a^I(a^I a^{II}+1)^2 A}{(a^I a^{II}+1)^3 A - [a^{II}(aa^I+1)+a]^3}$$

$$= a^{III} + \text{u. s. w.}$$

Führt man auf diese Weise fort, die vollständigen Quotienten zu entwickeln, so wird man sie im Allgemeinen von der Form

$$x^{(n)} = \frac{Q\sqrt[3]{A^2} + P\sqrt[3]{A} + J}{D}$$

finden.

Die Grösse $\sqrt[3]{A}$ ist demnach gleich dem Kettenbruche:

$$a + \cfrac{1}{a^{I} + \cfrac{1}{a^{II} + \cfrac{1}{a^{III} + \cfrac{1}{a^{IIII} + \text{u. s. w.}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

Kettenbruchsnenner: a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{1}$, $\frac{aa^{I}+1}{a^{I}}$, $\frac{a^{II}(aa^{I}+1)+a}{a^{I}a^{II}+1}$, u. s. w.

§. 4.

Es seien

$$\frac{p}{q^{0}},\ \frac{p}{q},\ \frac{p^{I}}{q^{I}},\ \text{u. s. w.}$$

einige auf einander folgende Näherungswerthe von $\sqrt[3]{A}$. Die zu denselben gehörigen (sie ergänzenden) vollständigen Quotienten seien

$$\frac{Q^{0}\sqrt[3]{A}+P^{0}\sqrt[3]{A}+J^{0}}{D^{0}},\ \frac{Q\sqrt[3]{A^{2}}+P\sqrt[3]{A}+J}{D},\ \frac{Q^{I}\sqrt[3]{A^{2}}+P^{I}\sqrt[3]{A}+J^{I}}{D^{I}},\ \text{u. s. w.}$$

und die hierin steckenden grössten ganzen Zahlen: m^{0}; m, m^{I}, u. s. w. Dann ist

$$p^{I}=mp+p^{0},\ q^{I}=mq+q^{0};\ p^{II}=m^{I}p^{I}+p,\ q^{II}=m^{I}q^{I}+q;\ \text{u. s. w.}$$

Betrachtet man nun genau die Berechnung im vorhergehenden Paragraphen, so wie auch die gefundenen vollständigen Quotienten, und vergleicht man letztere mit den ebendaselbst berechneten Näherungswerthen für $\sqrt[3]{A}$, so findet man Folgendes:

1. Jeder vollständige Quotient lässt sich, nachdem man den Nenner rational gemacht und die nöthigen Reductionen vorgenommen, durch das Quadrat des früheren Zählers aufheben.

2. Es ist allgemein (so weit die Berechnung in §. 3. reicht) $Q=q$, $P=p$; J abwechselnd $=+(p^{0}p^{2}-q^{0}q^{2}A)$ und $-(p^{0}p^{2}-q^{0}q^{2}A)$; und D abwechselnd $=-(p^{3}-q^{3}A)$ und $+(p^{3}-q^{3}A)$; überhaupt

$$x^{(n)}=\frac{Q\sqrt[3]{A^{2}}+P\sqrt[3]{A}+J}{D}=\frac{q\sqrt[3]{A^{2}}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^{0}p^{2}-q^{0}q^{2}A)}{\mp(p^{3}-q^{3}A)},$$

wobei die obern Zeichen für die Näherungsbrüche ungerader

Ordnung, und die untern für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten, wenn man $\frac{a}{1}$ als den ersten Näherungsbruch ansieht.

Die Richtigkeit dieser beiden Sätze in Beziehung auf die 3 ersten vollständigen Quotienten geht aus der Berechnung in §. 3. hervor. Soll also ihre allgemeine Gültigkeit bewiesen werden, so ist nur noch darzuthun, dass, wenn sie für irgend einen beliebigen vollständigen Nenner gelten, dies auch für den nächstfolgenden der Fall ist; mit andern Worten: dass, wenn $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^I}{q^I}$ drei auf einander folgende Näherungswerthe für $\sqrt[3]{A}$ sind, und wenn der zu $\frac{p}{q}$ gehörige vollständige Quotient

$$x^{(n)}=\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)}{\mp(p^3-q^3A)}$$

ist, alsdann der folgende, zu $\frac{p^I}{q^I}$ gehörige, vollständige Quotient

$$x^{(n+1)}=\frac{q^I\sqrt[3]{A^2}+p^I\sqrt[3]{A}\mp(pp^{I2}-qq^{I2}A)}{\pm(p^{I3}-q^{I3}A)}$$

ist. Dies soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

§. 5

$$x^{(n)}=\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)}{\mp(p^3-q^3A)}$$

$$=m+\left(\frac{q\sqrt[3]{A^2}+q\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)\pm m(p^3-q^3A)}{\mp(p^3-q^3A)}=\frac{1}{x^{(n+1)}}\right),$$

$$x^{(n+1)}=\frac{\mp(p^3-q^3A)}{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)\pm m(p^3-q^3A)}.$$

Der Nenner dieses Bruches wird rational gemacht nach der Formel:

$$(a+b\pm c).(a^2+b^2+c^2-ab\mp ac\mp bc)=a^3+b^3\pm c^3\mp 3abc.$$

Man erhält dann:

$$x^{(n+1)}=\frac{\mp(p^3-q^3A)\,.\,\left\{\begin{array}{c}[p^2\mp q(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)]\sqrt[3]{A^2}+[q^2A\mp p(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)]\sqrt[3]{A}\\+(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)^2-pqA\end{array}\right\}}{q^3A^2+p^3A\pm(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)^3\mp3pqA(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)}\;\ldots.\;(Z)$$

Ehe wir zur Reduction dieses Bruches schreiten, bedenken wir, dass im vorliegenden Falle (siehe Egen's Handb. d. allgem. Arithm. Thl. I. §. 269.) $pq^0 - p^0q = \mp 1$. Daraus folgt:

1) $p^3q^0 - p^0p^2q = \mp p^2$

$p^3q^0 - p^0p^2q \pm p^2 = 0$

$p^2 \mp p^0p^2q = \mp p^3q^0$ . . . . ($\mathfrak{A}$)

2) $pq^0q^2A - p^0q^3A = \mp q^2A$

$pq^0q^2A - p^0q^3A \pm q^2A = 0$

$q^2A \pm pq^0q^2A = \pm p^0q^3A$ . . . . ($\mathfrak{B}$)

3) $p^2q^{02} - 2p^0pq^0q + p^{02}q^2 = +1$ . . . . (I)

$-2p^0pq^0q - 1 = -p^2q^{02} - p^{02}q^2$

$-2p^0p^2q^0q^2A - pqA = -p^3q^{02}qA - p^{02}pq^3A$ . . . . . ($\mathfrak{C}$)

4) Aus (I) $2p^0pq^0q + 1 = p^2q^{02} + p^{02}q^2$ (mit $\mp 3mp^4qA$ multiplizirt)

$\mp 6mp^0p^5q^0q^2A \mp 3mp^4qA = \mp 3mp^6q^{02}qA \mp 3mp^{02}p^4q^3A$...($\mathfrak{D}$)

5) $2p^0pq^0q + 1 = p^2q^{02} + p^{02}q^2$ (mit $\pm 3mpq^4A^2$ multiplizirt)

$\pm 6mp^0p^2q^0q^5A^2 \pm 3mpq^4A^2 = \pm 3mp^3q^{02}q^4A^2 \pm 3mp^{02}pq^6A^2$...($\mathfrak{E}$)

6) $p^3q^{03} - 3p^0p^2q^{02}q + 3p^{02}pq^0q^2 - p^{03}q^3 = \mp 1$ . . . . (II)

(I) mit $3p^0q$ multiplizirt, gibt:

$3p^0p^2q^{02}q - 6p^{02}pq^0q^2 + 3p^{03}q^3 = 3p^0q$

$3p^0p^2q^{02}q - 6p^{02}pq^0q^2 + 3p^{03}q^3 - 3p^0q = 0$ ...(III)

(II) + (III) $p^3q^{03} + 2p^{03}q^3 - 3p^{02}pq^0q^2 - 3p^0q = \mp 1$

$3p^{02}pq^0q^2 + 3p^0q \mp 1 = p^3q^{03} + 2p^{03}q^3$ (mit $\mp p^3A$ mult.)

$\mp 3p^{02}p^4q^0q^2A \mp 3p^0p^3qA + p^3A = \mp p^6q^{03}A \mp 2p^{03}p^3q^3A$...($\mathfrak{F}$)

7) (I) mit $3pq^0$ multiplizirt gibt:

$3p^3q^{03} - 6p^0p^2q^{02}q + 3p^{02}pq^0q^2 = 3pq^0$

$3p^3q^{03} - 6p^0p^2q^{02}q + 3p^{02}pq^0q^2 - 3pq^0 = 0$ ...(IV)

(IV) — (II) $2p^3q^{03} + p^{03}q^3 - 3p^0p^2q^{02}q - 3pq^0 = \pm 1$

$3p^0p^2q^{02}q + 3pq^0 \pm 1 = 2p^3q^{03} + p^{03}q^3$ (mit $\pm q^3A^2$ mult.)

$\pm 3p^0p^2q^{02}q^4A^2 \pm 3pq^0q^3A^2 + q^3A^2 = \pm 2p^3q^{03}q^3A^2 \pm p^{03}q^6A^2$...($\mathfrak{G}$)

Man entwickele nun die einzelnen Grössen im Zähler und Nenner des obigen Bruches (Z), indem man jedoch den Faktor $\mp(p^3 - q^3A)$ für sich bestehen lässt. Dann setze man: in den Coefficienten von $\sqrt[3]{A^2}$ statt des 1sten Theils der obigen Gleichung ($\mathfrak{A}$) den 2ten Theil derselben; in den Coefficienten von $\sqrt[3]{A}$ statt des 1sten Theils der Gleichung ($\mathfrak{B}$) den 2ten Theil derselben; in den rationalen Theil des Zählers statt des 1sten Theils der Gleichung ($\mathfrak{C}$) den 2ten Theil derselben, und endlich in den Nenner statt des 1sten Theils der Gleichungen ($\mathfrak{D}$), ($\mathfrak{E}$), ($\mathfrak{F}$) und ($\mathfrak{G}$) den 2ten Theil dieser Gleichungen. So erhält man einen Bruch von folgendem Zähler und Nenner:

$$\text{Zähler: } \mp(p^3-q^3A)\cdot\left\{\begin{array}{l} [\mp p^3q^0\pm q^0q^3A\mp mp^3q\pm mq^4A]\sqrt[3]{A^2} \\ +[\mp p^0p^3\pm p^0q^3A\mp mp^4\pm mpq^3A]\sqrt[3]{A} \\ +p^{02}p^4+q^{02}q^4A^2+m^2p^6+m^2q^6A^2-p^3q^{02}qA-p^{02}pq^3A \\ +2mp^0p^5-2mp^0p^2q^3A-2mp^3q^0q^2A+2mq^0q^5A^2 \\ -2m^2p^3q^3A \end{array}\right\}.$$

$$\text{Nenner: } \left\{\begin{array}{l} \pm m^3p^9\pm 3m^2p^0p^8\pm 3mp^{02}p^7\pm p^{03}p^6\mp 3m^3p^6q^3A\mp 3m^2p^6q^0q^2A \\ \mp 3mp^6q^{02}qA\mp p^6q^{03}A\mp 6m^2p^0p^5q^3A\mp 6mp^{02}p^4q^3A\mp 2p^{03}p^3q^3A \\ \pm 3m^3p^3q^6A^2\pm 6m^2p^3q^0q^5A^2\pm 6mp^3q^{02}q^4A^2\pm 2p^3q^{03}q^3A^2\pm 3m^2p^0p^2q^6A^2 \\ \pm 3mp^{02}pq^6A^2\pm p^{03}q^6A^2\mp m^3q^9A^3\mp 3m^2q^0q^8A^3\mp 3mq^{02}q^7A^3\mp q^{03}q^6A^3 \end{array}\right\}.$$

Dieser Bruch reducirt sich auf:

$$x^{(n+1)} =$$

$$\frac{(p^3-q^3A)^2\left\{\begin{array}{c}(mq+q^0)\sqrt[3]{A^2}+(mp+p^0)\sqrt[3]{A} \\ \mp(m^2p^3+2mp^0p^2+p^{02}p-m^2q^3A-2mq^0q^2A-q^{02}qA)\end{array}\right\}}{(p^3-q^3A)^2.\left\{\begin{array}{c}\pm m^3p^3\pm 3m^2p^0p^2\pm 3mp^{02}p\pm p^{03} \\ \mp m^3q^3A\mp 3m^2q^0q^2A\mp mq^{02}qA\mp q^{03}A\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{(mq+q^0)\sqrt[3]{A^2}+(mp+p^0)\sqrt[3]{A}\mp[p(mp+p^0)^2-q(mq+q^0)^2A]}{\pm[(mp+p^0)^3-(mq+q^0)^3A]}$$

$$=\frac{q^I\sqrt[3]{A^2}+p^I\sqrt[3]{A}\mp(pp^{I2}-qq^{I2}A)}{\pm(p^{I3}-q^{I3}A)}.$$

Und dieses war zu beweisen.

§. 6.

Aus der Berechnung in §. 3. und §. 5. geht unmittelbar hervor, dass D und J immer ganze Zahlen sind. D ist aber auch immer positiv. Denn:

1. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist $D = -(p^3 - q^3 A)$. Alsdann ist aber (da der erste Näherungsbruch $\frac{a}{1}$ zu klein ist) $\frac{p}{q} < \sqrt[3]{A}$; folglich $\frac{p^3}{q^3} < A$, und $p^3 < q^3 A$; also D positiv.

2. Ist hingegen $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist $D = +(p^3 - q^3 A)$. Dann ist auch $\frac{p}{q} > \sqrt[3]{A}$; folglich $\frac{p^3}{q^3} > A$, und $p^3 > q^3 A$; also D wieder positiv.

Anders verhält es sich mit J.

1. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist $\frac{p}{q^0} > \frac{p}{q}$; also $p^0 > \frac{pq^0}{q}$, und $\frac{p^0}{p} > \frac{q^0}{q}$. Dieses, multiplizirt mit $p^3 < q^3 A$ (siehe oben), gibt $p^0 p^2 \gtreqless q^0 q^2 A$.

2. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist $\frac{p^0}{q^0} < \frac{p}{q}$; also $p^0 < \frac{pq^0}{q}$, und $\frac{p^0}{p} < \frac{q^0}{q}$. Dieses, multiplizirt mit $p^3 > q^3 A$, gibt wieder $p^0 p^2 \gtreqless q^0 q^2 A$.

Da nun $J = \pm(p^0 p^2 - q^0 q^2 A)$, so kann J in beiden Fällen positiv, oder $=0$, oder negativ sein [4]).

§. 7.

Der die Grösse $\sqrt[3]{A}$ ausdrückende Kettenbruch ist nie ein periodischer. Denn da $p^I > p$, $p^{II} > p^I$, u. s. w., und $q^I > q$, $q^{II} > q^I$, u. s. w.; so kann nicht derselbe vollständige Quotient zweimal vorkommen. Auch können nicht 2 vollständige Quotienten einander gleich sein, Denn wenn etwa

---

4) In allen Zahlenbeispielen, die ich bisher auflöste, fand ich nur im zweiten vollständigen Quotienten $J=0$, und dieses auch nur dann, wenn A von der Form $(n-1)n^2$. Es gelang mir indessen noch nicht, diesen Satz als allgemein gültig zu erweisen.

$$\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)}{\mp(p^3-q^3A)}=\frac{q_1\sqrt[3]{A^2}+p_1\sqrt[3]{A}\pm(p_1{}^0p_1{}^2-q_1{}^0q_1{}^2A)}{\mp(p_1{}^3-q_1{}^3A)}$$

sein sollte, so müsste letzterer Bruch sich so verkleinern lassen, dass er die Form des ersteren erhielte. Da aber (s. Egen. §. 271.) p_1 und q_1 keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so sind auch q_1 und $p_1{}^3$, und, da $q_1{}^3A$ ein Vielfaches von q_1, auch q_1 und $p_1{}^3-q_1{}^3A$ incommensurabel. Obige 2 Brüche sind demnach nicht auf einerlei Form zu bringen, können also auch nicht einander gleich sein.

Aus diesem Allen folgt, dass nicht eine gewisse Reihe von Kettenbruchsnennern periodisch wiederkehren kann.

§. 8.

Das in §. 1. dargestellte Verfahren wird jetzt bedeutend abgekürzt werden können, wenn man gleichzeitig die Näherungsbrüche entwickelt. Etwa auf folgende Weise:

	Nenner.	Zähler.	
$x = \sqrt[3]{4} = 1 + \frac{1}{x^I}$	0	1	
$x^I = \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{x^{II}}$	1	1	$J = +(1.1^2 - 0.1^2.4) = 1$ $D = -(1^3 - 1^3.4) = 3$
$x^{II} = \frac{\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{4}}{4} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$	1	2	$J = -(1.2^2 - 1.1^2.4) = 0$ $D = +(2^3 - 1^3.4) = 4$
$x^{III} = \frac{2\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 2}{5} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	3	$J = +(2.3^2 - 1.2^2.4) = 2$ $D = -(3^3 - 2^3.4) = 5$
$x^{IV} = \frac{5\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{4} + 8}{12} = 2 + \frac{1}{x^V}$	5	8	$J = -(3.8^2 - 2.5^2\,4) \quad 8$ $D = +(8^3 - 5\ .4) = 12$
$x^V = \frac{12\sqrt[3]{16} + 19\sqrt[3]{4} + 8}{53} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	12	19	$J = +(8.19^2 - 5.12^2.4) = 8$ $D = -(19^3 - 12^3.4) = 53$
$x^{VI} = \frac{17\sqrt[3]{16} + 27\sqrt[3]{4} + 21}{31} = 3 + \frac{1}{x^{VII}}$	17	27	$J = -(19.27^2 - 12.17^2.4) = 21$ $D = +(27^3 - 17^3.4) \quad 31$
$x^{VII} = \frac{63\sqrt[3]{16} + 100\sqrt[3]{4} + 108}{188} = 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	63	100	$J = +(27.100^2 - 17.63^2.4) = 108$ $D = \quad (100^3 - 63\ .4) = 188$
u. s. w.	143	227	$J = -(100.227^2 - 63.143^2.4) = 248$ $D = +(227^3 - 143^3.4) = 255$

Die grösste Schwierigkeit bei dieser Berechnung ist, die in $Q\sqrt[3]{A^2}$ und in $P\sqrt[3]{A}$ enthaltenen grössten ganzen Zahlen zu finden.

Es ist aber, wenn $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, $\sqrt[3]{A} - \frac{p}{q} < \frac{1}{qq^1}$ (Egen. §. 272.); folglich

$$\sqrt[3]{A^2}-\frac{p\sqrt[3]{A}}{q}<\frac{\sqrt[3]{A}}{qq^I},\text{ und } q\sqrt[3]{A^2}-p\sqrt[3]{A}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^I}.$$

Ebenso wird bewiesen, dass

$$p^I\sqrt[3]{A}-q^I\sqrt[3]{A^2}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}},\ q^{II}\sqrt[3]{A^2}-p^{II}\sqrt[3]{A}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{III}},\text{ u. s. w.}$$

Da nun $q^{II}>q^I$, $q^{III}>q^{II}$, u. s. w.; so ist

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^I},\ \frac{\sqrt[3]{A}}{q^{III}}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}},\text{ u. s. w.;}$$

folglich werden die Unterschiede zwischen $Q\sqrt[3]{A^2}$ und $P\sqrt[3]{A}$, abgesehen von den Zeichen, immer kleiner. Dahèr werden die in diesen beiden Grössen enthaltenen grössten ganzen Zahlen gar bald einander gleich sein (in obiger Berechnung z. B. schon bei x^{IV}); wesshalb man dann von da an jedesmal nur eine derselben zu suchen und dieselbe doppelt zu nehmen hat.

§. 9.

Man kann die irrationale Grösse $\sqrt[3]{A}$ noch auf eine andere Weise in einen Kettenbruch verwandeln. Setzt man nämlich $x=\sqrt[3]{A}$; so ist $x^3=A$, und $x^3-A=0$. Vervollständigt man diese Gleichung durch die Glieder $\pm 0.x^2$ und $\pm 0.x$; so kann dieselbe diese 4 Formen erhalten:

$$x^3+0.x^2+0.x-A=0,\ x^3+0.x^2-0.x-A=0,$$
$$x^3-0.x^2+0.x-A=0,\ x^3-0.x^2-0.x-A=0.$$

Die 1ste, 2te und 4te dieser Gleichungen enthalten jede 2 Folgen und eine Abwechselung der Zeichen; die 3te aber 3 Abwechselungen. Dieser Widerspruch deutet auf imaginäre Wurzeln. Demnach hat die Gleichung $x^3-A=0$ (Egen. Thl. II. §. 404. Folg. 2. und 4.) nur eine reelle, und zwar eine positive Wurzel. Sucht man diese (welche im vorliegenden Falle irrational ist) näherungsweise nach der Methode von Lagrange (Egen. §. 458. ff.); so wird dadurch die Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch verwandelt.

Angenommen, die Gleichung:

$$\text{(I)}\quad Ex^3+Fx^2+Gx+H=0$$

habe nur eine reelle, und zwar irrationale Wurzel, und diese sei enthalten zwischen r und $r+1$. Setzt man dann $x=r+\frac{1}{x^I}$ (wo $x^I>1$ sein wird), und ordnet den Werth der Gleichung (I) nach den Potenzen von x^I; so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\text{(II)}\quad E^Ix^{I3}+F^Ix^{I2}+G^Ix^I+H^I=0.$$

Durch wirkliche Berechnung findet man:

$$E^I = Er^3 + Fr^2 + Gr + H,$$
$$F^I = 3Er^2 + 2Fr + G,$$
$$G^I = 3Er + F,$$
$$H^I = E.$$

Der Coefficient E^I drückt den Werth der Gleichung (I), r für x gesetzt, aus. Da nun $r < x$. so wird E^I stets negativ sein. Soll also in der abgeleiteten Gleichung (II) das erste Glied positiv werden, so muss man alle Zeichen derselben in die entgegengesetzten umändern.

§. 10.

Nach dieser Methode soll nun $\sqrt[3]{4}$ in einen Kettenbruch ver wandelt werden. Man hat also die Gleichung:

$$x^3 - 4 = 0.$$

Hier ist $E = 1$, $F = 0$, $G = 0$, $H = -4$, und, da x zwischen 1 und 2 liegt, $r = 1$. Demnach ist (§. 9.) $E^I = -3$, $F^I = 3$, $G^I = 3$, $H^I = 1$. Die abgeleitete Gleichung wird also sein, nachdem man die Zeichen verändert:

$$3x^{I3} - 3x^{I2} - 3x^I - 1 = 0.$$

Durch Tatonniren findet man leicht, dass x^I zwischen 1 und 2 enthalten ist. Sieht man nun diese Gleichung wieder als die erste an und setzt also $E = 3$, $F = -3$, $G = -3$, $H = -1$ und $r = 1$; so erhält man auf dieselbe Weise die zweite abgeleitete Gleichung:

$$4x^{II3} - 6x^{II} - 3 = 0.$$

So fortfahrend gelangt man nach und nach zu folgenden Resultaten:

$$x^3 - 4 = 0 \qquad x = 1 + \frac{1}{x^I}$$

$$3x^{I3} - 3x^{I2} - 3x^I - 1 = 0 \qquad x^I = 1 + \frac{1}{x^{II}}$$

$$4x^{II3} - 6x^{II} - 3 = 0 \qquad x^{II} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$$

$$5x^{III3} - 6x^{III2} - 12x^{III} - 4 = 0 \qquad x^{III} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$$

$$12x^{IV3} - 24x^{IV2} - 24x^{IV} - 5 = 0 \qquad x^{IV} = 2 + \frac{1}{x^V}$$

$$53x^{V3} - 24x^{V2} - 48x^V - 12 = 0 \qquad x^V = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$$

$$31x^{VI3} - 63x^{VI2} - 135x^{VI} - 53 = 0 \qquad x^{VI} = 3 + \frac{1}{x^{VII}}$$

$$188x^{VII3} - 324x^{VII2} - 216x^{VII} - 31 = 0 \qquad x^{VII} = 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$$

u. s. w.

Es ist also

$$\sqrt[3]{4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \text{u. s. w.}}}}}}}}$$

Dasselbe Resultat wurde schon in §. 8. auf andere Weise gefunden.

§. 11.

Es sei allgemein $x = \sqrt[3]{A}$, also $x^3 - A = 0$. Ferner sei x zwischen a und $a+1$ enthalten. Dann ist $E=1$, $F=0$, $G=0$, $H=-A$, und $r=a$; folglich (§. 9.) $E^I = a^3 - A$, $F^I = 3a^2$, $G^I = 3a$, $H^I = 1$. Demnach ist die erste abgeleitete Gleichung, nachdem die Zeichen geändert worden:

$$(A - a^3)\,x^{I3} - 3a^2 x^{I2} - 3ax^I - 1 = 0.$$

Angenommen, x^I sei enthalten zwischen a^I und $a^I + 1$. Man betrachte ferner die Gleichung in x^I wieder als die erste, und setze also $E = A - a^3$, $F = -3a^2$, $G = -3a$, $H = -1$, und $r = a^I$. Dann erhält man ebenso die zweite abgeleitete Gleichung:

$$[1 + 3aa^I + 3a^2a^{I2} - (A - a^3)\,a^{I3}]\,x^{II3} - [3(A - a^3)\,a^{I2} - 6a^2a^I - 3a]\,x^{II2}$$
$$- [3(A - a^3)\,a^I - 3a^2]\,x^{II} - (A - a^3) = 0.$$

Diese reducirt sich auf folgende:

$$[(aa^I + 1)^3 - a^{I3}A]\,x^{II3} - 3\,[a^{I2}A - a(aa^I + 1)^2]\,x^{II2}$$
$$- 3[a^I(A - a^3) - a^2]\,x^{II} - (A - a^3) = 0.$$

Diese Gleichung kann man abermals als die erste ansehen, indem man annimmt, dass x^{II} zwischen a^{II} und $a^{II} + 1$ liege,

u. s. w. Dadurch wird die Grösse $\sqrt[3]{A}$ sich verwandeln in den Kettenbruch:

$$a + \cfrac{1}{a^I + \cfrac{1}{a^{II} + \text{u. s. w.}}}$$

§. 12.

Vergleicht man die in §. 10. gefundenen abgeleiteten Gleichungen der Reihe nach mit den vollständigen Quotienten in §. 8., so wie die abgeleiteten Gleichungen in §. 11. mit den vollständigen Quotienten in §. 3.; so findet man (die in §. 4. und §. 9. angenommene Bezeichnungsweise beibehalten) Folgendes:

$$E = D,\ F = -3J,\ G = -3(m^0 D^0 - J^0),\ H = -D^0.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Sätze für die 2 ersten vollständigen Quotienten und die 2 ersten abgeleiteten Gleichungen geht aus §. 3. und §. 11. unmittelbar hervor. Soll nun bewiesen werden, dass sie für alle Quotienten und Gleichungen allgemein gültig sind, so ist nur noch darzuthun, dass, wenn sie für irgend einen vollständigen Quotienten und die mit demselben correspondirende Gleichung gelten, dies auch bei dem nächstfolgenden Quotienten und der nächstfolgenden Gleichung der Fall sei. Mit andern Worten: Sind

$$\frac{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} + J}{D} \text{ und } \frac{q^I\sqrt[3]{A^2} + p^I\sqrt[3]{A} + J^I}{D^I}$$

zwei zunächst auf einander folgende vollständige Quotienten, und m und m^I die in denselben enthaltenen grössten ganzen Zahlen; sind ferner

$$Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0 \text{ und } E^I x^{I3} + F^I x^{I2} + G^I x^I + H^I = 0$$

die diesen Quotienten entsprechenden abgeleiteten Gleichungen; ist endlich

$$E = D,\ F = -3J,\ G = -3(m^0 D^0 - J^0),\ H = -D^0;$$

so muss bewiesen werden, dass auch

$$E^I = D^I,\ F^I = -3J^I,\ G^I = -3(mD - J),\ H^I = -D$$

sei.

Nach §. 5. ist:

$$D = \mp(p^3 - q^3 A), \text{ und } D^I = \pm(p^{I3} - q^{I3}A);$$
$$-3J = \mp 3(p^0 p^2 - q^0 q^2 A), \text{ und } -3J^I = \pm 3(pp^{I2} - qq^{I2}A);$$

$$-3(m^0D^0-J^0)=\mp 3m^0(p^{03}-q^{03}A)\mp 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A),$$ und
$$-3(mD-J)=\pm 3m(p^3-q^3A)\pm 3(p^0p^2-q^0q^2A);$$
$$-D^0=\mp(p^{03}-q^{03}A),$$ und $$-D=\pm(p^3-q^3A).$$

Nach unserer obigen Annahme ist also auch:

$$C=\mp(p^3-q^3A),\ F=\mp 3(p^0p^2-q^0q^2A),$$
$$G=\mp 3m^0(p^{03}-q^{03}A)\mp 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A),\ H=\mp(p^{03}-q^{03}A).$$

Hieraus folgt nun nach §. 9. (da die Grösse r daselbst im vorliegenden Falle $=m$ ist):

$$\left.\begin{aligned} E^I &= \pm m^3(p^3-q^3A)\pm 3m^2(p^0p^2-q^0q^2A)\pm 3m^0m(p^{03}-q^{03}A) \\ &\quad \pm 3m(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)\pm(p^{03}-q^{03}A)\ ^{5)} \\ &= \pm(m^3p^3+3m^2p^0p^2+3m^0mp^{03}+3mp^{00}p^{02}+p^{03}) \\ &\quad \mp(m^3q^3+3m^2q^0q^2+3m^0mq^{03}+3mq^{00}q^{02}+q^{03})A \end{aligned}\right\}\ ..(\alpha)$$

Diese letztere Gleichung lässt sich reduciren. Denn es ist:

$m^0p^0+p^{00}=p$, und $m^0q^0+q^{00}=q$
(mit $3mp^{02}$ multiplizirt) (mit $3mq^{02}$ multiplizirt)
$3m^0mp^{03}+3mp^{00}p^{02}=3mp^{02}p$ $3m^0mq^{03}+3mq^{00}q^{02}=3mq^{02}q$.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (α) in folgende.

$$\begin{aligned} E^I &= \pm(m^3p^3+3m^2p^0p^2+3mp^{02}p+p^{03}) \\ &\quad \mp(m^3q^3+3m^2q^0q^2+3mq^{02}q+q^{03})A, \\ E^I &= \pm(mp+p^0)^3\mp(mq+q^0)^3A, \\ E^I &= \pm p^{I3}\mp q^{I3}A, \\ E^I &= \pm(p^{I3}-q^{I3}A), \\ E^I &= D^I. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} F^I &= \pm 3m^2(p^3-q^3A)\pm 6m(p^0p^2-q^0q^2A) \\ &\quad \pm 3m^0(p^{03}-q^{03}A)\pm 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A) \\ &= \pm 3(m^2p^3+2mp^0p^2+m^0p^{03}+p^{00}p^{02}) \\ &\quad \mp 3(m^2q^3+2mq^0q^2+m^0q^{03}+q^{00}q^{02})A \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (\beta)$$

Es ist wieder:

$mp^0+p^{00}=p$, und $m^0q^0+q^{00}=q$
(mit p^{02} multiplizirt) (mit q^{02} multiplizirt)
$m^0p^{03}+p^{00}p^{02}=p^{02}p$, $m^0q^{03}+q^{00}q^{02}=q^{02}q$.

---

5) Man vergesse hier nicht, dass, um das 1ste Glied der neu abgeleiteten Gleichung positiv zu machen, alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt werden müssen!

Hiedurch reducirt sich die Gleichung (β) auf folgende:

$$F^I = \pm 3(m^2p^3 + 2mp^0p^2 + p^{02}p) \mp 3(m^2q^3 + 2mq^0q^2 + q^{02}q)A,$$
$$F^I = \pm 3p(mp + p^0)^2 \mp 3q(mq + q^0)^2A,$$
$$F^I = \pm 3(pp^{I2} - qq^{I2}A),$$
$$F^I = -3J^I.$$

III. $G^I = \pm 3m(p^3 - q^3A) \pm 3(p^0p^2 - q^0q^2A),$
$G^I = -3(mD - J).$

IV. $H^I = \pm (p^3 - q^3A),$
$H^I = -D.$

VII.

Ueber gewisse bei einer besonderen Klasse astronomischer Aufgaben häufig in Anwendung kommende Gleichungen.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Zuerst will ich die bekannten Grundformeln der sphärischen Astronomie bloss mit Hülfe der Principien der analytischen Geometrie entwickeln, und werde mich dabei, so wie überhaupt in diesem Aufsatze, der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Polhöhe . . . . φ
Höhe eines Gestirns . . . . h
Zenithdistanz . . . . z
Azimuth . . . . ω

Stundenwinkel . . . . σ
Declination . . . . δ
Polardistanz . . . . p
Rectascension . . . . α

Alle diese Elemente werden auf die aus der Astronomie allgemein bekannte Weise genommen. Nur rücksichtlich des Azimuths mag bemerkt werden, dass dasselbe im Folgenden immer von Süden durch Westen hindurch, d. i. im Sinne der täglichen Bewegung der Sphäre, von 0 bis 360° gezählt werden soll.

Um nun die zwischen den genannten Elementen Statt findenden Relationen in völliger Allgemeinheit zu entwickeln, nehmen wir den Mittelpunkt der Sphäre als den Anfang zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme der xyz und $x'y'z'$ an. Die Ebene der xy soll die Ebene des Horizonts, und die positiven Theile der Axen der x und y sollen vom Mittelpunkte der Sphäre an respective nach Süden und nach Westen, der positive Theil der Axe der z aber soll von dem Mittelpunkte der Sphäre an nach dem Zenith gerichtet sein. Die Ebene der $x'y'$ soll die Ebene des Aequators sein, der positive Theil der Axe der x' sei die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der Ebene der südlichen Hälfte des Meridians *), der positive Theil der Axe der y' soll vom Mittelpunkte der Sphäre nach Westen, der positive Theil der Axe der z' vom Mittelpunkte der Sphäre nach dem Nordpole gerichtet sein. Dies vorausgesetzt, ist offenbar, wenn die Coordinaten x, y, z und x', y', z' sich auf denselben Stern in demselben Zeitmomente beziehen, und der Halbmesser der Sphäre immer der Längeneinheit gleich gesetzt wird, in völliger Allgemeinheit:

$$1)\quad \begin{cases} x = \cos\omega\cos h, \\ y = \sin\omega\cos h, \\ z = \sin h \end{cases}$$

und

$$2)\quad \begin{cases} x' = \cos\sigma\cos\delta, \\ y' = \sin\sigma\cos\delta, \\ z' = \sin\delta. \end{cases}$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man aber offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos(90^\circ-\varphi) - z'\sin(90^\circ-\varphi), \\ y &= y', \\ z &= x'\sin(90^\circ-\varphi) + z'\cos(90^\circ-\varphi) \end{aligned}$$

*) Der Meridian wird durch die Weltaxe in zwei Hälften getheilt, von denen die, in welcher Süden liegt, die südliche, die, in welcher Norden liegt, die nördliche Hälfte des Meridians genannt wird.

oder

$$3)\quad \begin{cases} x = x' \sin\varphi - z' \cos\varphi, \\ y = y', \\ z = x' \cos\varphi + z' \sin\varphi; \end{cases}$$

aus denen sehr leicht auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination mit Hülfe einer bekannten goniometrischen Gleichung umgekehrt

$$4)\quad \begin{cases} x' = \quad x \sin\varphi + z \cos\varphi, \\ y' = \quad y, \\ z' = -x \cos\varphi + z \sin\varphi \end{cases}$$

erhalten wird.

Führt man nun in diese beiden Systeme von Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z und x', y', z' die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke dieser Coordinaten ein, so ergeben sich sogleich die beiden folgenden wichtigen Systeme von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} \cos\omega \cos h = \cos\sigma \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi, \\ \sin\omega \cos h = \sin\sigma \cos\delta, \\ \quad \sin h = \cos\sigma \cos\delta \cos\varphi + \sin\delta \sin\varphi \end{cases}$$

und

$$6)\quad \begin{cases} \cos\sigma \cos\delta = \quad \cos\omega \cos h \sin\varphi + \sin h \cos\varphi, \\ \sin\sigma \cos\delta = \quad \sin\omega \cos h, \\ \quad \sin\delta = -\cos\omega \cos h \cos\varphi + \sin h \sin\varphi. \end{cases}$$

Dividirt man die erste Gleichung des ersten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot\omega = \frac{\cos\sigma \sin\varphi - \operatorname{tang}\delta \cos\varphi}{\sin\sigma},$$

und hieraus

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega}{\cos\varphi}.$$

Dividirt man auf ähnliche Art die erste Gleichung des zweiten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot\sigma = \frac{\cos\omega \sin\varphi + \operatorname{tang} h \cos\varphi}{\sin\omega},$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} h = \frac{\cot\sigma \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Also hat man noch die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \tang\delta\cos\varphi}{\sin\sigma}, \\[2ex] \tang h = \dfrac{\cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi}{\cos\varphi} \end{cases}$$

und

$$8)\quad \begin{cases} \cot\sigma = \dfrac{\cos\omega\sin\varphi + \tang h\cos\varphi}{\sin\omega}, \\[2ex] \tang\delta = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Führt man in die vorhergehenden vier Systeme statt der Höhe und Declination die Zenithdistanz und Polardistanz ein, so werden dieselben:

$$5^*)\quad \begin{cases} \cos\omega\sin z = \cos\sigma\sin p\sin\varphi - \cos p\cos\varphi, \\ \sin\omega\sin z = \sin\sigma\sin p, \\ \qquad \cos z = \cos\sigma\sin p\cos\varphi + \cos p\sin\varphi; \end{cases}$$

$$6^*)\quad \begin{cases} \cos\sigma\sin p = \cos\omega\sin z\sin\varphi + \cos z\cos\varphi, \\ \sin\sigma\sin p = \sin\omega\sin z, \\ \qquad \cos p = -\cos\omega\sin z\cos\varphi + \cos z\sin\varphi; \end{cases}$$

$$7^*)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \cot p\cos\varphi}{\sin\sigma}, \\[2ex] \cot z = \dfrac{\cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

$$8^*)\quad \begin{cases} \cot\sigma = \dfrac{\cos\omega\sin\varphi + \cot z\cos\varphi}{\sin\omega}, \\[2ex] \cot p = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Diese Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie scheint mir viel einfacher und der Sache angemessener, als die gewöhnliche Entwickelung derselben mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie.

§. 2.

Es giebt nun eine gewisse, vorzüglich zuerst von Gauss hervorgehobene Klasse interessanter astronomischer Aufgaben, bei denen vorausgesetzt wird, dass drei Sterne unter solchen Umständen beobachtet worden sind, dass gewisse gleichnamige Elemente

derselben einander gleich sind, indem man diese Sterne z. B. in gleichen Höhen, oder in gleichen Azimuthen, oder bei gleichen Stundenwinkeln, u. s. w. beobachtet. Eine vollständige Behandlung aller möglichen Aufgaben dieser Art ist nicht ohne Interesse, würde jedoch im Archive einen zu grossen Raum für sich in Anspruch nehmen, wenn sie mit der erforderlichen Ausführlichkeit gegeben werden sollte. Diesen Aufgaben liegen aber, wenn man sie unter allgemeine Gesichtspunkte fasst, hauptsächlich gewisse Relationen zum Grunde, welche ich, weil dieselben auch an sich interessant sind, im folgenden Paragraphen im Zusammenhange entwickeln, und von denselben vielleicht späterhin weitere Anwendungen machen werde.

§. 3.

I. Zuerst wollen wir, die Polhöhe wie früher auch jetzt immer durch φ bezeichnend, annehmen, dass den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ''; oder den Azimuthen ω, ω', ω'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne die gleichen Höhen h, h, h dieser Sterne entsprechen.

Dann haben wir zuvörderst nach 6) die drei Gleichungen:

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi,$$
$$\sin\delta' = \sin h \sin\varphi - \cos\omega' \cos h \cos\varphi,$$
$$\sin\delta'' = \sin h \sin\varphi - \cos\omega'' \cos h \cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\omega' - \cos\omega'',\quad \cos\omega'' - \cos\omega,\quad \cos\omega - \cos\omega',$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil

$$(\cos\omega' - \cos\omega'') + (\cos\omega'' - \cos\omega) + (\cos\omega - \cos\omega') = 0,$$
$$\cos\omega(\cos\omega' - \cos\omega'') + \cos\omega'(\cos\omega'' - \cos\omega) + \cos\omega''(\cos\omega - \cos\omega') = 0$$

ist, die folgende, h und φ gar nicht mehr enthaltende Relation zwischen den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω'':

$$9)\qquad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\ (\cos\omega' - \cos\omega'') \\ +\sin\delta'\ (\cos\omega'' - \cos\omega) \\ +\sin\delta''\ (\cos\omega - \cos\omega') \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$10)\qquad \left.\begin{array}{l} \cos\omega\ (\sin\delta' - \sin\delta'') \\ +\cos\omega'\ (\sin\delta'' - \sin\delta) \\ +\cos\omega''\ (\sin\delta - \sin\delta') \end{array}\right\} = 0.$$

oder

$$11)\quad \left.\begin{aligned} &\sin\delta\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega'')\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega'')\\ +&\sin\delta'\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega''+\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega)\\ +&\sin\delta''\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$12)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\omega\ \cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta'')\\ +&\cos\omega'\ \cos\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta)\\ +&\cos\omega''\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\end{aligned}\right\}=0.$$

Ferner hat man nach 5) die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin\delta\ \sin\varphi+\cos\sigma\ \cos\delta\ \cos\varphi,\\ \sin h &= \sin\delta'\sin\varphi+\cos\sigma'\cos\delta'\cos\varphi,\\ \sin h &= \sin\delta''\sin\varphi+\cos\sigma''\cos\delta''\cos\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin\delta'-\sin\delta'',\ \sin\delta''-\sin\delta,\ \sin\delta-\sin\delta',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$13)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\sigma\ \cos\delta\ (\sin\delta'-\sin\delta'')\\ +&\cos\sigma'\cos\delta'(\sin\delta''-\sin\delta)\\ +&\cos\sigma''\cos\delta''(\sin\delta-\sin\delta')\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$14)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\sigma\ \cos\delta\ \cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta'')\\ +&\cos\sigma'\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta)\\ +&\cos\sigma''\cos\delta''\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\end{aligned}\right\}=0.$$

Endlich hat man nach 7) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\ \text{tang}\,h &= \cot\sigma\ \sin\omega\ -\cos\omega\ \sin\varphi,\\ \cos\varphi\ \text{tang}\,h &= \cot\sigma'\sin\omega'-\cos\omega'\sin\varphi,\\ \cos\varphi\ \text{tang}\,h &= \cot\sigma''\sin\omega''-\cos\omega''\sin\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\omega'-\cos\omega'',\ \cos\omega''-\cos\omega,\ \cos\omega-\cos\omega',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$15)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\sigma\ \sin\omega\ (\cos\omega'-\cos\omega'')\\ +&\cot\sigma'\sin\omega'(\cos\omega''-\cos\omega)\\ +&\cot\sigma''\sin\omega''(\cos\omega-\cos\omega')\end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$16)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\sigma\ \sin\omega\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega'')\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega'')\\ +&\cot\sigma'\ \sin\omega'\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega''+\omega)\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega)\\ +&\cot\sigma''\ \sin\omega''\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') \end{aligned}\right\} = 0.$$

II. Ferner wollen wir annehmen, dass den Declinationen δ, δ', δ'' und den Höhen h, h', h''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Höhen h, h', h'' und den Azimuthen ω, ω', ω'' dreier Sterner die gleichen Stundenwinkel σ, σ, σ entsprechen.

Dann haben wir zuvörderst nach 5) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta\ \sin\varphi + \cos\sigma\cos\delta\ \cos\varphi,\\ \sin h' &= \sin\delta'\ \sin\varphi + \cos\sigma\ \cos\delta'\ \cos\varphi,\\ \sin h'' &= \sin\delta''\sin\varphi + \cos\sigma\ \cos\delta''\cos\varphi. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\delta'-\delta''),\ \sin(\delta''-\delta),\ \sin(\delta-\delta')$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\sin\delta\ \sin(\delta'-\delta'') + \sin\delta'\ \sin(\delta''-\delta) + \sin\delta''\ \sin(\delta-\delta') = 0,$$
$$\cos\delta\sin(\delta'-\delta'') + \cos\delta'\ \sin(\delta''-\delta) + \cos\delta''\sin(\delta-\delta') = 0$$

ist, die Gleichung

$$17)\quad \sin h\sin(\delta'-\delta'') + \sin h'\ \sin(\delta''-\delta) + \sin h''\sin(\delta-\delta') = 0.$$

Ferner hat man nach 8) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\varphi\ \mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma\ \sin\varphi - \sin\sigma\ \cot\omega,\\ \cos\varphi\ \mathrm{tang}\,\delta' &= \cos\sigma\ \sin\varphi - \sin\sigma\ \cot\omega',\\ \cos\varphi\ \mathrm{tang}\,\delta'' &= \cos\sigma\ \sin\varphi - \sin\sigma\ \cot\omega''. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\mathrm{tang}\,\delta' - \mathrm{tang}\,\delta'',\ \mathrm{tang}\,\delta'' - \mathrm{tang}\,\delta,\ \mathrm{tang}\,\delta - \mathrm{tang}\,\delta'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$18)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega\ (\mathrm{tang}\,\delta' - \mathrm{tang}\,\delta'')\\ +&\cot\omega'\ (\mathrm{tang}\,\delta'' - \mathrm{tang}\,\delta)\\ +&\cot\omega''(\mathrm{tang}\,\delta - \mathrm{tang}\,\delta') \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$19)\quad \left.\begin{aligned} &\mathrm{tang}\,\delta\ (\cot\omega' - \cot\omega'')\\ +&\mathrm{tang}\,\delta'\ (\cot\omega'' - \cot\omega)\\ +&\mathrm{tang}\,\delta''\ (\cot\omega - \cot\omega') \end{aligned}\right\} = 0,$$

er

$$20)\qquad \left.\begin{array}{r} \cot\omega\,\dfrac{\sin(\delta'-\delta'')}{\cos\delta'\,\cos\delta''}\\ +\cot\omega'\,\dfrac{\sin(\delta''-\delta)}{\cos\delta''\,\cos\delta}\\ +\cot\omega''\,\dfrac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\,\cos\delta'}\end{array}\right\}=0,$$

er

$$21)\qquad \left.\begin{array}{r} \cot\omega\,\cos\delta\,\sin(\delta'-\delta'')\\ +\cot\omega'\cos\delta'\sin(\delta''-\delta)\\ +\cot\omega''\cos\delta''\sin(\delta-\delta')\end{array}\right\}=0.$$

ler

$$22)\qquad \left.\begin{array}{r} \tan\delta\,\dfrac{\sin(\omega'-\omega'')}{\sin\omega'\,\sin\omega''}\\ +\tan\delta'\,\dfrac{\sin(\omega''-\omega)}{\sin\omega''\,\sin\omega}\\ +\tan\delta''\,\dfrac{\sin(\omega-\omega')}{\sin\omega\,\sin\omega'}\end{array}\right\}=0,$$

der

$$23)\qquad \left.\begin{array}{r} \tan\delta\,\sin\omega\,\sin(\omega'-\omega'')\\ +\tan\delta'\,\sin\omega'\,\sin(\omega''-\omega)\\ +\tan\delta''\sin\omega''\sin(\omega-\omega')\end{array}\right\}=0.$$

Endlich ist nach 7)

$$\begin{array}{l} \cos\varphi\,\tan h\ =\cot\sigma\,\sin\omega\ -\cos\omega\,\sin\varphi,\\ \cos\varphi\,\tan h'=\cot\sigma\,\sin\omega'-\cos\omega'\,\sin\varphi,\\ \cos\varphi\,\tan h''=\cot\sigma\,\sin\omega''-\cos\omega''\,\sin\varphi.\end{array}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\omega'-\omega''),\ \sin(\omega''-\omega),\ \sin(\omega-\omega')$$

nd addirt sie dann zu einander, so erhält man die folgende leichung:

$$24)\qquad \left.\begin{array}{r} \tan h\,\sin(\omega'-\omega'')\\ +\tan h'\,\sin(\omega''-\omega)\\ +\tan h''\,\sin(\omega-\omega')\end{array}\right\}=0.$$

III. Den Declinationen δ, δ', δ'' und den Höhen h, h', h'';
: den Declinationen δ, δ', δ'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'';

oder den Höhen h, h', h'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne mögen jetzt die gleichen Azimuthe ω, ω, ω entsprechen.

Dann ist zuvörderst nach 6):

$$\begin{aligned}
\sin\delta &= \sin h \ \sin\varphi - \cos\omega \cos h \ \cos\varphi,\\
\sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi,\\
\sin\delta'' &= \sin h'' \sin\varphi - \cos\omega \cos h'' \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'-h''),\ \sin(h''-h),\ \sin(h-h')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$25)\quad \sin\delta \sin(h'-h'') + \sin\delta' \sin(h''-h) + \sin\delta'' \sin(h-h') = 0.$$

Ferner ist nach 8):

$$\begin{aligned}
\cos\varphi \tang\delta &= \cos\sigma \ \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega,\\
\cos\varphi \tang\delta' &= \cos\sigma' \sin\varphi - \sin\sigma' \cot\omega,\\
\cos\varphi \tang\delta'' &= \cos\sigma'' \sin\varphi - \sin\sigma'' \cot\omega.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\sigma'-\sigma''),\ \sin(\sigma''-\sigma),\ \sin(\sigma-\sigma')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung.

$$26)\quad \left.\begin{aligned}
&\tang\delta \ \sin(\sigma'-\sigma'')\\
+&\tang\delta' \sin(\sigma''-\sigma)\\
+&\tang\delta'' \sin(\sigma-\sigma')
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Endlich ist nach 7):

$$\begin{aligned}
\cos\varphi \tang h &= \cot\sigma \ \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi,\\
\cos\varphi \tang h' &= \cot\sigma' \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi,\\
\cos\varphi \tang h'' &= \cot\sigma'' \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cot\sigma' - \cot\sigma'',\ \cot\sigma'' - \cot\sigma,\ \cot\sigma - \cot\sigma',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$27)\quad \left.\begin{aligned}
&\tang h \ (\cot\sigma' - \cot\sigma'')\\
+&\tang h' (\cot\sigma'' - \cot\sigma)\\
+&\tang h'' (\cot\sigma - \cot\sigma')
\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

$$28)\quad \left.\begin{array}{r}\cot\sigma\ (\tan h'-\tan h'')\\ +\cot\sigma'\ (\tan h''-\tan h)\\ +\cot\sigma''\ (\tan h-\tan h')\end{array}\right\}=0,$$

oder

$$29)\quad \left.\begin{array}{r}\tan h\,\dfrac{\sin(\sigma'-\sigma'')}{\sin\sigma'\sin\sigma''}\\ +\tan h'\,\dfrac{\sin(\sigma''-\sigma)}{\sin\sigma''\sin\sigma}\\ +\tan h''\,\dfrac{\sin(\sigma-\sigma')}{\sin\sigma\sin\sigma'}\end{array}\right\}=0$$

oder

$$30)\quad \left.\begin{array}{r}\tan h\ \sin\sigma\ \sin(\sigma'-\sigma'')\\ +\tan h'\ \sin\sigma'\ \sin(\sigma''-\sigma)\\ +\tan h''\ \sin\sigma''\sin(\sigma-\sigma')\end{array}\right\}=0,$$

oder

$$31)\quad \left.\begin{array}{r}\cot\sigma\,\dfrac{\sin(h'-h'')}{\cos h'\cos h''}\\ +\cot\sigma'\,\dfrac{\sin(h''-h)}{\cos h''\cos h}\\ +\cot\sigma''\,\dfrac{\sin(h-h')}{\cos h\cos h'}\end{array}\right\}=0$$

oder

$$32)\quad \left.\begin{array}{r}\cot\sigma\ \cos h\ \sin(h'-h'')\\ +\cot\sigma'\ \cos h'\ \sin(h''-h)\\ +\cot\sigma''\cos h''\sin(h-h')\end{array}\right\}=0.$$

IV. Endlich wollen wir nun auch annehmen, dass den Höhen h, h', h'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Höhen h, h', h'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ''; oder den Azimuthen ω, ω', ω'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne (oder e i n e s Sterns) die gleichen Declinationen δ, δ, δ entsprechen.

Dann ist zuvörderst nach 6):

$$\sin\delta=\sin h\ \sin\varphi-\cos\omega\ \cos h\ \cos\varphi,$$
$$\sin\delta=\sin h'\ \sin\varphi-\cos\omega'\ \cos h'\ \cos\varphi,$$
$$\sin\delta=\sin h''\sin\varphi-\cos\omega''\cos h''\cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin h'-\sin h'',\ \sin h''-\sin h,\ \sin h-\sin h'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$33)\quad \left.\begin{aligned}&\cos\omega\ \cos h\ (\sin h'-\sin h'')\\ +&\cos\omega'\ \cos h'\ (\sin h''-\sin h)\\ +&\cos\omega''\cos h''\,(\sin h-\sin h')\end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$34)\quad \left.\begin{aligned}&\cos\omega\ \cos h\ \cos\tfrac{1}{2}(h'+h'')\sin\tfrac{1}{2}(h'-h'')\\ +&\cos\omega'\cos h'\cos\tfrac{1}{2}(h''+h)\sin\tfrac{1}{2}(h''-h)\\ +&\cos\omega''\cos h''\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\end{aligned}\right\}=0.$$

Nach 5) ist ferner

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin\delta\sin\varphi+\cos\sigma\ \cos\delta\cos\varphi,\\ \sin h' &= \sin\delta\sin\varphi+\cos\sigma'\cos\delta\cos\varphi,\\ \sin h'' &= \sin\delta\sin\varphi+\cos\sigma''\cos\delta\cos\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\sigma'-\cos\sigma'',\ \cos\sigma''-\cos\sigma,\ \cos\sigma-\cos\sigma'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung.

$$35)\quad \left.\begin{aligned}&\sin h\ (\cos\sigma'-\cos\sigma'')\\ +&\sin h'\ (\cos\sigma''-\cos\sigma)\\ +&\sin h''(\cos\sigma-\cos\sigma')\end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$36)\quad \left.\begin{aligned}&\cos\sigma\ (\sin h'-\sin h'')\\ +&\cos\sigma'\ (\sin h''-\sin h)\\ +&\cos\sigma''(\sin h-\sin h')\end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$37)\quad \left.\begin{aligned}&\sin h\ \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'')\\ +&\sin h'\ \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''+\sigma)\ \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''-\sigma)\\ +&\sin h''\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\ \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$38)\quad \left.\begin{aligned}&\cos\sigma\ \cos\tfrac{1}{2}(h'+h'')\sin\tfrac{1}{2}(h'-h'')\\ +&\cos\sigma'\cos\tfrac{1}{2}(h''+h)\sin\tfrac{1}{2}(h''-h)\\ +&\cos\sigma''\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\end{aligned}\right\}=0.$$

Nach 8) ist endlich:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\tan\!g\,\delta &= \cos\sigma\ \sin\varphi-\sin\sigma\cot\omega,\\ \cos\varphi\tan\!g\,\delta &= \cos\sigma'\sin\varphi-\sin\sigma'\cot\omega',\\ \cos\varphi\tan\!g\,\delta &= \cos\sigma''\sin\varphi-\sin\sigma''\cot\omega''.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\sigma' - \cos\sigma'',\ \cos\sigma'' - \cos\sigma,\ \cos\sigma - \cos\sigma'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$39)\quad \left.\begin{array}{l} \cot\omega\ \sin\sigma\ (\cos\sigma' - \cos\sigma'') \\ + \cot\omega' \sin\sigma' (\cos\sigma'' - \cos\sigma) \\ + \cot\omega'' \sin\sigma'' (\cos\sigma - \cos\sigma') \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$40)\quad \left.\begin{array}{l} \cot\omega\ \sin\sigma\ \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'') \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'') \\ + \cot\omega' \sin\sigma' \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''+\sigma) \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''-\sigma) \\ + \cot\omega'' \sin\sigma'' \sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \end{array}\right\} = 0.$$

Dies sind die Relationen, deren kurze Entwickelung der Zweck des vorliegenden Aufsatzes war.

VIII.

Ueber eine astronomische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Dass man aus den in demselben Azimuth etwa mit einem Theodoliten gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre, d. h. deren Rectascensionen und Declinationen, bekannt sind, die Polhöhe und die Zeit bestimmen kann, ist hinreichend bekannt. Bezeichnen wir nämlich die Polhöhe durch φ, die in den Azimuthen ω, ω', welche von Süden an nach Westen hin von 0 bis 360° gezählt werden sollen, gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Declinationen δ, δ' sind, durch h, h'; so haben wir bekanntlich nach den Fundamentalgleichungen der sphärischen Astronomie die beiden folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega' \cos h' \cos\varphi. \end{cases}$$

Setzen wir nun $\omega' = \omega + (\omega' - \omega)$, so wird

$$\begin{aligned} \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos(\omega'-\omega) \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + \sin(\omega'-\omega) \sin\omega \cos h' \cos\varphi \\ &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)^2 \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega) \cos\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega) \sin\omega \cos h' \cos \\ &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega) \sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega) \cos h' \cos\varphi, \end{aligned}$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h \\ &= \sin(h-h') \sin\varphi - 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega) \sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega) \cos h \cos h' \cos\varphi, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2)\quad \sin\varphi &= \frac{\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h}{\sin(h-h')} \\ &\quad - \frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega') \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega') \cos h \cos h'}{\sin(h-h')} \cos\varphi. \end{aligned}$$

Sind nun die beiden Sterne in demselben Azimuth beobacht worden, so ist $\omega = \omega'$, also $\omega - \omega' = 0$, und folglich

$$3)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h}{\sin(h-h')}.$$

Ist nicht genau $\omega - \omega' = 0$, so ist nach 2)

$$-\frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega') \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega') \cos h \cos h'}{\sin(h-h')} \cos\varphi$$

der Fehler, mit welchem $\sin\varphi$ behaftet ist, wenn man gen $\omega - \omega' = 0$ setzt, woraus man sich leicht Regeln abstrahiren wi wie die Beobachtungen am vortheilhaftesten anzustellen sind, i dem man z. B. sogleich übersieht, dass der Fehler sehr gr werden kann, wenn nahe $\sin(h-h') = 0$ ist, was man also vermeiden haben wird.

Wie man, wenn man die Polhöhe gefunden hat, dann leic noch das Azimuth, die Stundenwinkel der Sterne, und aus dies mittelst der bekannten Rectascensionen der Sterne die Zeit b stimmen kann, ist aus den Elementen der Astronomie hinreiche bekannt, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Nicht so bekannt wie das Vorhergehende dürfte es sein, d man, wenn man mit den Messungen der Höhen zweier bekan

Sterne in demselben Azimuth noch die Messung der Höhe eines dritten bekannten Sterns in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth verbindet, was bekanntlich bei der Anwendung des Theodoliten nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert, ausser der Polhöhe auch noch den Collimationsfehler des Instruments bestimmen, oder vielmehr die Polhöhe unabhängig von dem Collimationsfehler des Instrumentes erhalten kann, was mir in praktischer Rücksicht nicht ganz unwichtig und uninteressant zu sein scheint.

Bezeichnen wir nämlich die Declination und die gemessene Höhe des dritten Sterns respective durch δ'' und h'', so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi, \\ \sin\delta'' = \sin h'' \sin\varphi + \cos\omega \cos h'' \cos\varphi. \end{cases}$$

Multipliciren wir nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'+h''),\ \sin(h+h''),\ \sin(h-h'),$$

und ziehen dann die zweite und dritte von der ersten ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sin\delta\sin(h'+h'') - \sin\delta'\sin(h+h'') - \sin\delta''\sin(h-h') \\ &= \{\sin h\sin(h'+h'') - \sin h'\sin(h+h'') - \sin h''\sin(h-h')\}\sin\varphi \\ &- \{\cos h\sin(h'+h'') - \cos h'\sin(h+h'') + \cos h''\sin(h-h')\}\cos\omega\cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ist aber, wie man durch leichte Entwickelung findet:

$$5)\quad \begin{cases} \sin h\sin(h'+h'') - \sin h'\sin(h+h'') - \sin h''\sin(h-h') = 0, \\ \cos h\sin(h'+h'') - \cos h'\sin(h+h'') + \cos h''\sin(h-h') = 0; \end{cases}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$6)\quad \sin\delta\sin(h'+h'') - \sin\delta'\sin(h+h'') - \sin\delta''\sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die gemessenen Höhen h, h', h'' sämmtlich als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Ist aber das Instrument mit einem Collimationsfehler oder Indexfehler i behaftet, und sind also $h+i$, $h'+i$, $h''+i$ die wahren Höhen *), so hat man natürlich statt der Gleichung 6) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta\ \sin\{(h'+i)+(h''+i)\} \\ &-\sin\delta'\ \sin\{(h+i)+(h''+i)\} \\ &-\sin\delta''\ \sin\{(h+i)-(h'+i)\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

*) Wobei vorausgesetzt wird, dass die gemessenen Höhen wegen Refraction gehörig corrigirt sind.

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega' \cos h' \cos\varphi. \end{array} \right.$$

Setzen wir nun $\omega' = \omega + (\omega' - \omega)$, so wird

$$\begin{aligned} \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos(\omega'-\omega)\cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + \sin(\omega'-\omega)\sin\omega \cos h' \cos\varphi \\ &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)^2 \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\omega \cos h' \cos \\ &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\qquad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega)\cos h' \cos\varphi, \end{aligned}$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h \\ &= \sin(h-h')\sin\varphi - 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega)\cos h \cos h' \cos\varphi, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2)\quad \sin\varphi &= \frac{\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h}{\sin(h-h')} \\ &\quad - \frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos h \cos h'}{\sin(h-h')}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Sind nun die beiden Sterne in demselben Azimuth beobachtet worden, so ist $\omega = \omega'$, also $\omega - \omega' = 0$, und folglich

$$3)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h}{\sin(h-h')}.$$

Ist nicht genau $\omega - \omega' = 0$, so ist nach 2)

$$-\frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos h \cos h'}{\sin(h-h')}\cos\varphi$$

der Fehler, mit welchem $\sin\varphi$ behaftet ist, wenn man genau $\omega - \omega' = 0$ setzt, woraus man sich leicht Regeln abstrahiren wird, wie die Beobachtungen am vortheilhaftesten anzustellen sind, indem man z. B. sogleich übersieht, dass der Fehler sehr gross werden kann, wenn nahe $\sin(h-h') = 0$ ist, was man also zu vermeiden haben wird.

Wie man, wenn man die Polhöhe gefunden hat, dann leicht noch das Azimuth, die Stundenwinkel der Sterne, und aus diesen mittelst der bekannten Rectascensionen der Sterne die Zeit bestimmen kann, ist aus den Elementen der Astronomie hinreichend bekannt, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Nicht so bekannt wie das Vorhergehende dürfte es sein, dass man, wenn man mit den Messungen der Höhen zweier bekann

Sterne in demselben Azimuth noch die Messung der Höhe eines dritten bekannten Sterns in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth verbindet, was bekanntlich bei der Anwendung des Theodoliten nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert, ausser der Polhöhe auch noch den Collimationsfehler des Instruments bestimmen, oder vielmehr die Polhöhe unabhängig von dem Collimationsfehler des Instrumentes erhalten kann, was mir in praktischer Rücksicht nicht ganz unwichtig und uninteressant zu sein scheint.

Bezeichnen wir nämlich die Declination und die gemessene Höhe des dritten Sterns respective durch δ'' und h'', so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega\cos h\cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega\cos h'\cos\varphi, \\ \sin\delta'' = \sin h'' \sin\varphi + \cos\omega\cos h''\cos\varphi. \end{cases}$$

Multipliciren wir nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'+h''),\ \sin(h+h''),\ \sin(h-h'),$$

und ziehen dann die zweite und dritte von der ersten ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sin\delta\sin(h'+h'') - \sin\delta'\sin(h+h'') - \sin\delta''\sin(h-h') \\ = &\{\sin h\sin(h'+h'') - \sin h'\sin(h+h'') - \sin h''\sin(h-h')\}\sin\varphi \\ - &\{\cos h\sin(h'+h'') - \cos h'\sin(h+h'') + \cos h''\sin(h-h')\}\cos\omega\cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ist aber, wie man durch leichte Entwickelung findet:

$$5)\quad \begin{cases} \sin h\sin(h'+h'') - \sin h'\sin(h+h'') - \sin h''\sin(h-h') = 0, \\ \cos h\sin(h'+h'') - \cos h'\sin(h+h'') + \cos h''\sin(h-h') = 0; \end{cases}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$6)\quad \sin\delta\sin(h'+h'') - \sin\delta'\sin(h+h'') - \sin\delta''\sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die gemessenen Höhen h, h', h'' sämmtlich als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Ist aber das Instrument mit einem Collimationsfehler oder Indexfehler i behaftet, und sind also $h+i$, $h'+i$, $h''+i$ die wahren Höhen *), so hat man natürlich statt der Gleichung 6) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta\ \sin\{(h'+i)+(h''+i)\} \\ -&\sin\delta'\ \sin\{(h+i)+(h''+i)\} \\ -&\sin\delta''\ \sin\{(h+i)-(h'+i)\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

*) Wobei vorausgesetzt wird, dass die gemessenen Höhen wegen der Refraction gehörig corrigirt sind.

d. i.

$$7)\qquad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\ \sin(h'+h''+2i) \\ -\sin\delta'\ \sin(h+h''+2i) \\ -\sin\delta''\sin(h-h') \end{array}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man leicht:

$$\left.\begin{array}{l} \{\sin\delta\ \sin(h'+h'')-\sin\delta'\ \sin(h+h'')\}\cos 2i \\ +\{\sin\delta\ \cos(h'+h'')-\sin\delta'\cos(h+h'')\}\sin 2i \end{array}\right\} = \sin\delta''\sin h-h'),$$

und folglich, wenn man die Hülfsgrössen μ, Θ mittelst der Gleichungen

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\delta\ \sin(h'+h'')-\sin\delta'\ \sin(h+h'')=\mu\sin\Theta, \\ \sin\delta\ \cos(h'+h'')-\sin\delta'\ \cos(h+h'')=\mu\cos\Theta \end{array}\right.$$

berechnet, was keine Schwierigkeit hat:

$$9)\qquad \mu\sin(\Theta+2i)=\sin\delta''\sin(h-h'),$$

also

$$10)\qquad \sin(\Theta+2i)=\frac{\sin\delta''\ \sin(h-h')}{\mu}.$$

Hat man mittelst dieser Gleichung den Collimationsfehler bestimmt, so kann man wegen desselben die gemessenen Höhen sämmtlich corrigiren, und muss dann natürlich, wenn man mittelst der Formel 3) die Polhöhe bestimmt, in diese Formel die wegen des Collimationsfehlers gehörig corrigirten gemessenen Höhen einführen.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn man in demselben Azimuth die Höhen dreier bekannter Sterne gemessen hat, und die Refraction den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional zu setzen berechtigt ist, die Refraction bestimmen kann, ohne den Collimationsfehler des Instrumentes gerade mit völliger Genauigkeit kennen zu müssen. Unter der gemachten Voraussetzung hat man nämlich die drei folgenden Gleichungen:

$$11)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\delta\ =\sin h\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h\ \cos\varphi, \\ \sin\delta'=\sin h'\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h'\cos\varphi. \\ \sin\delta''=\sin h''\sin\varphi-\cos\omega\cos h''\cos\varphi. \end{array}\right.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'-h''),\ \sin(h''-h),\ \sin(h-h');$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$12)\quad \begin{cases} \sin h \sin(h'-h'') + \sin h' \sin(h''-h) + \sin h'' \sin(h-h') = 0, \\ \cos h \sin(h'-h'') + \cos h' \sin(h''-h) + \cos h'' \sin(h-h') = 0 \end{cases}$$

ist, die Gleichung:

$$13)\quad \sin\delta \sin(h'-h'') + \sin\delta' \sin(h''-h) + \sin\delta'' \sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die Höhen als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Setzen wir aber die Refraction den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional, so sind, wenn ϱ eine constante Grösse bezeichnet, die wegen der Refraction corrigirten Höhen:

$$h-\varrho\cot h,\quad h'-\varrho\cot h',\quad h''-\varrho\cot h'';$$

und die Gleichung 13) nimmt also eigentlich folgende Gestalt an:

$$14)\quad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\ \sin\{h'-h''-\varrho(\cot h'-\cot h'')\} \\ +\sin\delta'\ \sin\{h''-h-\varrho(\cot h''-\cot h)\} \\ +\sin\delta''\ \sin\{h-h'-\varrho(\cot h-\cot h')\} \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$15)\quad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\ \sin\left\{h'-h''+\varrho\dfrac{\sin(h'-h'')}{\sin h'\sin h''}\right\} \\ +\sin\delta'\ \sin\left\{h''-h+\varrho\dfrac{\sin(h''-h)}{\sin h''\sin h}\right\} \\ +\sin\delta''\ \sin\left\{h-h'+\varrho\dfrac{\sin(h-h')}{\sin h\sin h'}\right\} \end{array}\right\} = 0.$$

Da die Differenzen $h-h'$, $h'-h''$, $h''-h$ von dem Collimationsfehler unabhängig sind und ϱ immer eine sehr kleine Grösse ist, so wird die Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung nicht wesentlich gestört werden, wenn wegen des nicht mit völliger Genauigkeit bekannten Collimationsfehlers eine nur unvollkommene Correction der gemessenen Höhen möglich gewesen ist.

Da die Grössen

$$\varrho\frac{\sin(h'-h'')}{\sin h'\sin h''},\quad \varrho\frac{\sin(h''-h)}{\sin h''\sin h},\quad \varrho\frac{\sin(h-h')}{\sin h\sin h'}$$

meistens der Null sehr nahe kommen werden, so giebt die Gleichung 15) nach gehöriger Entwickelung die folgende näherungsweise richtige Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\delta\sin(h'-h'') + \sin\delta'\sin(h''-h) + \sin\delta''\sin(h-h') \\ +\frac{1}{2}\varrho\left\{\dfrac{\sin\delta\sin 2(h'-h'')}{\sin h'\sin h''} + \dfrac{\sin\delta'\sin 2(h''-h)}{\sin h''\sin h} + \dfrac{\sin\delta''\sin 2(h-h')}{\sin h\sin h'}\right\} \end{array}\right\} = 0,$$

also

$$16)\ \tfrac{1}{2}\varrho = -\frac{\sin\delta\sin(h'-h'') + \sin\delta'\sin(h''-h) + \sin\delta''\sin(h-h')}{\frac{\sin\delta\sin 2(h'-h'')}{\sin h'\sin h''} + \frac{\sin\delta'\sin 2(h''-h)}{\sin h''\sin h} + \frac{\sin\delta''\sin 2(h-h')}{\sin h\sin h'}}.$$

Hat man mittelst dieser Formel einen ersten Näherungswerth von ϱ gefunden, so wird man mit Hülfe der Gleichung 15) diese Grösse mittelst der bekannten Näherungsmethoden auch leicht genauer finden können.

Fasset man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so wird sich überhaupt folgende Methode zur Bestimmung der Polhöhe *) ergeben.

In demselben Azimuth messe man die Höhen dreier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre bekannt sind, und in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth die Höhe eines vierten Sterns, dessen Position auf der Sphäre ebenfalls bekannt ist, wobei man sich am besten eines Theodoliten oder auch eines mit einem zweckmässig eingerichteten Stativ versehenen Sextanten bedient. Ist nun durch eine der verschiedenen hinreichend bekannten Methoden der Collimationsfehler des Instrumentes annähernd bestimmt worden, so corrigire man wegen desselben die gemessenen Höhen der drei ersten Sterne, und bestimme hierauf die Refraction mittelst der Formeln 16) und 15). Dann corrigire man die gemessenen Höhen des ersten, zweiten und vierten Sterns wegen der Refraction, indem man immer (was freilich auch nur näherungsweise richtig ist) die Refractionen den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional setzt, und bestimme mittelst der Gleichungen 8) und 10) den Collimationsfehler. Nun corrigire man endlich die schon wegen der Refraction corrigirten gemessenen Höhen des ersten und zweiten Sterns noch wegen des jetzt genau ermittelten Collimationsfehlers, und bestimme die Polhöhe mittelst der Gleichung 3). Dass man sich übrigens bei diesem hier nur im Allgemeinen skizzirten Verfahren auch der sogenannten Methode der successiven Näherungen bedienen und dasselbe dadurch zu grösserer Genauigkeit erheben kann, versteht sich von selbst.

---

*) Und dann ferner auch der Zeit, was nicht weiter erläutert zu werden braucht.

IX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aus der Gleichung

$$abc = x\{a\sqrt{4x^2-a^2}+b\sqrt{4x^2-b^2}+c\sqrt{4x^2-c^2}\}$$

durch Rechnung den Ausdruck

$$x = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist, herzuleiten.

Ein Dreieck durch eine gerade Linie so in zwei Theile zu theilen, dass die beiden Theile in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, und die ihre Schwerpunkte verbindende gerade Linie auf der Theilungslinie senkrecht steht.

Die vier gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Höhen der vier Dreiecke, welche von den Seiten und den beiden Diagonalen eines in einen Kreis beschriebenen beliebigen Vierecks gebildet werden, liegen jederzeit auf dem Umfange eines dem Kreise, in welchen das Viereck beschrieben ist, gleichen Kreises.

Wenn A und B die Flächenräume zweier um und in einen Kreis beschriebenen regulären Polygone von gleicher Seitenzahl sind, so ist die Differenz $A-B$ der Fläche eines regulären Polygons von derselben Seitenzahl gleich, welches entweder um oder in einen Kreis beschrieben ist, dessen Halbmesser im ersten Falle der halben Seite des Polygons B, im zweiten Falle der halben Seite des Polygons A gleich ist.

Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, welcher entsteht, wenn ein reguläres Polygon — ein reguläres Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, u. s. w. — sich um eine seiner Seiten herumdreht.

Bezeichnen wir die Seite des regulären Vielecks durch a, den körperlichen Inhalt des durch Umdrehung desselben um eine seiner Seiten entstandenen Körpers durch V; so ist

für das reguläre Dreieck: $V = \frac{1}{4}\pi a^3$;
für das reguläre Viereck: $V = \pi a^3$;
für das reguläre Fünfeck: $V = \frac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$;
für das reguläre Sechseck: $V = \frac{9}{2}\pi a^3$;
für das reguläre Achteck: $V = 2\pi a^3(3+2\sqrt{2})$;
für das reguläre Zehneck: $V = \frac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$;
für das reguläre Zwölfeck: $V = 3\pi a^3(7+4\sqrt{3})$.

Man kann diese körperlichen Räume auch sowohl durch den Halbmesser des um, als auch durch den Halbmesser des in das reguläre Vieleck beschriebenen Kreises ausdrücken. Bezeichnet z. B. r den Halbmesser des umschriebenen Kreises, so ist

für das reguläre Dreieck: $V = \frac{3}{4}\pi r^3\sqrt{3}$;
für das reguläre Viereck: $V = 2\pi r^3\sqrt{2}$;
für das reguläre Fünfeck: $V = \frac{5}{4}\pi r^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
für das reguläre Sechseck: $V = \frac{9}{2}\pi r^3$;
für das reguläre Achteck: $V = 2\pi r^3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;
für das reguläre Zehneck: $V = \frac{5}{2}\pi r^3\sqrt{5}$;
für das reguläre Zwölfeck: $V = \frac{3}{2}\pi r^3(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

Unter allen Prismen von derselben Grundfläche und Höhe hat das gerade Prisma die grösste Oberfläche.

Wenn man aus einem Punkte O in der Verlängerung eines Durchmessers AB eines Kreises eine denselben in den beiden Punkten M und M' schneidende gerade Linie, und nach den Punkten M und M' die Halbmesser CM und CM' des Kreises zieht, so soll man beweisen, dass das Product

$$\tang \frac{MCO}{2} \cdot \tang \frac{M'CO}{2}$$

eine constante Grösse ist, welche Lage man auch der von dem Punkte O aus gezogenen Secante des Kreises geben mag.

Wenn man auf eine feste gerade Linie in der Ebene einer Parabel von den Endpunkten M, M' einer durch den Brennpunkt F gehenden Chorde derselben die Perpendikel MN, $M'N'$ fällt, so ist, was man auch der durch den Brennpunkt F gehenden Chorde MM' für eine Lage geben mag, die Summe

$$\frac{MN}{MF}+\frac{M'N'}{M'F}$$

eine constante Grösse.

In jeder Parabel steht die Summe der Entfernungen der Endpunkte einer jeden durch den Brennpunkt gehenden Sehne von dem Brennpunkte zu dem Producte dieser Entfernungen in einem constanten Verhältnisse.

Den geometrischen Ort des Scheitels eines rechten Winkels zu bestimmen, dessen Schenkel auf einem gegebenen Kegelschnitte senkrecht stehen.

Wenn zwei Kreise, der eine mit constantem, der andere mit veränderlichem Halbmesser, sich von Aussen berühren, und an diese beiden Kreise eine gemeinschaftliche Berührende gezogen wird, so liegen die sämmtlichen Berührungspunkte mit dem Kreise, dessen Halbmesser als veränderlich angenommen wird, in einer Cissoide.

X.

Miscellen.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Schulraths J. H. T. Müller, Directors des Realgymnasiums zu Wiesbaden, an den Herausgeber.

Da Sie jetzt durch zwei Abhandlungen, welche ich mit vielem Interesse gelesen, die Aufmerksamkeit auf die kubischen Gleichungen wieder hingelenkt haben, so erlaube ich mir die Behandlungsweise in Erinnerung zu bringen, deren sich Kramp in seiner Arithmétique universelle (von der ich vor Jahren eine Uebersetzung

gefertigt, die aber nicht erschienen ist) bedient hat und die darum der Vergessenheit entrissen zu werden verdiente, weil sie auf die Wegschaffung des zweiten Gliedes verzichtet und eine tiefe Einsicht in den ganzen Gang der Untersuchung gewährt. Derselbe geht von der einfachsten Gleichung $x^3-1=0$ aus und bezeichnet sehr passend die verdoppelten beiden imaginären Wurzeln derselben $-1+i\sqrt{3}$ und $-1-i\sqrt{3}$ mit $2J'$ und $2J''$. Daran schliesst sich unmittelbar die Gleichung $x^3-C=0$, die für $C=h^3$ die Wurzeln h, hJ', hJ'' giebt. Hierauf behandelt Kramp den Fall $x^3-3Ax^2+3A^2x-C=0$, worin die drei ersten Glieder Bestandtheile eines vollständigen Kubus sind, so dass man für $C-A^3=h^3$ die drei Wurzeln $A+h$, $A+hJ'$, $A+hJ''$ erhält. Nach Erörterung einiger anderer Fälle geht derselbe zur Aufsuchung der Bedingungen über, welchen die Coefficienten der vollständigen allgemeinen Gleichung

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

zu genügen haben, damit 1) eine der Wurzeln das arithmetische Mittel zwischen den beiden übrigen, 2) die zweite Wurzel gleich der dritten, 3) nur eine Wurzel reell und 4) keine Wurzel weder einer andern gleich noch auch imaginär sei.

1. Für α, β, γ als Wurzeln der Gleichung und $2\beta=\alpha+\gamma$ erhält man $3\beta=\alpha+\beta+\gamma=A$, also $\beta=\frac{1}{3}A$ als zweite Wurzel. Da hiernach

$$x^3-Ax^2+Bx-C=(x-\beta)(x^2-2\beta x-2\beta^2+B)+(-2\beta^3+B\beta-C)$$

ist, so giebt der zweite Factor des ersten Gliedes die beiden übrigen Wurzeln $3x=A\pm\sqrt{3}\,.\sqrt{(A^2-3B)}$ und der Divisionsrest $-2\beta^3+B\beta-C$, welcher unter der obigen Voraussetzung verschwinden muss, die Bedingungsgleichung für diese Annahme, nämlich

$$2A^3-9AB+27C=0.$$

2. Sind α, β, β die drei Wurzeln, so muss $\alpha+2\beta=A$, $2\alpha\beta+\beta^2=B$, $\alpha\beta^2=C$ sein. Durch Eliminirung von α aus der 1sten und 2ten Gleichung erhält man, wenn der schon in 1. vorkommende Ausdruck

$$A^2-3B=r^2$$

gesetzt wird, $3\beta=A\pm r$ und $3\alpha=A\mp 2r$. Durch Multiplication des Quadrats der ersten dieser beiden Gleichungen mit der zweiten erhält man

$$2A^3-9AB+27C=\mp 2r^3,$$

und wenn beiderseits quadrirt wird, die Bedingungsgleichung für zwei gleiche gleichstimmige Wurzeln, nämlich

$$(2A^3-9AB+27C)^2=4(A^2-3B)^3.$$

3 Sind zwei Wurzeln zugeordnete complexe Ausdrücke, also die drei Wurzeln α, $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$; so ist $\alpha+2\lambda=A$, $2\alpha\lambda+\lambda^2+\mu^2=B$, $\alpha(\lambda^2+\mu^2)=C$, woraus man

$$A^2-3B=(\alpha-\lambda)^2-3\mu^2, \text{ also } A^2-3B>(\alpha-\lambda)^2$$

und

$$2A^3-9AB+27C=2(\alpha-\lambda)^3+18(\alpha-\lambda)\mu^2,$$

also

$$(2A^3-9AB+27C)^2-4(A^2-3B)^3=\{6(\alpha-\lambda)^2\mu\sqrt{3}+6\mu^3\sqrt{3}\}^2>0$$
$$=R^2$$

erhält. Hieraus findet man

$$2A^3-9AB+27C+R=2(\alpha-\lambda+\mu\sqrt{3})^3=2p^3,$$
$$2A^3-9AB+27C-R=2(\alpha-\lambda-\mu\sqrt{3})^3=2q^3,$$

so dass p und q bekannt sind.

Werden die beiden Gleichungen

$$\alpha-\lambda+\mu\sqrt{3}=p,$$
$$\alpha-\lambda-\mu\sqrt{3}=q$$

durch Addition und Subtraction verbunden und zieht man die frühere Gleichung $\alpha+2\lambda=A$ hinzu, so ergiebt sich $3\alpha=A+p+q$, $6\lambda=2A-p-q$, $6\mu=(p-q)\sqrt{3}$. Es sind demnach

$$A+p+q,$$
$$A+pJ'+qJ'',$$
$$A+pJ''+qJ'$$

die dritten Theile der drei Wurzeln der Gleichung $x^3-Ax^2+Bx-C=0$, wenn die oben angegebene Bedingung statt findet.

4. Zur Betrachtung endlich des Falles dreier ungleicher reeller Wurzeln bahnt sich Kramp den Weg durch die Vergleichung des Productes der Unterschiede zwischen den drei kreisförmig geordneten Wurzeln x', x'', x''' des in 3. untersuchten Falles. Es ist nämlich

$$(x'-x'')(x''-x''')(x'''-x')=R.3i\sqrt{3},$$

woraus er folgert, dass R imaginär, also R^2 negativ sein muss, wenn die drei Wurzeln reell und ungleich sind, d. h. dass in diesem Falle stets

$$(3A^3-9AB+27C)^2<4(A^2-3B)^3$$

ist. Demnach wird jetzt

$$2A^3-9AB+27C+iR=2p^3,$$
$$2A^3-9AB+27C-iR=2q^3.$$

Setzt man, was erwiesenermassen erlaubt ist, $p=z+iy$, $q=z-iy$, so ergiebt sich, dass die Bestimmung der Werthe von z und y wiederum auf die Auflösung einer kubischen Gleichung von derselben Beschaffenheit führt, als die gegebene Gleichung war, und langt so zuletzt bei dem Casus irreducibilis an.

Bemerkung zu der Aufgabe des Herrn A. Ritman.

(Thl. VI. S. 330. des Archivs.)

Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover.

Es ist das Achsendreieck eines (schiefen) Kegels gegeben, und in einer Seitenlinie desselben ein Punkt. Man soll durch diesen Punkt Ebenen normal zur Ebene des Achsendreiecks legen, und den geometrischen Ort der Brennpunkte aller dadurch entstehenden Kegelschnitte angeben.

Der gegebene Punkt sei der Pol eines Polarcoordinaten-Systems, und r der Radius vector der gesuchten Curve, so hat man bekanntlich

$$r=a\pm\sqrt{a^2-b^2},$$

wenn a und b die beiden Halbachsen irgend eines Kegelschnitts — die erstere in der Ebene des Achsendreiecks, die zweite rechtwinklig darauf — bezeichnen und die Ellipse als Grundform der Schnitte angesehen wird. Hier sind a und b veränderliche Grössen, deren Ausdruck durch den veränderlichen Winkel des Systems und die gegebenen Constanten wir jedoch nicht hersetzen wollen.

Nun giebt es bekanntlich im schiefen Kegel zwei Schnitte durch den gegebenen Punkt, welche Kreise sind; in beiden wird also $b=a$, folglich auch $r=a$, und mithin vereinigen sich in jedem dieser Schnitte die beiden Arme des gesuchten geometrischen Orts in Einen Punkt. Zwischen beiden Schnitten aber wird, wovon man sich leicht durch Ausführung der Rechnung überzeugt, $b>a$, folglich r imaginär; es findet mithin hier keine Curve in der Ebene des Achsendreiecks statt, und damit pflegt man gewöhnlich eine derartige Betrachtung abzuschliessen.

Indessen können wir auch selbst in diesem Falle der Gleichung

$$r=a\pm\sqrt{a^2-b^2},$$

welche alsdann die Form annimmt

$$r=a\pm i\sqrt{b^2-a^2},$$

eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Denken wir uns nämlich die Schnittebene als Ebene der complexen Zahlen, und in ihr die Achse der reellen Zahlen zusammenfallend mit der Achse

$2a$ und die Achse der imaginären Zahlen rechtwinklig darauf, so werden wir den complexen Radius vector construiren, indem wir von der Mitte der Achse $2a$ aus uns rechtwinklig von der Ebene des Achsendreiecks erheben, und zwar sowohl nach der einen als nach der andern Seite hin, um eine Entfernung $=\sqrt{b^2-a^2}$. Und in der That, wenn b die grosse und a die kleine Halbachse einer Ellipse bezeichnet, so liegt der Brennpunkt auf der Halbachse b um einen Abstand $=\sqrt{b^2-a^2}$ vom Mittelpunkte; folglich gelangen wir durch jene Construction wirklich zu den ausserhalb der Ebene des Achsendreiecks liegenden Brennpunkten. Es enthält mithin die Gleichung

$$r=a\pm\sqrt{a^2-b^2}$$

vollständig den geometrischen Ort aller Brennpunkte, welche in den gegebenen Schnittebenen enthalten sind; selbst diejenigen eingeschlossen, welche ausserhalb der Ebene des Achsendreiecks fallen.

Wir haben diese kurze Notiz vorzüglich desshalb nicht unterdrücken wollen, weil hier, wie es uns scheint, durch eine schlagende Thatsache die Coincidenz unserer geometrischen Interpretation der complexen Zahlen mit der Natur der geometrischen Grössenbeziehungen selbst dargethan wird.

Berichtigung.

Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

In dem Archive Thl. VI. S. 333. wird die unbeschränkte Gültigkeit des Satzes: „Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression," in Zweifel gezogen, indem dieselbe an die Bedingung geknüpft wird, dass $\cot\frac{1}{2}\alpha.\cot\frac{1}{2}\gamma=3$ sei.

Der Zweifel ist leicht als unbegründet aufzuzeigen. Denn aus $\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\beta$ folgt

$$1)\qquad 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

mithin

$$2)\qquad \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

und hieraus

3) $$3 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

folglich auch

4) $$3 = \cotg\frac{\alpha}{2} \cotg\frac{\gamma}{2}.$$

Da dies eine nothwendige Folge der Voraussetzung i so kann es keine Beschränkung der Behauptung involviren.

Es ergiebt sich die Richtigkeit derselben auch sehr einf aus 2), wonach man hatte

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

d. i.

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

oder

$$2\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\beta}{2}.$$

Dividirt man nämlich die Gleichung

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$$

durch die eben erhaltene, so folgt

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \cotg\frac{\beta}{2},$$

und wenn man die Zähler entwickelt und den Division ausführt

$$\cotg\frac{\alpha}{2} + \cotg\frac{\gamma}{2} = 2\cotg\frac{\beta}{2},$$

was behauptet wurde.

XI.

Ueber die Theorie der Proportionen.

Von dem

Herrn Doctor Lehmann zu Berlin.

---

§. 1. Lehrsatz.

Wenn von 4 Grössen die 1ste mit der 2ten, und die 3te mit der 4ten gleichartig ist, und ein Vielfaches eines aliquoten Theils der 1sten Grösse ist gleich der 2ten, und das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse gleich der 4ten, so ist jedes andere Vielfache jedes andern aliquoten Theils der 1sten Grösse $\gtreqless$ (d. h. grösser oder ebenso gross oder kleiner) als die 2te Grösse, je nachdem das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse $\gtreqless$ ist als die 4te Grösse.

Beweis. Es sei von den 4 Grössen a, b, c, d, unter denen a mit b gleichartig, und c mit d gleichartig ist, $b=\frac{n}{m}a$ (wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten), und $d=\frac{n}{m}c$; dagegen sei b auch $=\frac{q}{p}a$ (wo q und p wiederum beliebige ganze Zahlen sind), so ist $\frac{n}{m}a=\frac{q}{p}a$, also (beiderseits das $m\times p$fache genommen) $npa=mqa$, also (weil np und mq zwei gleiche ganze Zahlen sind) auch $npc=mqc$, also (wenn man beiderseits den $m\times p$ten Theil nimmt) $\frac{n}{m}c=\frac{q}{p}c$, d. i. $d=\frac{q}{p}c$.

Es sei aber nun $b=\frac{n}{m}a$, und $d=\frac{n}{m}c$; dagegen sei $b>\frac{q}{p}a$ und $<\frac{q+1}{p}a$, so ist $\frac{n}{m}a>\frac{q}{p}a$ und $<\frac{q+1}{p}a$, also $npa>qma$ und $<(q+1)ma$, also (weil np, qm und $(q+1)m$ ganze Zahlen sind) auch $npc>qmc$ und $<(q+1)mc$, also $\frac{n}{m}c>\frac{q}{p}c$ und $<\frac{q+1}{p}c$, d. i. $d>\frac{q}{p}c$ und $<\frac{q+1}{p}c$. Ist aber

$$b > \frac{q}{p}a \text{ und } < \frac{q+1}{p}a, \qquad d > \frac{q}{p}c \text{ und } < \frac{q+1}{p}c;$$

So ist um so mehr

$$b > \frac{q-1}{p}a,\ b < \frac{q+2}{p}a; \qquad d > \frac{q-1}{p}c,\ d < \frac{q+2}{p}c;$$
$$b > \frac{q-2}{p}a,\ b < \frac{q+3}{p}a; \qquad d > \frac{q-2}{p}c,\ d < \frac{q+3}{p}c;$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w. u. s. w.

§. 2. Lehrsatz.

Zu 3 Grössen, wovon die 1ste der 2ten gleichartig, ist allemal eine, aber auch nur Eine, vierte, der 3ten gleichartige Grösse möglich, von der Art, dass jedes Vielfache jedes aliquoten Theils der 1sten Grösse $\gtreqless$ ist als die 2te, je nachdem das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse $\gtreqless$ ist als die 4te Grösse.

Beweis. Die 3 ersten Grössen seien a, b, c. Nun haben entweder a und b einen aliquoten Theil, der in beide aufgeht (ein gemeinschaftliches Maass), oder nicht.

Haben a und b ein gemeinschaftliches Maass, ist nämlich $b = \frac{n}{m}a$, so hat die 4te Grösse $d = \frac{n}{m}c$ nach dem vorigen Paragraphen die verlangte Eigenschaft.

Haben aber a und b, falls das möglich ist, kein gemeinschaftliches Maass, so nehme man einen beliebigen aliquoten, den $m$ten, Theil der Grösse a von b so oft weg, als es angeht; es sei demnach $b > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$. Man nehme zwischen $\frac{n}{m}a$ und $\frac{n+1}{m}a$, d. i. zwischen $\frac{2n}{2m}a$ und $\frac{2n+2}{2m}a$, die Mitte, $\frac{2n+1}{2m}a$, so liegt b entweder zwischen $\frac{2n}{2m}a$ und $\frac{2n+1}{2m}a$, oder zwischen $\frac{2n+1}{2m}a$ und $\frac{2n+2}{2m}a$; im 1sten Fall schreibe man p statt $2n$, im 2ten Fall aber p statt $2n+1$, so kann man in jedem Fall sagen, b liegt zwischen $\frac{p}{2m}a$ und $\frac{p+1}{2m}a$. Fährt man so fort, die aliquoten Theile von a zu halbiren, so sei

$$b > \frac{n}{m}a \text{ und } < \frac{n+1}{m}a.$$
$$b > \frac{p}{2m}a \text{ und } < \frac{p+1}{2m}a.$$
$$b > \frac{q}{4m}a \text{ und } < \frac{q+1}{4m}a.$$

u. s. w.;

auf diese Art wird die Entfernung der beiden Grenzen von einander, zwischen denen b eingeschlossen ist, mit jedem folgenden Schritte auf die Hälfte reducirt. Diesen Grenzen

$$\frac{n}{m}a,\ \frac{n+1}{m}a;$$
$$\frac{p}{2m}a,\ \frac{p+1}{2m}a;$$
$$\frac{q}{4m}a,\ \frac{q+1}{4m}a;$$
u. s. w.

entsprechen, wenn man von der Grösse c die ebensovielsten Theile ebensovielmal nimmt, die Grössen

$$\frac{n}{m}c.\ \frac{n+1}{m}c;$$
$$\frac{p}{2m}c,\ \frac{p+1}{2m}c;$$
$$\frac{q}{4m}c,\ \frac{q+1}{4m}c;$$
u. s. w.

Da nun auch hier der Unterschied mit jedem folgenden Schritte auf die Hälfte reducirt wird, so kann er kleiner werden als jede gegebene mit c gleichartige Grösse; folglich giebt es Eine, aber auch nur Eine Grösse d, welche $> \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$ ist, und welcher sich die Grössen $\frac{n}{m}c$, $\frac{p}{2m}c$, $\frac{q}{4m}c$, u. s. w. in ihrem allmäligen Wachsen, und die Grössen $\frac{n+1}{m}c$, $\frac{p+1}{2m}c$, $\frac{q+1}{4m}c$, u. s. w. in ihrem allmäligen Abnehmen immer mehr nähern, ohne sie jemals genau zu erreichen.

Wir beweisen nun erstlich, dass c und d kein gemeinschaftliches Maass haben. Hätten c und d ein gemeinschaftliches Maass, so sei $d = \frac{\nu}{\mu}c$. Dann wäre

$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{n}{m}c$ und $< \frac{n+1}{m}c$	also auch $\frac{\nu}{\mu}a > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$
$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{p}{2m}c$ und $< \frac{p+1}{2m}c$	$\frac{\nu}{\mu}a > \frac{p}{2m}a$ und $< \frac{p+1}{2m}a$
$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$	$\frac{\nu}{\mu}a > \frac{q}{4m}a$ und $< \frac{q+1}{4m}a$
u. s. w.	u. s. w.

Da aber der Unterschied zwischen $\frac{n}{m}a$ und $\frac{n+1}{m}a$ doppelt so [g]ross ist als der Unterschied zwischen $\frac{p}{2m}a$ und $\frac{p+1}{2m}a$, dieser

aber wieder doppelt so gross als der Unterschied zwischen $\frac{q}{4m}a$ und $\frac{q+1}{4m}a$, u. s. w., so wird der Unterschied $<$ als jede gegebene mit a gleichartige Grösse; der Grenzwerth ist also $\frac{\nu}{\mu}a$. Vorher aber sahen wir, dass dieser Grenzwerth $=b$. Folglich wäre $b=\frac{\nu}{\mu}a$, und folglich hätten a und b ein gemeinschaftliches Maass, gegen die Voraussetzung. Folglich ist die Annahme falsch, und c und d haben kein gemeinschaftliches Maass.

Man nehme nun einen beliebigen aliquoten, den μten, Theil der Grösse a von b so oft weg, als es angeht; es sei demnach $b>\frac{\nu}{\mu}a$ und $<\frac{\nu+1}{\mu}a$, so beweisen wir, dass d nicht $<\frac{\nu}{\mu}c$ und nicht $>\frac{\nu+1}{\mu}c$ sein könne.

Es sei, wo möglich, $d<\frac{\nu}{\mu}c$, so wäre

$\frac{\nu}{\mu}c>d$ und, wie wir gesehen haben, $d>\frac{n}{m}c$;

$\frac{\nu}{\mu}c>d$, „ „ „ „ „ $d>\frac{p}{2m}c$;

$\frac{\nu}{\mu}c>d$, „ „ „ „ „ $d>\frac{q}{4m}c$;

u. s. w.

also um so mehr $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{n}{m}c$; also auch $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{n}{m}a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{p}{2m}c$; $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{p}{2m}a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{q}{4m}c$; $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{q}{4m}a$;

u. s. w.

Da nun die Grössen $\frac{n}{m}a$, $\frac{p}{2m}a$, $\frac{q}{4m}a$, u. s. w. in ihrem allmäligen Wachsen sich, wie wir gesehen haben, immer mehr der Grösse b nähern, so dass das noch Fehlende kleiner wird als jede gegebene mit a und b gleichartige Grösse, so kann $\frac{\nu}{\mu}a$ nicht $<$ [illegible] sein, da doch vorausgesetzt war, dass wirklich $b>\frac{\nu}{\mu}a$, d. [illegible] $\frac{\nu}{\mu}a<b$ sei. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und d kann nicht $<\frac{\nu}{\mu}c$ sein.

Es sei aber nun, wo möglich, $d>\frac{\nu+1}{\mu}c$, so wäre

$$\frac{\nu+1}{\mu}c < d, \text{ und, wie wir gesehen haben, } d < \frac{n+1}{m}c;$$
$$\frac{\nu+1}{\mu}c < d, \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad d < \frac{p+1}{2m}c;$$
$$\frac{\nu+1}{\mu}c < d, \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad d < \frac{q+1}{4m}c;$$

u. s. w.

$$\text{also um so mehr } \frac{\nu+1}{\mu}c < \frac{n+1}{m}c, \text{ also auch } \frac{\nu+1}{\mu}a < \frac{n+1}{m}a;$$
$$„ \quad „ \quad „ \quad „ \quad \frac{\nu+1}{\mu}c < \frac{p+1}{2m}c, \qquad \frac{\nu+1}{\mu}a < \frac{p+1}{2m}a;$$
$$„ \quad „ \quad „ \quad „ \quad \frac{\nu+1}{\mu}c < \frac{q+1}{4m}c, \qquad \frac{\nu+1}{\mu}a < \frac{q+1}{4m}a;$$

u. s. w.

Da nun die Grössen $\frac{n+1}{m}a$, $\frac{p+1}{2m}a$, $\frac{q+1}{4m}a$, u. s. w. in ihrem allmäligen Abnehmen sich, wie wir gesehen haben, immer mehr der Grösse b nähern, so dass der Ueberschuss kleiner wird als jede gegebene mit a und b gleichartige Grösse, so kann $\frac{\nu+1}{\mu}a$ nicht $> b$ sein, da doch vorausgesetzt war, dass wirklich $b < \frac{\nu+1}{\mu}a$, d. i. $\frac{\nu+1}{\mu}a > b$ sei. Da dies sich widerspricht, so ist wiederum die Annahme falsch, und d kann nicht $> \frac{\nu+1}{\mu}c$ sein.

Da also d nicht $= \frac{\nu}{\mu}c$ und nicht $< \frac{\nu}{\mu}c$, desgleichen d nicht $= \frac{\nu+1}{\mu}c$ und nicht $> \frac{\nu+1}{\mu}c$, so kann d nur $> \frac{\nu}{\mu}c$ und $< \frac{\nu+1}{\mu}c$ sein. Die Grösse d hat folglich die verlangte Eigenschaft.

Es mögen nun a und b ein gemeinschaftliches Maass haben oder nicht, so beweisen wir, dass nicht zwei verschiedene vierte Grössen, d und e, von denen $e > d$ ist, die verlangte Eigenschaft haben können.

Man nehme an, dieses sei möglich; dann nehme man einen aliquoten Theil der Grösse c, welcher $< e - d$ ist, den $m$ten, so oft von e weg, als es angeht, so wird wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{m}c$ zwischen d und e liegen; es sei demnach $\frac{n}{m}c > d$ und $< e$, so müsste, weil sowohl d als e die verlangte Eigenschaft hat, $\frac{n}{m}a > b$ und $< b$ sein. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und es giebt zu a, b und c nur Eine vierte Grösse von der verlangten Eigenschaft.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn 4 Grössen die im vorigen Paragraphen angeführte Eigenschaft haben, und man nimmt von der 1sten und 3ten beliebige Gleichvielfache, und von der 2ten und 4ten, wenn auch nicht Ebensovielfache, doch unter sich Gleichvielfache, so ist allemal das Vielfache der 1sten $\gtreqless$ als das Vielfache der 2ten, je nachdem das Vielfache der 3ten $\gtreqless$ ist als das Vielfache der 4ten.

Beweis. Die 4 Grössen seien a, b, c, d, so wollen wir beweisen, dass $na \gtreqless mb$ (wo n und m beliebige ganze Zahlen bedeuten), je nachdem $nc \gtreqless md$. Nach der Voraussetzung ist $\frac{n}{m} a \gtreqless b$, je nachdem $\frac{n}{m} c \gtreqless d$, also (wenn man beiderseits das $m$fache nimmt) $na \gtreqless mb$, je nachdem $nc \gtreqless md$.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn 4 Grössen die in §. 3. angeführte Eigenschaft haben, so haben sie auch die in §. 2. angeführte Eigenschaft.

Beweis. Wenn die 4 Grössen a, b, c, d so beschaffen sind, dass $na \gtreqless mb$, je nachdem $nc \gtreqless md$, welche ganze Zahlen man auch für m und n setzen mag, so ist (wenn man beiderseits den $m$ten Theil nimmt) $\frac{n}{m} a \gtreqless b$, je nachdem $\frac{n}{m} c \gtreqless d$, d. h. die 4 Grössen a, b, c, d haben die in §. 2. angeführte Eigenschaft.

§. 5. Zusatz.

Da $mb \gtreqless na$ (d. h. mb kleiner oder ebensogross oder grösser als na), je nachdem $na \gtreqless mb$, und ebenso $md \gtreqless nc$, je nachdem $nc \gtreqless md$, so folgt, dass man die 4 Grössen a, b, c, d auch in der Ordnung b, a, d, c schreiben kann. Dass man a, b, c, d auch in der Ordnung c, d, a, b, desgleichen b, a, d, c auch in der Ordnung d, c, b, a schreiben kann, versteht sich nach dem bisher Entwickelten von selbst.

§. 6. Erklärung.

Von den 4 Grössen a, b, c, d, welche die bisher beschriebene Eigenschaft haben, sagt man, dass sie in Proportion stehen oder eine Proportion bilden, oder dass sich a zu b verhalte wie c zu d, oder b zu a wie d zu c, oder c zu d wie a zu b, oder d zu c wie b zu a, und schreibt:

$$a:b=c:d, \text{ oder } b:a=d:c, \text{ oder } c:d=a:b, \text{ oder } d:c=b:a.$$

Die 1ste und 2te Grösse heissen, auf diese Art zusammengestellt, das vorangehende Verhältniss, die 3te und 4te Grösse aber das nachfolgende Verhältniss, und man sagt

von 2 Verhältnissen, welche eine Proportion bilden, dass sie einander gleich seien. Jedes Verhältniss besteht aus einem vorangehenden und einem nachfolgenden Gliede, und in jeder Proportion heissen die Glieder Eines Verhältnisses, oder auch das vorangehende Glied des einen und das vorangehende Glied des andern Verhältnisses, oder auch das nachfolgende Glied des einen und das nachfolgende Glied des andern Verhältnisses, gleichnamige (homologe) Glieder, die beiden mittleren Glieder aber oder die beiden äusseren ungleichnamige Glieder. Ein Verhältniss heisst dagegen grösser als ein anderes, wenn das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses sich zum 2ten Glied des 1sten Verhältnisses verhält wie eine Grösse, welche $>$ ist als das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses, zum 2ten Glied des 2ten Verhältnisses, und man schreibt in diesem Fall (wenn $a:b$ und $c:d$ die beiden Verhältnisse sind) $a:b>c:d$. Und ein Verhältniss heisst kleiner als ein anderes, wenn das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses sich zum 2ten Glied des 1sten Verhältnisses verhält wie eine Grösse, welche $<$ ist als das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses, zum 2ten Glied des 2ten Verhältnisses, und man schreibt in diesem Fall $a:b<c:d$.

§. 7. Zusatz.

Wenn in zwei Proportionen 3 Glieder der einen den 3 entsprechenden der andern einzeln genommen gleich sind, so sind auch die noch übrigen Glieder (mögen dies nun der Ordnung nach die 1sten oder die 2ten oder die 3ten oder die 4ten sein) einander gleich, d. i.

$$\frac{\begin{array}{c}a:b=c:d\\ e:b=c:d\end{array}}{a=e}\qquad \frac{\begin{array}{c}a:b=c:d\\ a:e=c:d\end{array}}{b=e}\qquad \frac{\begin{array}{c}a:b=c:d\\ a:b=e:d\end{array}}{c=e}\qquad \frac{\begin{array}{c}a:b=c:d\\ a:b=c:e\end{array}}{d=e.}$$

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen 2 Glieder der einen den beiden entsprechenden der andern einzeln genommen gleich sind, so sind die noch übrigen Glieder der einen Proportion entweder den entsprechenden der andern einzeln genommen, gleich, oder, wenn es gleichnamige Glieder sind, in der einen Proportion grösser als in der andern, und, wenn es ungleichnamige Glieder sind, das eine der beiden übrigen Glieder in der einen Proportion grösser als in der andern, und das noch übrige Glied in der ersten Proportion kleiner als in der andern.

Beweis. 1) Wenn die 1sten und 3ten Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $a:e=c:f$, und $e>b$, so beweisen wir, dass auch $f>d$ sei. Man nehme einen aliquoten Theil der Grösse a, welcher $<e-b$ ist, den $m$ten, von e so oft weg, als es angeht, so wird wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{m}a$ zwischen b und e fallen; es sei demnach

$\frac{n}{m}a > b$ und $< e$, so ist nach dem Begriff der Proportion auch $\frac{n}{m}c > d$ und $< f$, folglich um so mehr $f > d$.

2) Wenn die 1sten und 2ten Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $a:b = e:f$, und $e > c$, so beweisen wir, dass auch $f > d$ sei. Es mögen erstlich a und b ein gemeinschaftliches Maass haben; es sei $b = \frac{n}{m}a$, so ist nach dem Begriff der Proportion auch $d = \frac{n}{m}c$, und $f = \frac{n}{m}e$. Da nun $e > c$, so ist auch $\frac{n}{m}e > \frac{n}{m}c$, d. i. $f > d$. Wenn aber a und b kein gemeinschaftliches Maass haben, so sei

$b > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$	$d > \frac{n}{m}c$ und $< \frac{n+1}{m}c$	$f > \frac{n}{m}e$ und $< \frac{n+1}{m}e$
$b > \frac{p}{2m}a$ und $< \frac{p+1}{2m}a$	$d > \frac{p}{2m}c$ und $< \frac{p+1}{2m}c$	$f > \frac{p}{2m}e$ und $< \frac{p+1}{2m}e$
$b > \frac{q}{4m}a$ und $< \frac{q+1}{4m}a$	$d > \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$	$f > \frac{q}{4m}e$ und $< \frac{q+1}{4m}e$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

so ist, weil $e > c$, und die Unterschiede durch fortgesetzte Halbirung kleiner werden als jede gegebene Grösse derselben Art, f wenigstens nicht kleiner als d. Es kann aber auch f nicht $= d$ sein, weil sonst (nach dem vorigen Paragraphen) $e = c$ wäre, gegen die Voraussetzung. Folglich ist auch in diesem Fall $f > d$.

3) Es sei $a:b = c:d$, und $a:e = f:g$, und $e > b$, und $f > c$, so ist (nach Nro. 1) und Nro. 2)) um so mehr $g > d$.

4) Wenn die mittleren Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $e:b = c:f$, und $e > a$, so beweisen wir, dass $f < d$. Erstlich kann f nicht $= d$ sein, weil sonst auch $e = a$ wäre, gegen die Voraussetzung. Ferner kann f nicht $> d$ sein, weil sonst aus den Proportionen $c:d = a:b$ und $c:f = e:b$ nach Nro. 3) folgen würde $b > b$, welches ungereimt ist. Folglich ist $f < d$.

5) Wenn die 2ten und 4ten Glieder gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $e:b = f:d$, und $e > a$, so beweisen wir, dass auch $f > c$. Aus $a:b = c:d$ folgt durch Umkehrung $b:a = d:c$, aus $e:b = f:d$ aber $b:e = d:f$, aus $b:a = d:c$ und $b:e = d:f$ aber nach Nro. 1) $f > c$.

6) Wenn die 3ten und 4ten Glieder gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $e:f = c:d$, und $e > a$, so beweisen wir, dass auch $f > b$ sei. Aus $a:b = c:d$ folgt $c:d = a:b$, aus $e:f = c:d$ aber $c:d = e:f$, aus $c:d = a:b$ und $c:d = e:f$ aber nach Nro. 2) $f > b$.

7) Wenn die äusseren Glieder gleich sind. Es sei $a:b = e:d$, und $a:e = f:d$, und $e > b$, so beweisen wir, dass $f < c$ sei. Aus

$a:b=c:d$ folgt $b:a=d:c$, aus $a:e=f:d$ aber $e:a=d:f$, aus $b:a=d:c$ und $e:a=d:f$ aber nach Nro. 4) $f<c$.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn $a:b>c:d$, so ist $b:a<d:c$, desgleichen $c:d<a:b$, dagegen wiederum $d:c>b:a$.

Beweis. Wenn $a:b>c:d$, und $a:b=e:d$, so ist nach §. 6. $e>c$. Aus $a:b=e:d$ folgt $b:a=d:e$. Macht man nun $b:a=f:c$, so ist, weil $c<e$, nach §. 8. auch $f<d$, folglich $b:a<d:c$. Aus $a:b=e:d$ folgt $e:d=a:b$. Macht man nun $c:d=g:b$, so ist, weil $c<e$, nach §. 8. auch $g<a$, also $c:d<a:b$. Aus $c:d=g:b$ folgt durch Umkehrung $d:c=b:g$. Macht man nun $d:c=h:a$, so ist, weil $a>g$, nach §. 8. auch $h>b$, also $d:c>b:a$.

§. 10. Erklärung.

Eine Proportion, worin die mittleren Glieder gleich sind, heisst eine stetige, eine solche aber, worin die mittleren Glieder nicht gleich sind, eine discrete. In einer stetigen Proportion heisst das mittlere Glied die mittlere Proportionale zwischen den beiden äusseren Gliedern. Wenn in einer Reihe gleichartiger Grössen die 1ste sich zur 2ten verhält wie die 2te zur 3ten, die 2te zur 3ten wie die 3te zur 4ten, u. s. w., so heisst die Reihe eine geometrische Reihe, und die zwischen dem 1sten und letzten Gliede derselben enthaltenen Glieder die erste, zweite, dritte . . . mittlere stetige Proportionale zwischen dem 1sten und letzten Gliede.

§. 11. Lehrsatz.

Zwischen jeden zwei gleichartigen Grössen findet allemal eine, aber auch nur Eine mittlere Proportionale statt, und diese ist, wenn die beiden äusseren Glieder einander gleich sind, eben so gross, wenn aber die äusseren Glieder ungleich sind, grösser als das kleinere und kleiner als das grössere von beiden Gliedern.

Beweis. Man lasse, bei ungeändertem 1sten Gliede a, das mittlere von dem Werthe a an stetig wachsen, so ist aus dem Begriffe der Proportion klar, dass das letzte Glied, anfangs $=a$, nachher $>a$ ist, aus §. 8. aber, dass auch das letzte Glied stetig wächst. Lässt man auf diese Weise das mittlere Glied über alle Grenzen hinaus wachsen, so wächst um so mehr das letzte über alle Grenzen hinaus. Lässt man dagegen das mittlere Glied von dem Werthe a an stetig abnehmen, so ist das letzte Glied, anfangs $=a$, nachher $<a$, und nimmt stetig ab. Läss man auf diese Art das mittlere Glied kleiner werden als jede gegebene Grösse derselben Art, so wird um so mehr das letzte Glied kleiner als jede gegebene Grösse derselben Art. Aus allem diesen folgt das zu Beweisende von selbst.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse doppelt so gross ist als eine andere, so hat die mittlere Proportionale zwischen beiden mit keiner von beiden ein gemeinschaftliches Maass.

Beweis. Es sei $a:b = b:2a$. Gesetzt, a und b hätten ein gemeinschaftliches Maass, und es sei $b = \frac{n}{m} a$, so wäre auch $2a = \frac{n}{m} b = \frac{nn}{mm} a$, also $2mma = nna$, also $2mm = nn$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass m und n nicht zugleich gerade Zahlen sind; wäre dieses, so könnte man $\frac{n}{m}$ in $\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}m}$ verwandeln, und mit diesem Aufheben des Bruches so lange fortfahren, bis wenigstens Eine von beiden Zahlen ungerade geworden ist. Es können aber auch m und n nicht zugleich ungerade Zahlen sein; sonst wäre $2mm$ eine gerade Zahl, und nn ungerade, also $2mm$ nicht $= nn$. Es kann auch nicht m gerade und n ungerade sein; sonst wäre wiederum $2mm$ gerade, und nn ungerade. Es kann endlich auch nicht m ungerade uud n gerade sein; sonst wäre mm ungerade, und $\frac{1}{2}nn$ gerade, also mm nicht $= \frac{1}{2}nn$, und $2mm$ nicht $= nn$. Folglich ist die Annahme falsch, und a und b haben kein gemeinschaftliches Maass.

Gesetzt, b und $2a$ hätten ein gemeinschaftliches Maass, so müssten nach dem Begriff der Proportion auch a und b ein gemeinschaftliches Maass haben. Da dies nicht ist, so haben auch b und $2a$ kein gemeinschaftliches Maass.

§. 13. Erklärung.

Zwei gleichartige Grössen, welche ein gemeinschaftliches Maass haben, heissen **commensurabel**, zwei gleichartige Grössen aber, welche kein gemeinschaftliches Maass haben, **incommensurabel**. Zwei commensurable Grössen stehen zu einander in einem **rationalen**, zwei incommensurable Grössen aber in einem **irrationalen** Verhältniss.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn 2 gleichnamige Glieder einer Proportion gleichvielmal vervielfältigt, oder statt dessen gleichvielste aliquote Theile genommen werden, so bleibt die Proportion richtig. Wenn dagegen von ungleichnamigen Gliedern das eine vervielfältigt, statt des andern aber der ebensovielste Theil genommen wird, so bleibt die Proportion richtig.

Beweis. Es sei $a:b = c:d$, so beweisen wir erstlich, dass, wenn m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, $ma:b = mc:d$. Aus $a:b = c:d$ folgt nach dem Begriff der Proportion, dass $nma \gtreqless p$ je nachdem $nmc \gtreqless pd$, und hieraus wieder, gleichfalls nach de

Begriff der Proportion, $ma:b=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $ma \gtrless npb$, je nachdem $mc \gtrless npd$, und hieraus $a:pb=c:pd$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $mna \gtrless mpb$, je nachdem $mnc \gtrless mpd$, d. i. je nachdem $nc \gtrless pd$, und hieraus $ma:mb=c:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, hieraus aber $mc:md=a:b$, d. i. $a:b=mc:md$.

Es sei $a:b=c:d$, und $\frac{a}{m}:b=e:d$, so folgt aus der letzteren Proportion

$$\begin{array}{l} a:b=me:d \\ a:b=c:d \\ \hline me=c \text{ (nach §. 7.)}, \end{array}$$

also $e=\frac{c}{m}$; also kann man statt $\frac{a}{m}:b=e:d$ schreiben $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $b:a=d:c$, also $\frac{b}{m}:a=\frac{d}{m}:c$, also $a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner, wenn man $\frac{a}{m}:e=c:d$ macht (woraus sich $a:me=c:d$ ergiebt) $me=b$, also $e=\frac{b}{m}$; also kann man statt $\frac{a}{m}:e=c:d$ schreiben $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=c:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, also $\frac{c}{m}:\frac{d}{m}=a:b$, d. i. $a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$.

Es sei $a:b=c:d$, und $ma:b=c:e$, so folgt aus der letzteren Proportion nach dem Bisherigen $a:\frac{b}{m}=c:e$. Aus $a:b=c:d$ folgt aber auch

$$\begin{array}{l} a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m} \\ \hline e=\frac{d}{m}. \end{array}$$

Also kann man statt $ma:b=c:e$ schreiben $ma:b=c:\frac{d}{m}$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, und hieraus $mc:d=a:\frac{b}{m}$, d. i. $a:\frac{b}{m}=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt auch $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$, d. i. $\frac{a}{m}:b=c:dm$. Aus $a:b=c:d$ folgt endlich $a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$, und hieraus $a:mb=\frac{c}{m}:d$.

§. 15. Zusatz.

Also kann man in jeder Proportion auch gleichnamige Glieder mit einerlei Bruch multipliciren, oder von ungleichnamigen Gliedern

das eine mit einem Bruch, und das andere mit dem umgekehrten Werthe dieses Bruches; man kann also statt $a:b=c:d$ schreiben

$$\frac{m}{n}a:b=\frac{m}{n}c:d,\ \ a:\frac{m}{n}b=c:\frac{m}{n}d,\ \ \frac{m}{n}a:\frac{m}{n}b=c:d,\ \ a:b=\frac{m}{n}c:\frac{m}{n}d,$$

$$\frac{m}{n}a:b=c:\frac{n}{m}d,\ \ a:\frac{m}{n}b=\frac{n}{m}c:d.$$

§. 16. Lehrsatz.

Wenn zwei Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie (simpliciter ex aequo) auch einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a:b=e:f$. Ist nun $\frac{n}{m}c\gtreqless d$, so ist auch $\frac{n}{m}a\gtreqless b$; ist aber $\frac{n}{m}a\gtreqless b$, so ist $\frac{n}{m}e\gtreqless f$. Folglich ist $\frac{n}{m}c\gtreqless d$, je nachdem $\frac{n}{m}e\gtreqless f$. Folglich verhält sich $c:d=e:f$.

§. 17. Zusatz.

Wenn ein Verhältniss einem andern gleich, aber > ist als ein drittes, so ist auch das 2te Verhältniss > als das 3te. Und ist ein Verhältniss einem andern gleich, aber < als ein drittes, so ist auch das 2te Verhältniss < als das dritte. Wenn ein Verhältniss > ist als ein anderes, und dieses > als ein 3tes, so ist um so mehr das 1ste Verhältniss > als das 3te. Und wenn ein Verhältniss < ist als ein anderes, und dieses < als ein 3tes, so ist um so mehr das 1ste Verhältniss < als das 3te.

§. 18. Lehrsatz.

Wenn in 2 Proportionen das 2te Glied der 1sten und das 1ste Glied der 2ten einander gleich sind, das 4te Glied der 1sten aber dem 3ten der 2ten, oder wenn das 1ste Glied der 1sten dem 2ten Glied der 2ten gleich ist und das 3te Glied der 1sten dem 4ten Glied der 2ten, so bilden (ordinatim ex aequo) auch die 4 übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei [illegible], und [illegible], so verhält sich nach § 14 (welche ganze Zahlen man auch unter m und n verstehen mag) [illegible] und [illegible]. Ist nun $ma=nc$, so hat man [illegible], also

[illegible]

Ist aber $ma > ne$, so nehme man einen aliquoten Theil der Grösse b, welcher $<$ ist als $ma-ne$, den $p$ten Theil, von ma so oft weg, als es angeht, so giebt es wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{p}b$, welches zwischen ma und ne liegt; es sei demnach $\frac{q}{p}b < ma$ und $> ne$. Aus $ma:b=mc:d$ und $b:ne=d:nf$ folgt nach §. 15. $ma:\frac{q}{p}b=mc:\frac{q}{p}d$, und $\frac{q}{p}b:ne=\frac{q}{p}d:nf$. Da nun $ma > \frac{q}{p}b$, und $\frac{q}{p}b > ne$, so ist auch $mc > \frac{q}{p}d$, und $\frac{q}{p}d > nf$, also um so mehr $mc > nf$. Ist endlich $ma < ne$, so wird auf ähnliche Art bewiesen, dass $mc < nf$. Da also $ma \gtreqless ne$, je nachdem $mc \gtreqless nf$, welche ganze Zahlen man auch statt m und n setzen mag, so verhält sich $a:e=c:f$. Es sei nun $a:b=c:d$ und $e:a=f:c$, so ist $b:a=d:c$ und $a:e=c:f$, also $b:e=d:f$.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen die ersten Glieder einander und die 3ten Glieder einander gleich sind, oder auch die 2ten Glieder einander und die 4ten Glieder einander, so bilden (was man auch ordinatim ex aequo nennt) die übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a:e=c:f$, so ist auch

$$\frac{e:a=f:c}{e:b=f:d} \quad (§.\ 18.)$$

Es sei dagegen $a:b=c:d$, und $e:b=f:d$, so ist auch

$$\frac{b:e=d:f}{a:e=c:f} \quad (§.\ 18.)$$

§. 20. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen das 2te Glied der 1sten gleich ist dem 1sten der 2ten, und das 3te der 1sten = dem 4ten der 2ten, oder wenn das 1ste Glied der 1sten gleich ist dem 2ten der 2ten und das 4te der 1sten = dem 3ten der 2ten, so bilden (perturbatim ex aequo) auch die 4 übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $b:e=f:c$, so ist nach §. 14. auch $ma:b=c:\frac{d}{m}$ und $b:ne=\frac{f}{n}:c$. Ist nun $ma=ne$, so hat man $b:ma=\frac{f}{n}:c$, also

$$ma : b = c : \frac{f}{n}$$

$$ma : b = c : \frac{d}{m}$$

$$\frac{d}{m} = \frac{f}{n} \text{ (§. 7.)}$$

also (wenn man beiderseits das $m \times n$fache nimmt) $nd = mf$. Ist aber $ma > ne$, so nehme man einen aliquoten Theil der Grösse b, welcher $< ma - ne$, den pten, von ma so oft weg, als es angeht, und es sei $\frac{q}{p} b > ne$ und $< ma$. Aus $ma : b = c : \frac{d}{m}$ und $b : ne = \frac{f}{n} : c$ folgt nach §. 15. $ma : \frac{q}{p} b = \frac{p}{q} c : \frac{d}{m}$ und $\frac{q}{p} b : ne = \frac{f}{n} : \frac{p}{q} c$. Da nun $ma > \frac{q}{p} b$, und $\frac{q}{p} b > ne$, so ist auch $\frac{p}{q} c > \frac{d}{m}$, und $\frac{f}{n} > \frac{p}{q} c$, also um so mehr $\frac{f}{n} > \frac{d}{m}$, also $mf > nd$. Ist dagegen $ma < ne$, so wird auf ähnliche Art bewiesen, dass $mf < nd$. Da also $ma \gtreqless ne$, je nachdem $mf \gtreqless nd$, so verhält sich $a : e = f : d$.

Es sei nun $a : b = e : d$, und $e : a = d : f$, so ist $b : a = d : e$, und $a : e = f : d$, also $b : e = f : c$.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen die 1sten Glieder einander gleich sind und die 4ten einander, oder auch die 2ten Glieder einander gleich und die 3ten einander, so bilden (perturbatim ex aequo) die übrigen Glieder eine Proportion so, dass die übrigen Glieder der einen Proportion die äusseren Glieder, und die übrigen Glieder der andern Proportion die mittleren Glieder werden.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a : e = f : d$, so ist auch

$$e : a = d : f$$
$$e : b = c : f \text{ (§. 20.)},$$

und daher auch $b : e = f : c$.

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $e : b = c : f$, so ist auch

$$b : e = f : c$$
$$a : e = f : d \text{ (§. 20.)}$$ und daher auch $e : a = d : f$.

§. 22. Erklärung.

Wenn man $a : b$ [illegible] mit d:e verbindet, so heisst das Verhältniss $a : e$ aus den Verhältnissen [illegible] und $f : g$ zusammengesetzt und wird durch [illegible] bezeichnet. Auf diese Art kann man so viel Verhältnisse, als man will, zusammensetzen. Es sei $a : b$ [illegible] $k = i : k$, und

$h:l=m:n$, so heisst das Verhältniss $a:l$ aus den Verhältnissen $c:d$, $f:g$, $i:k$ und $m:n$ zusammengesetzt, und wird durch $a:l = (c:d)+(f:g)+(i:k)+(m:n)$ bezeichnet. Sind die zusammenzusetzenden Verhältnisse einander gleich, so heisst das zusammengesetzte ein vielfaches Verhältniss (das doppelte, dreifache u. s. w.) und man sagt, wenn $a:b=b:c=c:d=d:e$, dass $a:e$ das Vierfache des Verhältnisses $a:b$ sei, und bezeichnet es durch $a:e=4(a:b)$.

§. 23. Lehrsatz.

Wenn eine Grössé nach zwei einfachen Verhältnissen verändert wird, so kommt einerlei Grösse heraus, in welcher Ordnung man auch die beiden Verhältnisse zusammensetzen mag, d. h. wenn man $a:b=c:d$, $b:e=f:g$, $a:h=f:g$ und $h:i=c:d$ macht, so ist $e=i$.

Beweis. Aus $a:b=c:d$ und $h:i=c:d$ folgt

simpl. ex aequo $a:b=h:i$, aus $b:e=f:h$ und $a:h=f:g$ aber
$b:e=a:h$
perturb. ex aequo $a:e=a:i$; folglich ist $e=i$.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn zwei einfache Verhältnisse einem 3ten, aus 2 Verhältnissen zusammengesetzten, Verhältniss gleich sind, so sind sie einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, $b:e=f:g$, $h:i=c:d$, und $i:k=f:g$, so beweisen wir, dass $a:e=h:k$.

Aus $a:b=c:d$ und $h:i=c:d$ folgt simpl. ex aeq. $a:b=h:i$,
aus $b:e=f:g$ und $i:k=f:g$ aber $b:e=i:k$
ordinatim ex aeq. $a:e=h:k$.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn eine Proportion aus 4 gleichartigen Gliedern besteht, so kann man die äusseren Glieder mit einander oder die mittleren Glieder mit einander verwechseln, und die Proportion bleibt richtig.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und a, b, c, d seien gleichartige Grössen, so ist $a:c=(a:b)+(b:c)$, und $b:d=(b:c)+(c:d)$, also (§. 24.) $a:c=b:d$.

§. 26. Zusatz.

Jede Proportion zwischen 4 gleichartigen Grössen kann daher, ohne ein Glied zu ändern, in 8 Ordnungen

$$a:b=c:d,\ a:c=b:d,\ b:a=d:c,\ b:d=a:c,\ c:d=a:b,$$
$$c:a=d:b,\ d:c=b:a,\ d:b=c:a$$

geschrieben werden. Man sieht hieraus, dass **jede** Ordnung zulässig ist, wofern nur die gleichnamigen Glieder gleichnamig bleiben, auch dass jede Ordnung zulässig ist, wofern nur die ungleichnamigen Glieder ungleichnamig bleiben.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse nach mehreren einfachen Verhältnissen verändert wird, so kommt einerlei Grösse heraus, nach welcher Ordnung man auch die Verhältnisse zusammensetzen mag.

Beweis. Nach §. 23. ist es einerlei, ob man die Grösse a nach den Verhältnissen $b:c$ und $d:e$ oder nach den Verhältnissen $d:e$ und $b:c$ verändert; folglich ist es auch einerlei, ob man a nach den Verhältnissen $b:c$, $d:e$ und $f:g$ oder nach den Verhältnissen $d:e$, $b:c$ und $f:g$ verändert. Folglich kann man die Ordnung $b:c$, $d:e$, $f:g$ in die Ordnung $d:e$, $b:c$, $f:g$ verwandeln. Macht man nun $a:h=b:c$, so ist es nach §. 23. einerlei, ob man h nach den Verhältnissen $d:e$ und $f:g$ oder nach den Verhältnissen $f:g$ und $d:e$ verändert; also ist es einerlei, ob man a nach den Verhältnissen $b:c$, $d:e$, $f:g$ oder nach den Verhältnissen $b:c$, $f:g$, $d:e$ verwandelt. Auf diese Art kann man nach und nach jedes der 3 Verhältnisse $b:c$, $d:e$, $f:g$ in die letzte Stelle bringen, und, während es die letzte Stelle behält, die Ordnung der beiden ersten Stellen beliebig vertauschen. Folglich kann man die 3 Verhältnisse $b:c$, $d:e$, $f:g$ überhaupt in beliebige Ordnung bringen.

Ist a nach 4 Verhältnissen $b:c$, $d:e$, $f:g$, $h:i$ zu verwandeln, so kann man, während das Verhältniss $h:i$ die letzte Stelle behält, die 3 ersten Verhältnisse in beliebige Ordnung stellen; dadurch kommt nach und nach jedes der 3 ersten Verhältnisse in die 3te Stelle, und kann dann nach §. 23. durch Verwechselung der beiden letzten Stellen in die letze Stelle kommen. Während nun jedes der 4 Verhältnisse in der letzten Stelle bleibt, kann man die 3 übrigen Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen; also kann man überhaupt alle 4 Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen.

Auf ähnliche Art macht man den Schluss von 4 Verhältnissen auf 5 u. s. w.

§. 28. Lehrsatz.

Wenn 2 einfache Verhältnisse einem 3ten, aus mehreren Ver-ltnissen zusammengesetzten Verhältnisse gleich sind, so sind e einander gleich.

Beweis. Es sei

$$\begin{array}{l|l} a:b = c:d & p:q = c:d \\ b:e = f:g & q:r = f:g \\ e:h = i:k & r:s = i:k \\ h:l = m:n & s:t = m:n \end{array}$$

o statt 4 Paar auch jede andere Anzahl Paare von Verhältnissen setzt werden kann), so beweisen wir, dass $a:l=p:t$.

Aus $a:b=c:d$ und $p:q=c:d$ folgt simpl. ex aeq. $a:b=p:q$
„ $b:e=f:g$ „ $q:r=f:g$ „ „ „ „ $b:e=q:r$
ordin. ex aeq. $a:e=p:r$
„ $e:h=i:k$ „ $r:s=i:k$ „ simpl. ex aeq. $e:h=r:s$
ordin. ex aeq. $a:h=p:s$

s. w., endlich $a:l=p:t$.

§. 29. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einem dritten gleich sind (gleichviel lche Verhältnisse einfach, und welche zusammengesetzt sind), sind sie einander gleich.

Beweis. Man setze statt jedes zusammengesetzten Verhält-ses ein ihm gleichbedeutendes einfaches, wovon man das erste ed beliebig und von beliebiger Art annehmen kann, so folgt s zu Beweisende unmittelbar aus §. 16.

§. 30. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Grössen einander leich sind, so hat die Summe der Vorderglieder zur Summe der nterglieder das nämliche Verhältniss.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und a, b, c, d gleichartig, so $ma \gtrless nb$, je nachdem $mc \gtrless nd$, also auch $ma \gtrless nb$, je nach-m $ma+mc \gtrless nb+nd$, d. i. je nachdem $m(a+c) \gtrless n(b+d)$, also $:b = a+c:b+d$.

Es sei $a:b=c:d=e:f$, und a, b, c, d, e, f gleichartig, so ist

$$\begin{array}{l} a:b = \quad a+c:b+d \\ \hline a:b = a+c+e:b+d+f. \end{array}$$

Auf ähnliche Art macht man den Schluss von 3 Verhältnissen auf 4 u. s. w.

§. 31. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, doch so, dass die Vorderglieder der beiden Verhältnisse einander ungleich, und die Hinterglieder einander ungleich sind, so hat die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder das nämliche Verhältniss.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a>c$, so ist auch $b>d$. Man mache

$$\underline{a:b=a-c:e}, \text{ so ist}$$

simpl. ex aeq. $\underline{a-c:e=c:d=a-c+c:d+e}$ (§. 30.), d. i.

$$a-c:e=a:d+e$$

$$\underline{a-c:e=a:b}$$

$$d+e=b \text{ (§. 7.), also } e=b-d.$$

Folglich kann man statt $a:b=a-c:e$ schreiben $a:b=a-c:b-d$.

§. 32. Zusatz.

Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Grössen einand[...] gleich sind, und man subtrahirt und addirt die Vorderglieder pro[...] miscue, und subtrahirt und addirt die Hinterglieder in derse[...] Ordnung, so erhält man 2 Grössen, welche in dem nämlich[...] Verhältniss stehen, z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$, [...] es ist $a+c>e$, und $a+c-e+g>i$, so ist auch $b+d>$[...] $b+d-f+h>k$, und $a:b=a+c-e+g-i:b+d-f+h-$[...] Bei diesen Subtractionen und Additionen kann man (nach §. 1[...] und §. 15.) Glieder, die zu einerlei Verhältniss gehören, auch [...] einerlei Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einerlei Bruc[...] multipliciren; z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$, und [...] ist $\frac{3}{4}a+5c>e$, und $\frac{3}{4}a+5e-e+\frac{1}{7}g>i$, so ist auch $\frac{3}{4}b+5d>$[...] $\frac{3}{4}b+5d-f+\frac{1}{7}h>k$, und $a:b=\frac{3}{4}a+5c-e+\frac{1}{7}g-i:\frac{3}{4}b+5d-f+\frac{1}{7}h-$[...]

§. 33. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (summando) das 1ste Gl[...] zur Summe der beiden ersten wie das 3te zur Summe des 3te[...] und 4ten, auch die Summe der beiden ersten Glieder zum 2te[...] wie die Summe des 3ten und 4ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so ist $ma<m(a+b)$, [...] $mc<m(c+d)$. Ist $m<n$, so ist um so mehr $ma<n(a+b)$, [...] $mc<n(c+d)$. Ist endlich $m>n$, so ist

$$\begin{array}{lcl}(m-n)\,a \gtreqless nb, & \text{je nachdem} & (m-n)\,c \gtreqless nd \\ \underline{na = na} & & \underline{nc = nc} \\ ma \gtreqless n(a+b), & \text{je nachdem} & mc \gtreqless n(c+d).\end{array}$$

Folglich ist überhaupt, welche ganze Zahlen man auch unter m und n verstehen mag, $ma \gtreqless n(a+b)$, je nachdem $mc \gtreqless n(c+d)$. Folglich verhält sich $a:a+b=c:c+d$. Da aber $b:a=d:c$, so ist auch $b:b+a=d:d+c$, d. i. $a+b:b=c+d:d$.

§. 34. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (differentiando) das 1ste Glied zur Differenz der beiden ersten wie das 3te Glied zur Differenz des 3ten und 4ten, und die Differenz der beiden ersten Glieder zum 2ten wie die Differenz des 3ten und 4ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, so ist auch $c>d$. Man mache

$$\underline{a:a-b=c:e,} \quad \text{so ist}$$

$$\text{ord. ex aeq. } a-b:b=e:d, \quad \text{also (summando) } a-b:a=e:d+e$$

$$\underline{a-b:a=e:c}$$

$$d+e=c \; (\S.7.)$$

also $e=c-d$. Statt $a:a-b=c:e$ kann man also schreiben

$$\begin{array}{rl} & a:a-b=c:c-d \\ & \underline{a:\;\;b\;=c:d} \\ \text{ord. ex aeq.} & a-b:b=c-d:d.\end{array}$$

Es sei dagegen $a:b=c:d$, und $a<b$, so ist $b:a=d:c$, und $b>a$, folglich $b:b-a=d:d-c$, und $b-a:a=d-c:c$, d. i. $b-a:b=d-c:d$, und $a:b-a=c:d-c$.

§. 35. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (summando et differentiando) die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, so verhält sich

$$\begin{array}{rl} & a+b:b=c+d:d \\ & \underline{a-b:b=c-d:d} \\ \text{ord. ex aeq.} & a+b:a-b=c+d:c-d.\end{array}$$

Es sei aber $a:b=c:d$, und $a<b$, so verhält sich

$$\begin{array}{rl} & a+b:b=c+d:d \\ & \underline{b-a:b=d-c:d} \\ \text{ord. ex aeq.} & a+b:b-a=c+d:d-c.\end{array}$$

§. 36. Lehrsatz.

Wenn mehrere Proportionen, welche aus lauter gleichen Verhältnissen bestehen, Glied für Glied zusammen addirt werden, so erhält man wieder eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei

$$\left.\begin{array}{l} a:b=c:d=e:f \\ g:h=i:k=e:f \\ l:m=n:p=e:f \\ q:r=s:t=e:f \end{array}\right\} \ldots (1)$$

(wo statt 4 Reihen auch jede beliebige Anzahl von Reihen unter einander gesetzt sein können), so beweisen wir, dass

$$a+g+l+q:b+h+m+r=c+i+n+s:d+k+p+t.$$

Aus $a:b=e:f$, $g:h=e:f$, $l:m=e:f$ und $q:r=e:f$ folgt nach §. 30.

$$a+g+l+q:b+h+m+r=e:f,$$

aus $c:d=e:f$, $i:k=e:f$, $n:p=e:f$ und $s:t=e:f$ aber

$$\frac{c+i+n+s:d+k+p+t=e:f}{\text{simpl. ex aeq. } a+g+l+q:b+h+m+r=c+i+n+s:d+k+p+t.}$$

§. 37. Zusatz.

Statt der im vorigen Paragraphen erwähnten Addition kann man auch promiscue addiren und subtrahiren, und dabei jedes Glied mit einer ganzen Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einem Bruch multipliciren; z. B. aus den oben mit (1) bezeichneten Proportionen kann man (wenn $\frac{3}{4}a+5g>\frac{1}{7}l$) schliessen:

$$\tfrac{3}{4}a+5g-\tfrac{1}{7}l+q:\tfrac{3}{4}b+5h-\tfrac{1}{7}m+r=22i+n+\tfrac{2}{5}s:22k+p+\tfrac{2}{5}t.$$

§. 38. Zusatz.

Bei der in §. 35. erwähnten Schlussart summando et differentiando kann man auch gleichnamige Glieder mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einerlei Bruch multipliciren; z. B. aus $a:b=c:d$ kann man, wenn $6a<\frac{5}{8}b$, schliessen:

$$\tfrac{1}{7}a+\tfrac{1}{3}b:\tfrac{5}{8}b-6a=\tfrac{1}{7}c+\tfrac{1}{3}d:\tfrac{5}{8}d-6c,$$

und, wenn $\frac{1}{3}b>\frac{1}{7}a$ ist,

$$\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{7}a:\tfrac{5}{8}b-6a=\tfrac{1}{3}d-\tfrac{1}{7}c:\tfrac{5}{8}d-6c.$$

§. 39. Lehrsatz.

Wenn 4 gleichartige Grössen, welche nicht sämmtlich einander gleich sind, in Proportion stehen, so sind entweder 2 und 2 einander gleich, oder es sind nur 2 einander gleich und eine grösser und eine kleiner, oder alle 4 sind ungleich; im ersten Fall sind die gleichen Glieder gleichnamig, im zweiten Fall aber die gleichen Glieder ungleichnamig und das grösste und kleinste ebenfalls unter einander ungleichnamig, im dritten Fall endlich das grösste und kleinste Glied ungleichnamig; im zweiten und dritten Fall ist die Summe des grössten und kleinsten Gliedes $>$ als die Summe der beiden übrigen Glieder.

Beweis. 1) Es sei $a:b=c:d$, und $a=b$, so ist auch $c=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

2) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, aber $=c$, so ist auch $b=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

3) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, und $b=c$, so ist a das grösste, und d das kleinste Glied, also die gleichen Glieder ungleichnamig und das grösste und kleinste ebenfalls unter einander ungleichnamig. Es ist also $a:b=b:d$. Setzt man $a=b+e$, so wird $b+e:b=b:d$, und setzt man noch $b=d+f$, so wird $d+e+f:d+f=d+f:d$, also die Summe des grössten und kleinsten Gliedes $=2d+e+f$, die Summe der beiden übrigen Glieder aber $=2d+f+f$. Aus $d+e+f:d+f=d+f:d$ folgt nach §. 34. $e:d+f=f:d$. Da in dieser Proportion das Glied $d+f>d$ ist, so ist auch $e>f$, also $2d+e+f>2d+f+f$, d. i. die Summe des grössten und kleinsten Gliedes in der Proportion $a:b=c:d$ grösser als die Summe der beiden übrigen Glieder.

4) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, auch $b>c$, so folgen die 4 Glieder a, b, c, d nach der Ordnung ihrer Grösse, vom grössten bis zum kleinsten, auf einander; wir wollen beweisen, dass $a+d>b+c$. Man setze $c=d+e$, $b=c+f$, $a=b+g$, so kann man statt $a:b=c:d$ schreiben $d+e+f+g:d+e+f=d+e:d$. Folglich ist $a+d=2d+e+f+g$, und $b+c=2d+e+f+e$. Aus $d+e+f+g:d+e+f=d+e:d$ folgt nach §. 34. $g:d+e+f=e:d$. Da in dieser Proportion das Glied $d+e+f>d$ ist, so ist auch $g>e$, also $2d+e+f+g>2d+e+f+e$, d. i. $a+d>b+c$.

5) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, aber $b<c$, so ist (weil $a>b$) $c>d$, und (weil $a>c$) $b>d$; folglich ist a das grösste und d das kleinste Glied der Proportion. Durch Verwechselung der mittleren Glieder erhält man $a:c=b:d$, woraus nach Nro. 4) folgt, dass $a+d>b+c$.

6) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, aber $a=d$, so ist c das grösste, und b das kleinste Glied der Proportion. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach Nro. 3) $c+b>d+a$.

7) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, $a>d$, so ist (weil $c>a$) $d>b$; also ist c das grösste, und b das kleinste Glied der Proportion. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach Nro. 5) $c+b>d+a$.

8) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, $a<d$, so ist (weil $a>b$) $c>d$; also ist c das grösste, und b das kleinste Glied. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach 4) $c+b>d+a$.

9) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $=c$, so ist auch $b=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

10) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $>c$, und $a=d$, so ist durch Verwechselung der mittleren Glieder $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 6).

11) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $>c$, auch $a>d$, so ist durch Verwechselung der mittleren Glieder $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 7).

12) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a>c$, $a<d$, so ist wiederum $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 8).

13) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, und $b=c$, so ist $d:c=b:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 3).

14) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, $b>c$, so ist $d:b=c:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 4).

15) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, $b<c$, so ist $d:c=b:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 4).

§. 40. Lehrsatz.

Zwischen jeden 2 gleichartigen Grössen kann man so viel mittlere stetige Proportionalgrössen finden, als man will, aber, wenn ihre Anzahl gegeben ist, immer nur dieselben Grössen.

Beweis. Es seien a und b zwei gleichartige Grössen, und $b>a$; es sollen 3 mittlere stetige Proportionalen gefunden werden. Man bilde die geometrische Reihe a, c, d, e, f, und lasse c von dem Werthe a an stetig über alle Grenzen hinaus wachsen, so ist (nach dem vorigen Paragraphen) stets $c-a>d-c$, $d-c<e-d$, und $e-d>f-e$, also $f-a>4(c-a)$. Da nun $a:c=c:d$, und c stetig wächst, so wächst auch d stetig; da $a:c=d:e$, und c und d stetig wachsen, so wächst auch e stetig; da $a:c=e:f$, und c und e stetig wachsen, so wächst auch f stetig. Da aber $c-a$ über alle Grenzen hinaus wächst, so wächst um so mehr $f-a$ (welche Differenz nach Obigem $>4(c-a)$ ist) über alle Grenzen hinaus; folglich wächst f über alle Gränzen hinaus. Es muss also einen, aber auch nur Einen Werth von c geben, für welchen $f=b$ ist, und diesem Werth von c entspricht nur Ein Werth von d und nur Ein Werth von e.

Es sei aber nun $b<a$, so lassen sich, weil $a>b$ ist, zwischen b und a so viele mittlere Proportionalen finden, als man will, aber, wenn ihre Anzahl gegeben ist, immer nur dieselben Grössen. Diese mittleren Proportionalen sind aber, in umgekehrter Ordnung, die mittleren Proportionalen zwischen a und b.

§. 41. Zusatz.

Zu jedem gegebenen Verhältniss ist allemal ein, aber auch nur Ein Verhältniss möglich, welches, eine gegebene Anzahl mal mit sich selbst zusammengesetzt, das gegebene Verhältniss giebt.

§. 42. Erklärung.

Ein solches Verhältniss heisst ein getheiltes Verhältniss (das halbe Verhältniss, das gedrittheilte Verhältniss, das geviertheilte Verhältniss, u. s. w.), und wird durch einen vorgesetzten Bruch bezeichnet; so ist $\frac{1}{4}(a:b)$ das Verhältniss von a zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b.

§. 43. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einander gleich sind, so sind auch ihre gehalbtheilten, gedrittheilten Verhältnisse u. s. w. einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so beweisen wir, dass a sich z. B. zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b verhält wie c zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen c und d. Es sei $a:e=\frac{1}{4}(a:b)$, und man mache $a:e=c:f$, so ist

$$a:b = 4(a:e) = 4(c:f)$$
$$a:b = \quad c:d$$

simpl. ex aeq. $4(c:f) = c:d$, also $c:f = \frac{1}{4}(c:d)$

$$c:f = a:e = \frac{1}{4}(a:b)$$

simpl. ex aeq. $\frac{1}{4}(a:b) = \frac{1}{4}(c:d)$.

§. 44. Lehrsatz.

Anstatt ein Verhältniss zu theilen und dann zu vervielfältigen, kann man von dem Ebensovielfachen des gegebenen Verhältnisses das ebensovielste getheilte Verhältniss nehmen.

Beweis. Es seien a und b gleichartige Grössen, und m und n beliebige ganze Zahlen; wir wollen beweisen, dass $n(\frac{1}{m}(a:b)) = \frac{1}{m}(n(a:b))$. Das $m$fache des Verhältnisses $\frac{1}{m}(a:b)$ ist $a:b$, also das $m$fache des Verhältnisses $n(\frac{1}{m}(a:b)) = n(a:b)$, aber das $m$fache des Verhältnisses $\frac{1}{m}(n(a:b))$ ebenfalls $=n(a:b)$. Folglich ist (nach dem vorigen Paragraphen) $n(\frac{1}{m}(a:b)) = \frac{1}{m}(n(a:b))$.

§. 45. Erklärung.

Das Verhältniss $n(\frac{1}{m}(a:b))$ oder $\frac{1}{m}(n(a:b))$ heisst ein ge-

brochenes Verhältniss, und wird kürzer durch $\frac{n}{m}(a:b)$ ausgedrückt; $m:n$ heisst in diesem Fall das Brechungsverhältniss.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn man zwischen einer Grösse und einem aliquoten Theil derselben eine oder mehrere mittlere stetige Proportionalen nimmt, so ist entweder jede mittlere Proportionale ein aliquoter Theil jeder grösseren mittleren Proportionale, oder das getheilte Verhältniss ist ein irrationales.

Beweis. Die gegebene Grösse sei in m gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil sei a, und man mache $\frac{1}{n}(a:ma)$ $=a:b$. Ist alsdann a kein aliquoter Theil von b, so beweisen wir, dass das Verhältniss $a:b$ ein irrationales sei. Gesetzt, $a:b$ sei ein rationales Verhältniss, und es sei $b=\frac{q}{p}a$, so wäre ma $=\frac{q^n}{p^n}a$; also müsste p^n ein aliquoter Theil von q^n sein, welches aber, weil p kein aliquoter Theil von q ist, unmöglich ist. Folglich ist die Annahme falsch, und $a:b$ ein irrationales Verhältniss.

§. 47. Lehrsatz.

Jedes Verhältniss einer kleineren Grösse zu einer grösseren kann als ein vielfaches oder getheiltes oder gebrochenes Verhältniss jedes anderen Verhältnisses einer kleineren Grösse zu einer grösseren angesehen werden, und das Brechungsverhältniss ist für jedes gegebene Paar von Verhältnissen nur Eines, wenngleich nicht allemal rational.

Beweis. Es sei $a \searrow b$, und $c \searrow d$, und man mache $c:d=$[illegible]. Man theile das Verhältniss $c:d$ beliebig; man mache $\frac{1}{m}(c:d)=$[illegible]. Dann ist entweder das Verhältniss $a:b$ ein Vielfaches von $a:f$, oder es giebt 2 Vielfache $n(a:f)=a:g$ und $(n+1)(a:f)=a:k$ von der Art, dass b zwischen g und k liegt. Im letzteren Falle mache man $\frac{1}{2m}(c:d)=$ [illegible], und fahre mit der continuirlichen Halbtheilung des Verhältnisses $a:f$ fort, so erhellt das zu Beweisende ganz auf ähnliche Art wie in §. [illegible], wenn man noch §. 39. zu Hülfe nimmt.

Denn macht man [illegible] $\frac{1}{m}$ [illegible] $\frac{1}{2m}(b:k)=b:n$, $\frac{1}{4m}(b:k)=$ [illegible] so ist nach §. 39. $l-b<\frac{k-b}{m}$, [illegible]

$n-b<\frac{k-b}{2m}$, $p-b<\frac{k-b}{4m}$, u. s. w.; da man nun durch fortgesetzte Halbirungen ($\frac{k-b}{m}$, $\frac{k-b}{2m}$, $\frac{k-b}{4m}$, u. s. w.) auf eine Grösse kommt, welche kleiner ist als jede gegebene Grösse derselben Art, so kommt man um so mehr durch fortgesetzte Halbtheilung des Verhältnisses ($l-b$, $n-b$, $p-b$, u. s. w.) auf einen Unterschied, welcher kleiner ist als jede gegebene Grösse derselben Art; folglich wird um so mehr der Unterschied $h-g$ durch fortgesetzte Halbtheilung des Verhältnisses kleiner als jede gegebene Grösse derselben Art.

§. 48. Zusatz.

Dasselbe findet statt, wenn man jedes Verhältniss einer grösseren Grösse zu einer kleineren mit jedem anderen Verhältniss einer grösseren Grösse zu einer kleineren vergleicht.

XII.

Ueber die Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann.

Von

dem Herausgeber.

In verschiedenen französischen Journalen, namentlich in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées von Liouville, in den Comptes rendus de l'Académie des

sciences, und in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono, kommen seit einiger Zeit Untersuchungen über die Bestimmung einer Gränze vor, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann. Wenn ich auch diese Untersuchungen nach dem, was jetzt vorliegt, noch nicht für abgeschlossen halte, so will ich doch die mir besonders wichtig und interessant scheinenden Resultate derselben den Lesern des Archivs im Folgenden im Zusammenhange mittheilen, indem ich hoffe, dass dadurch vielleicht einer oder der andere veranlasst werden wird, diesem jedenfalls sehr interessanten Gegenstande noch weiter nachzuforschen.

§. 1.

Wenn wir zwei beliebige ganze Zahlen durch A_1, B_1 bezeichnen, so ist die Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers derselben nach der schon von Euklides gelehrten Methode bekanntlich in dem folgenden Schema enthalten:

$$
\begin{array}{l}
B_1 \mid A_1 \mid Q_1 \\
\quad \underline{B_1 Q_1} \\
\quad B_2 \mid B_1 \mid Q_2 \\
\qquad \underline{B_2 Q_2} \\
\qquad B_3 \mid B_2 \mid Q_3 \\
\qquad\quad \underline{B_3 Q_3} \\
\qquad\quad B_4 \ldots \\
\qquad\qquad B_{n-1} \mid B_{n-2} \mid Q_{n-1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{B_{n-1} Q_{n-1}} \\
\qquad\qquad\quad B_n \mid B_{n-1} \mid Q_n \\
\qquad\qquad\qquad \underline{B_n Q_n} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

wo die Grössen

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4 \ldots B_{n-1},\ B_n$$

eine fortwährend abnehmende Reihe bilden, und der letzte Divisor B_n, bei welchem die Division aufgeht, welcher Fall bekanntlich immer endlich einmal eintreten muss, der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen A_1, B_1 ist.

Aus dieser Darstellung ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + B_4, \\
&\ldots \\
B_{n-2} &= B_{n-1} Q_{n-1} + B_n, \\
B_{n-1} &= B_n Q_n
\end{aligned}
$$

also, wenn man mit D dividirt:

$$\frac{A_1}{D} = \frac{B_1}{D} Q_1 + \frac{B_2}{D},$$

$$\frac{B_1}{D} = \frac{B_2}{D} Q_2 + \frac{B_3}{D},$$

$$\frac{B_2}{D} = \frac{B_3}{D} Q_3 + \frac{B_4}{D},$$

u. s. w.

$$\frac{B_{n-2}}{D} = \frac{B_{n-1}}{D} Q_{n-1} + \frac{B_n}{D},$$

$$\frac{B_{n-1}}{D} = \frac{B_n}{D} Q_n.$$

Ist nun D ein Theiler von A_1 und B_1, so sind offenbar auch

$$\frac{B_2}{D}, \frac{B_3}{D}, \frac{B_4}{D}, \ldots \frac{B_{n-1}}{D}, \frac{B_n}{D}$$

sämmtlich ganze Zahlen, und die nicht verschwindenden Grössen

$$\frac{B_1}{D}, \frac{B_2}{D}, \frac{B_3}{D}, \frac{B_4}{D}, \ldots \frac{B_{n-1}}{D}, \frac{B_n}{D}$$

bilden eine fortwährend abnehmende Reihe. Auch ist klar, dass $\frac{B_n}{D}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{A_1}{D}$ und $\frac{B_1}{D}$ ist. Hieraus ergiebt sich, dass man, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1 zu finden, und um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{A_1}{D}$ und $\frac{B_1}{D}$ zu erhalten, ganz dieselbe Anzahl von Divisionen machen muss. Weil nun B_n ein Theiler von A_1 und B_1 ist, so kann man im Vorhergehenden $D = B_n$ setzen, und man wird also, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1, und um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{A_1}{B_n}$ und $\frac{B_1}{B_n}$ zu finden, immer ganz dieselbe Anzahl von Divisionen zu machen haben. Deshalb wollen wir im Folgenden annehmen, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind, oder wir wollen, was offenbar dasselbe ist, $B_n = 1$ setzen, woraus sich nach der Natur des angewandten Verfahrens ganz von selbst ergiebt, dass die Grössen

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}$$

sämmlich grösser als die Einheit sind, und also der kleinste Werth, welchen eine jede derselben erhalten kann, 2 ist.

§. 2.

Wenn nun B_{k-1}, B_k, B_{k+1} drei beliebige einander ben barte Glieder der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n$$

sind; so haben wir nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1},$$

aus welcher sich ergiebt, dass immer

$$B_{k-1} \geqq B_k + B_{k+1}$$

ist. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$B_n = 1, \quad B_{n-1} \geqq 2.$$

Also ist offenbar kein Glied der Reihe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, B_{n-4}, B_{n-5}, \ldots .$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots .$$

welche so gebildet ist, dass vom dritten Gliede an jedes Gl die Summe der beiden unmittelbar vorhergehenden ist. Bezeich wir folglich die Glieder dieser Reihe durch

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_6, \mathfrak{B}_7, \ldots .$$

und setzen also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 &= 1, \\
\mathfrak{B}_2 &= 2, \\
\mathfrak{B}_3 &= \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \\
\mathfrak{B}_4 &= \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3, \\
\mathfrak{B}_5 &= \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_4, \\
\mathfrak{B}_6 &= \mathfrak{B}_4 + \mathfrak{B}_5, \\
\mathfrak{B}_7 &= \mathfrak{B}_5 + \mathfrak{B}_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

so ist kein Glied der Reihe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, B_{n-4}, B_{n-5}, \ldots .$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_6, \mathfrak{B}_7, \ldots .$$

welche wir im Folgenden die Reihe (I) nennen wollen. Also ist, wenn man wie im Vorhergehenden, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1 zu finden, n Divisionen zu machen genöthigt war, immer

$$B_1 \overline{\overline{>}} \mathfrak{B}_n,$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn überhaupt $\mathfrak{B}_\mu$ das erste, B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) ist, die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, nicht grösser als $\mu-1$ ist, weil, wenn die Anzahl dieser Divisionen μ wäre, nach dem Obigen

$$B_1 \overline{\overline{>}} \mathfrak{B}_\mu,$$

folglich $\mathfrak{B}_\mu$ nicht das erste, B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) sein würde, wie doch angenommen wurde. Wenn man also eine Grösse finden will, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers der Zahlen A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, so verfahre man auf folgende Art:

In der Reihe (I) suche man das erste Glied auf, welches grösser als B_1 ist; dann kann die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht grösser als die Anzahl der diesem Gliede vorhergehenden Glieder der Reihe (I) sein.

Wenn auch im Vorhergehenden angenommen worden ist, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sein sollen, so kann man diese von Lionnet in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, redigé par Terquem et Gerono. Décembre 1845. p. 622. gegebene Regel doch offenbar auch anwenden, wenn die in Rede stehende Voraussetzung nicht erfüllt ist; nur wird man dann nicht die niedrigste Gränze finden, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann; eine niedrigere Gränze wird sich immer ergeben, wenn man die Regel auf die Quotienten anwendet, welche man erhält, wenn man A_1 und B_1 durch einen ihrer gemeinschaftlichen Theiler dividirt, und die niedrigste Gränze bekommt man durch die Anwendung der Regel auf die Quotienten, welche man erhält, wenn A_1 und B_1 durch ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden, was wir durch das folgende Beispiel erläutern wollen.

Die Reihe (I) ist

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181, ...

Ist nun $A_1 = 2904$, $B_1 = 1122$, so ist das erste B_1 übersteigende Glied dieser Reihe 1597, und die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 2904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, ist folglich 15. Dividiren wir aber 2904 und 1122 durch 11, so können wir $A_1 = 264$, $B_1 = 102$ setzen, und das erste B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) ist folglich 144, die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 1904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, also 10. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von 2904 und 1122 ist 66, so dass wir also $A_1 = 44$, $B_1 = 17$ setzen können, wo dann das erste B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) 21, also die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 2904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, 6 ist. Die Richtigkeit hiervon zeigt die folgende Rechnung:

```
1122 | 2904 | 2
       2244
        660 | 1122 | 1
               660
               462 | 660 | 1
                     462
                     198 | 462 | 2
                           396
                            66 | 198 | 3
                                 198
                                   0
```

§. 3.

Eine andere Regel hat der scharfsinnige Lamé in den *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* 28. Octobre 1844. gegeben, zu welcher man auf folgende Weise gelangen kann.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$B_n = 1,$$

$$B_{n-1} \geqq 2,$$

$$B_{n-2} \geqq 3,$$

$$B_{n-3} \geqq 5,$$

$$B_{n-4} \geqq 8$$

und

$$B_{n-5} \geqq 13, \quad B_{n-6} \geqq 21;$$

$$B_{n-5} > 1 \, . \, 10,$$
$$B_{n-6} > 2 \, . \, 10,$$
$$B_{n-7} > 3 \, . \, 10,$$
$$B_{n-8} > 5 \, . \, 10,$$
$$B_{n-9} > 8 \, . \, 10$$

$$B_{n-10} > 13 \, . \, 10, \quad B_{n-11} > 21 \, . \, 10;$$

$$B_{n-10} > 1 \, . \, 10^2,$$
$$B_{n-11} > 2 \, . \, 10^2,$$
$$B_{n-12} > 3 \, . \, 10^2,$$
$$B_{n-13} > 5 \, . \, 10^2,$$
$$B_{n-14} > 8 \, . \, 10^2$$

$$B_{n-15} > 13 \, . \, 10^2, \quad B_{n-16} > 21 \, . \, 10^2$$

$$B_{n-15} > 1 \, . \, 10^3,$$
$$B_{n-16} > 2 \, . \, 10^3,$$
$$B_{n-17} > 3 \, . \, 10^3,$$
$$B_{n-18} > 5 \, . \, 10^3,$$
$$B_{n-19} > 8 \, . \, 10^3$$

$$B_{n-20} > 13 \, . \, 10^3, \quad B_{n-21} > 21 \, . \, 10^3;$$

$$B_{n-20} > 1 \, . \, 10^4,$$
$$B_{n-21} > 2 \, . \, 10^4,$$
$$B_{n-22} > 3 \, . \, 10^4,$$
$$B_{n-23} > 5 \, . \, 10^4,$$
$$B_{n-24} > 8 \, . \, 10^4$$

$$B_{n-25} > 13 \, . \, 10^4, \quad B_{n-26} > 21 \, . \, 10^4.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Es ist also unter der Voraussetzung, dass $n > 5k$ ist, immer

$$B_{n-5k} \geqq 10^k.$$

Wenn nun, indem N die Anzahl der Ziffern von B_1 bezeichnet, $n > 5N$ wäre, so wäre nach dem Vorhergehenden

$$B_{n-5N} \geqq 10^N;$$

und die Anzahl der Ziffern von B_{n-5N} wäre also mindestens $N+1$. Folglich wäre, da

$$B_1 \geqq B_{n-5N}$$

ist, auch die Anzahl der Ziffern von B_1 mindestens $N+1$, und demnach nicht bloss N, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher kann nicht $n > 5N$ sein, und es ist folglich immer $n \leqq 5N$, welches uns zu dem folgenden zuerst von Lamé gefundenen Satze führt:

Die Anzahl der zu der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erforderlichen Divisionen kann nie die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl B_1 übersteigen.

Auch für diese Regel gilt die schon oben gemachte Bemerkung, dass es bei deren Anwendung nicht unbedingt nöthig ist, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind. Natürlich wird man aber die niedrigste Gränze erhalten, wenn dies der Fall ist. Für die Zahlen 2904 und 1122 liefert uns die Regel von Lamé die Zahl 20 als Gränze, welche höher ist als die Gränze 15, welche uns oben die Regel von Lionnet lieferte. Für die Zahlen 264 und 102 liefert uns die Regel von Lamé die Gränze 15; aus der Regel von Lionnet ergab sich 10 als Gränze. Für die Zahlen 44 und 17 liefert uns die Regel von Lamé die Gränze 10; aus der Regel von Lionnet ergab sich 6 als Gränze. Hieraus erhellet, dass die Regel von Lionnet der Regel von Lamé vorzuziehen ist, wenn auch der von letzterem gefundene Satz allerdings an sich ein besonderes Interesse darbietet.

§. 4.

Es seien jetzt wieder B_{k-1}, B_k, B_{k+1} drei einander benachbarte Glieder der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n.$$

Wenn $B_k \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_{k-1}$ ist, so ist, weil bekanntlich immer B_{k+1}
k ist, $B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}$. Wäre aber zugleich $B_k > \frac{1}{2} B_{k-1}$ und
ı $\overset{=}{>} \frac{1}{2} B_{k-1}$, so wäre offenbar

$$B_k Q_k + B_{k+1} > B_{k-1},$$

ungereimt ist, weil bekanntlich

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1}$$

Wenn also $B_k > \frac{1}{2} B_{k-1}$ ist, so ist $B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}$, und es
olglich immer

$$B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}.$$

Hiernach ist also

$$B_3 < \frac{1}{2} B\ ,$$

$$B_4 < \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_5 < \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_6 < \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_7 < \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

Ist nun $B_2 \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_1$, so ist:

$$B_3 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_4 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_5 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_6 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_7 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_8 < \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_9 < \frac{1}{2^4} B_1,$$

u. s. w.

Ist aber $B_2 > \frac{1}{2} B_1$, so ist, weil bekanntlich doch $B_2 < B_1$ ist:

$$B_3 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_4 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_5 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_6 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_7 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_8 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

u. s. w.

Wenn also $B_2 \leqq \frac{1}{2} B_1$ ist, so ist, jenachdem n eine g oder eine ungerade Zahl ist,

$$B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1 \text{ oder } B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} B_1,$$

und folglich, weil bekanntlich $B_n = 1$ ist:

$$B_1 > 2^{\frac{n}{2}} \text{ oder } B_1 > 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ist nun 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$2^\mu \geqq 2^{\frac{n}{2}} \text{ oder } 2^\mu \geqq 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also

$$\frac{n}{2} \leqq \mu \text{ oder } \frac{n-1}{2} \leqq \mu,$$

und folglich

$$n \overset{=}{<} 2\mu \text{ oder } n \overset{=}{<} 2\mu + 1.$$

Wenn aber $B_2 > \frac{1}{2} B_1$ ist, so ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1 \text{ oder } B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} B_1,$$

und folglich, weil bekanntlich $B_n = 1$ ist:

$$B_1 > 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ oder } B_1 > 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ist nun wieder 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$2^\mu \overset{=}{>} 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ oder } 2^\mu \overset{=}{>} 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also

$$\frac{n-2}{2} \overset{=}{<} \mu \text{ oder } \frac{n-1}{2} \overset{=}{<} \mu,$$

und folglich

$$n \overset{=}{<} 2\mu + 2 \text{ oder } n \overset{=}{<} 2\mu + 1.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2 ist, so kann, jenachdem $B_2 \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_1$ oder $B_2 > \frac{1}{2} B_1$ ist, die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, respective nicht grösser als $2\mu+1$ und nicht grösser als $2\mu+2$ sein.

Lionnet giebt a. a. O. p. 620. als Gränze, welche die Anzahl der Divisionen nicht übersteigen kann, allgemein $2\mu+1$ an. Ich glaube aber, dass nur der Ausdruck des Satzes, wie ich denselben so eben gegeben habe, richtig ist. Wenigstens sehe ich jetzt nicht, wie man durch ganz sichere Schlüsse zu der von Lionnet angegebenen, nach seiner Meinung allgemein gültigen Gränze gelangen kann, glaube aber, wie ich schon im Eingange bemerkt habe, dass dieser Gegenstand überhaupt noch nicht als vollständig erledigt betrachtet werden darf, und halte weitere Untersuchungen über denselben jedenfalls für sehr dankenswerth.

§. 5.

Man kann bei der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen sich auch der folgenden, von der gewöhnlichen etwas verschiedenen Methode bedienen.

In allen den Fällen nämlich, wo bei Anwendung der gewöhnlichen Methode der bleibende Rest grösser als die Hälfte des entsprechenden Divisors ist, vermehre man den Quotienten um Eins, ziehe von dem Producte des Divisors und Quotienten den Dividendus ab, und verfahre sonst übrigens ganz wie bei der gewöhnlichen Methode, d. h. man führe die Rechnung in der angegebenen Weise so lange fort, bis man auf einen verschwindenden Rest kommt, wo dann immer der entsprechende Divisor der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen ist.

Bezeichnen wir, um die so eben angedeutete Methode etwas näher zu betrachten, die beiden gegebenen Zahlen wieder durch A_1 und B_1, die gebrauchten Divisoren durch

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \ldots$$

und die entsprechenden Quotienten durch

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, \ldots;$$

also die entsprechenden Reste durch

$$B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, \ldots;$$

so haben wir, wenn

$$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, \ldots$$

gewisse positive gerade oder ungerade ganze Zahlen bezeichnen, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + (-1)^{i_1} . B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + (-1)^{i_2} . B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + (-1)^{i_3} . B_4, \\
B_3 &= B_4 Q_4 + (-1)^{i_4} . B_5,
\end{aligned}$$

u. s. w.

von denen wir eine beliebige überhaupt durch

$$B_{k-1} = B_k Q_k + (-1)^{i_k} . B_{k+1}$$

bezeichnen wollen.

Wenn i_k eine gerade Zahl ist, so ist nach dem Obigen

$$B_{k+1} \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_k.$$

Wenn dagegen i_k eine ungerade Zahl ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$B_{k-1} - B_k (Q_k - 1) > \frac{1}{2} B_k,$$

d. i.

$$B_{k-1} - B_k Q_k + B_k > \frac{1}{2} B_k,$$

folglich

$$B_k Q_k - B_{k-1} < B_k - \frac{1}{2} B_k,$$

d. i.

$$B_{k+1} < \frac{1}{2} B_k.$$

Wenn man also das oben angegebene Verfahren anwendet, so übersteigt kein Rest die Hälfte des entsprechenden Divisors.

Zugleich erhellet hieraus von selbst, dass

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \ldots.$$

eine Reihe fortwährend abnehmender ganzer Zahlen ist, welche also jederzeit endlich einmal abbrechen, d. h. auf ein verschwindendes Glied führen muss.

Ist nun B_{n+1} der verschwindende Rest, auf welchen man nach dem Vorhergehenden immer endlich einmal kommen muss, so haben wir die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + (-1)^{i_1} . B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + (-1)^{i_2} . B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + (-1)^{i_3} . B_4, \\
&\text{u. s. w.} \\
B_{n-2} &= B_{n-1} Q_{n-1} + (-1)^{i_{n-1}} . B_n, \\
B_{n-1} &= B_n Q_n.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhellet leicht, dass B_n ein gemeinschaftlicher Theiler von A_1 und B_1 ist. Eben so leicht erhellet aber aus denselben auch, dass jeder gemeinschaftliche Theiler von

A_1 und B_1 auch ein Theiler von B_n sein muss, woraus sich nach der bekannten Schlussweise ergiebt, dass B_n der grösste gemeinschaftliche Theiler von A_1 und B_1 ist, wie behauptet wurde.

Im Folgenden wollen wir nun wieder annehmen, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind, also $B_n = 1$ ist, wozu wir aus ganz ähnlichen Gründen wie in §. 1. berechtigt sind.

§. 6.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen haben wir die Gleichung:

$$B_{k-1} = B_k\, Q_k + (-1)^{i_k} \,.\, B_{k+1},$$

wo

$$B_k \leqq \frac{1}{2} B_{k-1}, \quad B_{k+1} \leqq \frac{1}{2} B_k;$$

also

$$B_{k-1} \geqq 2 B_k, \quad B_k \geqq 2 B_{k+1}$$

ist. Folglich ist

$$\frac{B_{k-1}}{B_k} \leqq 2.$$

Ist nun i_k eine gerade Zahl, so ist, wie aus dem Vorhergehenden und der Natur der Methode auf der Stelle erhellet, jederzeit $Q_k \geqq 2$, also, wegen der Gleichung

$$B_{k-1} = B_k\, Q_k + B_{k+1},$$

offenbar

$$B_{k-1} \geqq 2 B_k + B_{k+1}.$$

Ist dagegen i_k eine ungerade Zahl, so erhellet eben so leicht, dass immer $Q_k - 1 \geqq 2$, also $Q_k \geqq 3$, und folglich, wegen der Gleichung

$$B_{k-1} = B_k\, Q_k - B_{k+1},$$

offenbar

$$B_{k-1} \geqq 3 B_k - B_{k+1}$$

oder

$$B_{k-1} \overset{=}{>} 2B_k + B_k - B_{k+1}$$

ist. Nun ist aber nach dem Obigen $B_k \overset{=}{>} 2B_{k+1}$, also

$$B_k - B_{k+1} \overset{=}{>} B_{k+1},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$B_{k-1} \overset{=}{>} 2B_k + B_{k+1}.$$

Daher ist in allen Fällen

$$B_{k-1} \overset{=}{>} 2B_k + B_{k+1}.$$

Bekanntlich ist nun $B_n = 1$ und $B_{n-1} \overset{=}{>} 2B_n$. Also ist hiernach und wegen der vorhergehenden Gleichung offenbar kein Glied der Reihe

$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3},\ B_{n-4},\ B_{n-5},\ \ldots .$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ \ldots .$$

welche so gebildet ist, dass vom dritten Gliede an jedes Glied erhalten wird, wenn man zu dem doppelten vorhergehenden Gliede das vorhergehende Glied addirt. Bezeichnen wir folglich die Glieder dieser Reihe durch

$$\mathfrak{B}'_1,\ \mathfrak{B}'_2,\ \mathfrak{B}'_3,\ \mathfrak{B}'_4,\ \mathfrak{B}'_5,\ \mathfrak{B}'_6,\ \mathfrak{B}'_7,\ \ldots .$$

und setzen also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}'_1 &= 1, \\
\mathfrak{B}'_2 &= 2, \\
\mathfrak{B}'_3 &= \mathfrak{B}'_1 + 2\mathfrak{B}'_2, \\
\mathfrak{B}'_4 &= \mathfrak{B}'_2 + 2\mathfrak{B}'_3, \\
\mathfrak{B}'_5 &= \mathfrak{B}'_3 + 2\mathfrak{B}'_4, \\
\mathfrak{B}'_6 &= \mathfrak{B}'_4 + 2\mathfrak{B}'_5, \\
\mathfrak{B}'_7 &= \mathfrak{B}'_5 + 2\mathfrak{B}'_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

so ist kein Glied der Reihe

$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3},\ B_{n-4},\ B_{n-5},\ \ldots .$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}'_2, \mathfrak{B}'_3, \mathfrak{B}'_4, \mathfrak{B}'_5, \mathfrak{B}'_6, \mathfrak{B}'_7, \ldots.$$

welche wir im Folgenden die Reihe (II) nennen wollen. Hieraus ergiebt sich auf ganz ähnliche Art wie in §. 2. zur Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, die in dem folgenden Satze enthaltene Regel:

In der Reihe (II) suche man das erste Glied auf, welches grösser als B_1 ist; dann kann die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht grösser als die Anzahl der diesem Gliede vorangehenden Glieder der Reihe (II) sein.

Dass bei dieser Regel die Anwendung der in §. 5. näher charakterisirten zweiten Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers vorausgesetzt wird, braucht hier wohl nicht wiederholt in Erinnerung gebracht zu werden.

Für die Zahlen $A_1 = 2904$ und $B_1 = 1122$ liefert die vorhergehende Regel die Gränze 9. Für $A_1 = 264$ und $B_1 = 102$ erhält man die Gränze 6. Für $A_1 = 44$ und $B_1 = 17$ ergiebt sich die Gränze 4, wobei man §. 2. zu vergleichen hat. Die Richtigkeit der letzteren Gränze ergiebt sich aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{l} 1122 \mid 2904 \mid 3 \\ \quad\;\; 3366 \\ \quad\;\; \overline{462} \mid 1122 \mid 2 \\ \qquad\qquad 924 \\ \qquad\qquad \overline{198} \mid 462 \mid 2 \\ \qquad\qquad\qquad 396 \\ \qquad\qquad\qquad \overline{66} \mid 198 \mid 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 198 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{0} \end{array}$$

Die obige Regel hat Lionnet a. a. O. gegeben.

§. 7.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$B_r = 1,$$

$$B_{r-1} \overline{\overline{>}} 2$$

$$B_{r-2} \overline{\overline{>}} 3$$

und

$$B_{n-3} \geqq 12, \quad B_{n-4} \geqq 29;$$

$$\begin{aligned} B_{n-3} &> 1 . 10, \\ B_{n-4} &> 2 . 10, \\ B_{n-5} &> 5 . 10 \end{aligned}$$

$$B_{n-6} > 12 . 10, \quad B_{n-7} > 29 . 10;$$

$$\begin{aligned} B_{n-6} &> 1 . 10^2, \\ B_{n-7} &> 2 . 10^2, \\ B_{n-8} &> 5 . 10^2 \end{aligned}$$

$$B_{n-9} > 12 . 10^2, \quad B_{n-10} > 29 . 10^2;$$

$$\begin{aligned} B_{n-9} &> 1 . 10^3, \\ B_{n-10} &> 2 . 10^3, \\ B_{n-11} &> 5 . 10^3 \end{aligned}$$

$$B_{n-12} > 12 . 10^3, \quad B_{n-13} > 29 . 10^3;$$

$$\begin{aligned} B_{n-12} &> 1 . 10^4, \\ B_{n-13} &> 2 . 10^4, \\ B_{n-14} &> 5 . 10^4 \end{aligned}$$

$$B_{n-15} > 12 . 10^4, \quad B_{n-16} > 29 . 10^4.$$

man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.
Es ist also unter der Voraussetzung, dass $n > 3k$ ist, immer

$$B_{n-3k} \geqq 10^k.$$

Wenn nun, indem N die Anzahl der Ziffern von B_1 bezeichnet, kN wäre, so wäre nach dem Vorhergehenden

$$B_{n-3N} \geqq 10^N,$$

und die Anzahl der Ziffern von B_{n-3N} wäre also mindestens $N+1$. Folglich wäre, da

$$B_1 \geqq B_{n-3N}$$

ist, auch die Anzahl der Ziffern von B_1 mindestens $N+1$, und demnach nicht bloss N, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher kann nicht $n > 3N$ sein, und es ist folglich immer $n \leqq 3N$, welches uns zu dem folgenden ebenfalls von Lionnet gefundenen Satze führt:

Die Anzahl der zu der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erforderlichen Divisionen kann nie die dreifache Anzahl der Ziffern der Zahl B_1 übersteigen.

Früher als Lionnet hat Binet in dem Journal von Liouville (T. VI.) die höhere und also weniger genäherte Gränze $1 + \frac{10}{3}N$ angegeben.

§. 8.

Weil bekanntlich allgemein

$$B_{k+1} \leqq \frac{1}{2} B_k$$

ist, so ist

$$B_2 \leqq \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

und folglich

$$B_2 \leqq \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2^5} B_1,$$

u. s. w

Also ist

$$B_n \leqq \frac{1}{2^{n-1}} B_1,$$

woraus sich, weil $B_n = 1$ ist,

$$B_1 \geqq 2^{n-1}$$

ergiebt. Ist nun 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so ist

$$2^\mu \geqq 2^{n-1},$$

und folglich $n-1 \leqq \mu$, also $n \leqq \mu + 1$, was unmittelbar zu dem folgenden zuerst von Binet gefundenen Satze führt:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2 ist, so kann die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, niemals grösser als $\mu + 1$ sein.

Diesem Satze kann man noch Folgendes beifügen.

Wenn

$$B_2 \leqq \frac{1}{4} B_1$$

ist, so ist, weil

$$B_3 \leqq \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

ist:

$$B_2 \leqq \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2^5} B_1,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2^6} B_1,$$

u. s. w.

und folglich

$$B_n \leqq \frac{1}{2^n} B_1,$$

also, weil $B_n = 1$ ist,

$$B_1 \geqq 2^n.$$

Ist nun wieder 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz vo
so ist

$$2^\mu \geqq 2^n,$$

also $n \leqq \mu$, was zu dem folgenden Satze führt:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz
2 und $B_2 \leqq \frac{1}{4} B_1$ ist, so kann die Anzahl der D
sionen, welche die Aufsuchung des grössten gem
schaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, niem
grösser als μ sein.

Diese Bemerkung habe ich hier um so weniger unterdrü
wollen, weil sie der in §. 4. über den analogen von Lionnet ge
denen Satz gemachten Bemerkung entspricht, und eine Bestätig
mehr abgiebt, dass der erwähnte Satz in der ihm von Lion
gegebenen Fassung unrichtig ist, und die ihm oben durch mic
Theil gewordene Berichtigung wirklich erfordert.

Zum Schluss mag hier nun noch bemerkt werden, dass, wie aus dem Obigen sich unzweideutig ergiebt, bei der zweiten neuerlich wohl vorzüglich von Binet hervorgehobenen Methode zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen die Gränze für die Anzahl der erforderlichen Divisionen im Allgemeinen niedriger ist als bei der älteren in allen Lehrbüchern sich findenden Methode des Euklides, weshalb uns allerdings die neuere Methode recht sehr zu verdienen scheint, allgemeineren Eingang in die Lehrbücher und den arithmetischen Unterricht zu finden.

XIII.

Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Wenn sich ein materieller Punkt von einer ihrer Lage nach bekannten Stelle einer Curve aus ohne Anfangsgeschwindigkeit, einzig und allein vermöge seiner Schwere, auf der Curve selbst abwärts bewegt und in Folge dieser Bewegung nach der Zeit t an eine andere Stelle der krummen Linie gekommen ist, so wird die genannte Zeit immer von der Höhendifferenz des Anfangs- und Endpunktes der Bewegung abhängen, also eine Funktion derselben sein. Man könnte nun die Frage aufstellen, wie die Gleichung der in Rede stehenden Curve beschaffen sein müsse, wenn die Zeit t eine gegebene Funktion jener Höhendifferenz darstellen, oder einer solchen proportional sein soll. Wir wollen diese Frage, welche z. B. die nach der Tautochrone als speziellen Fall in sich fasst, durch die nachstehenden Betrachtungen zu beantworten versuchen.

Sei APC (Taf. III. Fig. 1.) irgend eine krumme Linie, BC eine durch einen beliebigen Punkt in ihr gezogene Vertikallinie und die Höhendifferenz der Punkte A und C, nämlich die Strecke BC von

C bis zum Fusspunkte des von A auf die Vertikale gefällten Perpendikels $= h$. Nach einem bekannten Satze der Dynamik kommt ein materieller Punkt, welcher sich von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit vermöge der Schwere von A nach P bewegt, an dieser Stelle mit eben derselben Geschwindigkeit an, die er bei freiem Falle durch die Strecke BQ, welche die Projektion von AP auf BC ist, am Ende des Falles in Q erlangen würde. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit v, die Beschleunigung der Schwere (30,1835 Fuss) mit g und BQ mit p, so ist hiernach

$$v = \sqrt{2gp}.$$

Nennen wir ferner σ den Bogen AP und τ die Zeit, in welcher der materielle Punkt ihn durchlief, so haben wir andererseits nach den Prinzipien der Dynamik

$$v = \frac{\partial\sigma}{\partial\tau},$$

und folglich durch Vergleichung dieses Werthes von v mit dem vorhergehenden:

$$\sqrt{2gp}.\partial\tau = \partial\sigma$$

und

$$\sqrt{2g}.\partial\tau = \frac{\partial\sigma}{\sqrt{p}}.$$

Nehmen wir aber den Punkt C zum Anfangspunkte der Coordinaten und setzen

$$\text{Arc } CP = s, \; CQ = x, \; BC = h,$$

so wird

$$\sigma = \text{Arc } APC - s, \; p = h - x,$$

und durch Einführung dieser Werthe geht die vorige Differenzialgleichung in die folgende über:

$$\sqrt{2g}.\partial\tau = -\frac{\partial s}{\sqrt{h-x}},$$

und mithin wird jetzt

$$\sqrt{2g}.\tau = -\int\frac{\partial s}{\sqrt{h-x}} + \text{Const.}$$

Wollen wir hieraus die Zeit t finden, innerhalb welcher der ganze Bogen APC durchlaufen wird, so müssen wir die Const so bestimmen, dass die ganze rechte Seite für $x = h$ verschwindet (weil dann der materielle Punkt noch in A befindlich und folglich keine Zeit verwendet worden ist) und darauf $x = 0$ setzen, ...

was auf das Nämliche hinauskommt, wir müssen das Integral zu einem bestimmten machen, welches mit $x=h$ anfängt und mit $x=0$ aufhört. Demnach ist

$$\sqrt{2g}.t = -\int_h^0 \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}},$$

oder, da man in einem bestimmten Integrale die Gränzen vertauschen darf, wenn man ihm das entgegengesetzte Zeichen giebt,

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^h \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}}. \qquad (1)$$

Kennt man die Gleichung zwischen den Coordinaten $CQ=x$, $PQ=y$ der Curve, so dient die Formel (1) zur Bestimmung von t, indem man ∂s nach der Relation

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

berechnet; umgekehrt aber dient sie auch zur Bestimmung der Gleichung der Curve, wenn über das Wachsthum der Zeit t eine besondere Voraussetzung gemacht wird.

In so fern s eine Funktion von x ist, dürfen wir

$$\partial s = \varphi(x)\,\partial x \qquad (2)$$

setzen, so dass

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^h \frac{\varphi(x)\,\partial x}{\sqrt{h-x}} \qquad (3)$$

ist. Führen wir eine neue Veränderliche z dadurch ein, dass wir $x=hz$ nehmen, so wird $\partial x = h\,\partial z$, und wenn x die Werthe $x=0$ und $x=h$ angenommen hat, so ist $z\left(=\frac{x}{h}\right)$ entsprechend $=0$ und $=1$ geworden. Demnach haben wir

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^1 \frac{\varphi(hz)\,h\,\partial z}{\sqrt{h-hz}},$$

oder

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}} \sqrt{h}\,\varphi(hz). \qquad (4)$$

Soll nun die Zeit t einer gegebenen Funktion $f(h)$ von h proportional sein, so kann diese Bedingung offenbar nur dadurch erfüllt werden, dass

$$\sqrt{h}\,\varphi(hz) = f(h)\,\psi(z) \qquad (5)$$

ist, wo $\psi(z)$ eine blosse Funktion von z bedeutet. In der That geht dann die Gleichung (4) in die folgende über:

$$\sqrt{2g}.t = f(h)\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}}\,\psi(z); \qquad (6)$$

und da hier das Integral kein h enthält und durch Einführung der Gränzen $z=0$, $z=1$ auch die z herausfallen, so ist der Werth desselben eine blosse Zahl und folglich dann t der Funktion $f(h)$ proportional. Um nun aus der Gleichung (5) die beiden unbekannten Funktionen φ und ψ mit Hülfe der gegebenen f zu bestimmen, verfahren wir folgendermaassen.

Es folgt zunächst aus Nro. (5)

$$\varphi(hz) = \frac{f(h)}{\sqrt{h}}\,\psi(z). \qquad (7)$$

Nun ist aber, wenn $\varphi(hz)$ partiell nach z differenzirt wird:

$$\frac{\partial \varphi(hz)}{\partial z} = h\varphi'(hz),$$

und ebenso durch partielle Differenziation nach h:

$$\frac{\partial \varphi(hz)}{\partial h} = z\varphi'(hz).$$

Multipliziren wir die erste Gleichung mit z, die zweite mit h, so werden die rechten Seiten einander gleich, und mithin ist

$$z\,\frac{\partial \varphi(hz)}{\partial z} = h\,\frac{\partial \varphi(hz)}{\partial h}.$$

Diese Eigenschaft von $\varphi(hz)$ muss aber vermöge der Gleichung (7) auch dem Quotienten $\frac{f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z)$ zukommen, für welchen

$$z\,\frac{\partial \varphi(hz)}{\partial z} = \frac{f(h)}{\sqrt{h}}\,z\psi'(z),$$

$$h\,\frac{\partial \varphi(hz)}{\partial h} = h\,\frac{h^{\frac{1}{2}}f'(h) - \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}f(h)}{h}\,\psi(z) = \frac{hf'(h) - \frac{1}{2}f(h)}{\sqrt{h}}\,\psi(z)$$

ist. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt sich jetzt

$$f(h)\,z\psi'(z) = [hf'(h) - \tfrac{1}{2}f(h)]\,\psi(z),$$

oder nach beiderseitiger Division mit $f(h)\,z\,\psi(z)$:

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = [h\frac{f'(h)}{f(h)} - \tfrac{1}{2}]\,\frac{1}{z}, \qquad (8)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$h\frac{f'(h)}{f(h)}-\tfrac{1}{2}=\lambda-1,$$

also

$$\lambda=h\frac{f'(h)}{f(h)}+\tfrac{1}{2} \qquad (9)$$

setzen wollen. Bemerken wir ferner, dass in Nro. (8)

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\frac{\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}}{\psi(z)}=\frac{\frac{\partial\psi(z)}{\psi(z)}}{\partial z}=\frac{\partial l\psi(z)}{\partial z}$$

ist, so erhalten wir nach beiderseitiger Multiplikation mit ∂z:

$$\partial l\psi(z)=(\lambda-1)\frac{\partial z}{z},$$

folglich durch Integration

$$l\psi(z)=(\lambda-1)\tfrac{1}{2}\,l(z^2)+\text{Const.},$$

oder wenn man bemerkt, dass $z=\frac{x}{h}$ nur positive Werthe erhält, mithin $\frac{1}{2}l(z^2)=lz$ ist, und $\text{Const.}=la$, wo a ebenfalls eine beliebige Constante bedeutet, setzt:

$$l\psi(z)=(\lambda-1)\,lz+la=l(z^{\lambda-1})+la,$$

und mithin

$$\psi(z)=az^{\lambda-1}. \qquad (10)$$

Wir haben aber bereits gesehen, dass $\psi(z)$ eine von h freie Funktion sein muss; da nun in unserem Werthe derselben die Grösse λ vorkommt, welche laut Gleichung (8) von h abhängt, so kann die Aufgabe überhaupt nur dann möglich sein, wenn sich λ von h befreien lässt. Soll aber λ von h unabhängig sein, so ist nach Nro. (8) nur nöthig, dass der Quotient

$$\frac{f'(h)}{f(h)}=\frac{\mu}{h}$$

sei, wenn μ eine constante Grösse bedeutet. Da hier $\frac{f'(h)}{f(h)}=\frac{\partial lf(h)}{\partial h}$ ist, so folgt auf ähnliche Weise wie vorher

$$f(h)=ch^{\mu}, \qquad (11)$$

wo c eine durch die Integration hereingebrachte Constante ist. Wir sehen hieraus, dass, wenn die Zeit t einer Funktion von h proportional sein soll, diese Funktion selbst nur eine Potenz von h sein kann. Wir haben nun nach (8) und (11)

$$\lambda = \mu + \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$\psi(z) = a\, z^{\mu - \frac{1}{2}},$$

und nach Nro. (7) vermöge der Werthe von $f(h)$ und $\psi(z)$

$$\varphi(hz) = ac\,(hz)^{\mu - \frac{1}{2}},$$

mithin

$$\varphi(x) = ac\, x^{\mu - \frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Die Gleichung der so charakterisirten Curve ergiebt sich jetzt auf folgende Weise. Es ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

mithin

$$y = \int \partial x \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 1} + \text{Const.},$$

wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, weil der Punkt C, für welchen $x = 0$ ist, auf der Curve selbst liegt. Also ist jetzt

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 1},$$

oder, weil nach Nro. (2) und Nro. (12)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi(x) = ac\, x^{\mu - \frac{1}{2}}$$

ist,

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{a^2 c^2 x^{2\mu - 1} - 1}. \qquad (13)$$

Die Zeit t findet sich nach Formel (6), wenn wir für $f(h)$ und $\psi(z)$ ihre Werthe setzen:

$$\sqrt{2g}.t = ach^\mu \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}}\, z^{\mu - \frac{1}{2}}$$
$$= ach^\mu \int_0^1 z^{\mu + \frac{1}{2} - 1} (1-z)^{\frac{1}{2} - 1}\, \partial z,$$

wobei der Werth des Integrals nach der bekannten Gammafunktionenformel

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,\partial z = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

gefunden werden kann, wenn man $\alpha=\mu+\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ nimmt und bemerkt, dass $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ist. Man hat daher

$$t = ach^{\mu}\,\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)}\sqrt{\frac{\pi}{2g}}, \qquad (14)$$

und in den Gleichungen (13) und (14) ist jetzt die vollständige Lösung des aufgestellten Problems enthalten, da man mittelst der ersteren Formel diejenige Curve bestimmen kann, für welche die Fallzeit t einer gegebenen Potenz der Höhe h proportional ist. Aber auch für den Exponenten dieser Potenz treten noch Beschränkungen ein. Soll nämlich die Gleichung (13) eine reelle Curve, also eine mögliche Lösung der gestellten Aufgabe bedeuten, so darf das Integral auf der rechten Seite weder unendlich gross noch imaginär werden; ob der erstere Fall eintritt, lässt sich erst dann entscheiden, wenn man die unbestimmte Integration bereits ausgeführt hat, dagegen übersieht man auf der Stelle, dass das Integral imaginär ausfallen muss, wenn die Differentialformel selbst entweder ganz, oder während eines bestimmten Intervalles imaginär ist. Diess geschieht aber immer, wenn $2\mu-1>0$ ist, weil dann der Ausdruck

$$\sqrt{a^2c^2x^{2\mu-1}-1}$$

für alle der Null sehr nahen Werthe von x imaginär wird. Es muss also $2\mu-1\leqq 0$, folglich $\mu\leqq\frac{1}{2}$ sein, wenn die Aufgabe selbst unter die möglichen gehören soll.

Nimmt man in (14) $\mu=\frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus (13)

$$y=\sqrt{a^2c^2-1}\,.\,x,$$

also die Curve eine Gerade, wie man ohnehin weiss. Setzt man $\mu=0$ und die beliebige Constante $c=1$, so ist t von h unabhängig, und man erhält folglich diejenige Curve, auf welcher alle Bögen, die sich mit dem Punkte C endigen, in gleichen Zeiten durchlaufen werden, also die Tautochrone. Es ist dann nach (13)

$$y=\int_0^x \partial x\sqrt{\frac{a^2}{x}-1}.$$

Durch unbestimmte Integration findet man leicht

$$y=\sqrt{a^2x-x^2}-\tfrac{1}{2}a^2\,\text{Arc}\cos\frac{2x-a^2}{a^2}+\text{Const.},$$

und folglich für $x=0$

$$\text{Const.} = \frac{a^2}{2}\,\text{Arc}\cos(-1) = \tfrac{1}{2}a^2\pi,$$

woraus sich ergiebt

$$y = \tfrac{1}{2}a^2\pi + \sqrt{a^2x-x^2} - \tfrac{1}{2}a^2\,\text{Arc}\cos\frac{2x-a^2}{a^2},$$

oder wenn $a=\sqrt{2r}$ gesetzt wird:

$$y = r\pi + \sqrt{2rx-x^2} - r\,\text{Arc}\cos\frac{x-r}{r},$$

d. i. die Gleichung der Cykloide, wenn der Punkt C der Scheitel derselben, BC das Perpendikel auf ihre Basis und r der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

Will man das Unendlichwerden der Zeit t vermeiden, so muss man μ so wählen, dass keine der Gammafunktionen $\Gamma(\mu+\frac{1}{2})$ und $\Gamma(\mu+1)$ ein negatives Argument erhält, welche Bedingung durch $\mu+\frac{1}{2}>0$ oder $\mu>-\frac{1}{2}$ befriedigt wird. Nehmen wir hierzu die frühere Bedingung $\mu<\frac{1}{2}$, unter welcher allein eine krumme Linie möglich ist, so erhalten wir den folgenden Satz:

Sollen sich die Zeiten, innerhalb deren ein materieller Punkt verschiedene Bögen einer Curve ohne Anfangsgeschwindigkeit bloss vermöge der Schwere durchläuft, einer gegebenen Funktion der Höhendifferenzen der Anfangs- und Endpunkte jener Bögen proportional ändern, so darf diese Funktion nur eine Potenz jener Höhendifferenzen sein, die zum Exponenten eine zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ fallende Zahl hat."

Für ein Beispiel hierzu sei $\mu=\frac{1}{4}$, und $ac=\sqrt{2b}$, wo b wieder eine beliebige Constante ist. Es wird dann

$$t = \sqrt{2b}\,.\,\sqrt[4]{h}\,.\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\sqrt{\frac{\pi}{2g}},$$

oder

$$t = \sqrt{b}\,\sqrt[4]{h}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\sqrt{\frac{\pi}{g}},$$

und

$$y = \int_0^x \partial x\sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}}-1}.$$

Durch die Substitution

$$x = (b+u)^2$$

erhält man hier

$$\int \partial x \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$= 2\int (b+u)\,\partial u \sqrt{\frac{2b}{b+u} - 1} = 2\int (b+u)\,\partial u \sqrt{\frac{b-u}{b+u}}$$

$$= 2\int \partial u\, \sqrt{b^2-u^2},$$

wobei der Werth des letzteren Integrals bekanntlich

$$= u\sqrt{b^2-u^2} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{u}{b}$$

ist. Da nun aus $x=(b+u)^2$ folgt $u=\sqrt{x}-b$, so ist jetzt

$$\int \partial x \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$= (\sqrt{x}-b)\sqrt{(2b\sqrt{x}-x)} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{x}-b}{b} + \text{Const.}$$

Für $x=0$ ergiebt sich hieraus

$$\text{Const.} = -b^2 \operatorname{Arcsin}(-1) = +b^2\frac{\pi}{2},$$

und folglich ist jetzt nach Nro. (13)

$$y = \frac{\pi}{2}b^2 + (\sqrt{x}-b)\sqrt{(2b\sqrt{x}-x)} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{x}-b}{b}$$

die *Gleichung* derjenigen Curve, in welcher die Fallzeit der vierten *Wurzel von h* proportional ist.

XIV.

Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes.

Nach der Abhandlung: Note sur la formule de Taylor par M. J. Caqué in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. Octobre 1845. p. 379. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

I.

Es sei $y=f(x)$ eine beliebige Function von x. Setzen wir nun überhaupt, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$y_k=f(x+k\Delta x),$$

so haben wir in der gewöhnlichen Bezeichnung der Differenzenrechnung die folgende Reihe von Gleichungen:

$$y_1-y=\Delta y,$$
$$y_2-y_1=\Delta y_1,$$
$$y_3-y_2=\Delta y_2,$$
u. s. w.
$$y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1};$$

durch deren Addition sich die Gleichung

$$y_n-y=\Delta y+\Delta y_1+\Delta y_2+\ldots+\Delta y_{n-1}$$

oder

$$1) \quad y_n=y+\Delta y+\Delta y_1+\Delta y_2+\ldots+\Delta y_{n-1}$$

ergiebt.

Aus dieser Gleichung erhält man nach einem bekannten Satze der Differenzenrechnung

$$2)\qquad \Delta y_k = \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{k-1},$$

und folglich nach 1):

$$\begin{aligned} y_k = y &+ \Delta y \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 \\ &\qquad \text{u. s. w.} \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{k-2}, \end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned} 3)\qquad y_k = y &+ \frac{k}{1}\Delta y \\ &+ \frac{k-1}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^2 y_1 + \frac{k-3}{1}\Delta^2 y_2 + \ldots + \frac{1}{1}\Delta^2 y_{k-2}. \end{aligned}$$

Weil nun nach 2)

$$4)\qquad \Delta^2 y_k = \Delta^2 y + \Delta^3 y + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots + \Delta^3 y_{k-1}$$

ist, so ist nach 3):

$$\begin{aligned} y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y &+ \frac{k-1}{1}\Delta^2 y \\ &+ \frac{k-2}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^3 y \\ &+ \frac{k-3}{1}\Delta^2 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y_1 \\ &\qquad \text{u. s. w.} \\ &+ \frac{1}{1}\Delta^2 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y_1 + \ldots + \frac{1}{1}\Delta^3 y_{k-3}, \end{aligned}$$

d. i. nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$\begin{aligned} 5)\quad y_k = y &+ \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y \\ &+ \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y_1 + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y_{k-3}. \end{aligned}$$

Weil ferner nach 4)

$$6)\qquad \Delta^3 y_k = \Delta^3 y + \Delta^4 y + \Delta^4 y_1 + \Delta^4 y_2 + \ldots + \Delta^4 y_{k-1}$$

ist, so ist nach 5)

$$y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y$$

$$+ \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^4 y$$

u. s. w.

$$+ \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y_{k-4}$$

d. i. nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$7) \quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 y$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3}\Delta^4 y + \frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3}\Delta^4 y_1 + \ldots + \frac{3.2.1}{1.2.3}\Delta^4 y_{k-4}$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und wir gelangen daher, wenn wir uns der gewöhnlichen, hinreichend bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten bedienen, zu der folgenden allgemeinen Formel, wo natürlich n so wie k eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$8) \quad y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y$$
$$+ (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1 + (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2 + \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$9) \quad R_n = (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1$$
$$+ (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2 + \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1}$$

setzen:

$$10) \quad y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y + R_n.$$

II.

Setzen wir nun $k\Delta x = i$, so wird, wie man leicht findet:

$$11) \quad f(x+i) = y + \frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$+ \frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$
$$+ \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

$$+ \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + R_n.$$

Nun ist aber, wenn wir der Kürze wegen

$$12)\quad \Omega_n = \frac{(k-1)_n \frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}} + (k-2)_n \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}} + (k-3)_n \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}} + \ldots + n_n \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n}$$

setzen:

$$R_n = \{(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n\}\,\Omega_n\,\Delta x^{n+1},$$

und folglich, weil nach der Lehre von den figurirten Zahlen offenbar

$$(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n = k_{n+1}$$

ist:

$$R_n = k_{n+1}\,\Omega_n\,\Delta x^{n+1},$$

also

$$R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\Omega_n.$$

Weil die Grössen

$$(k-1)_n,\ (k-2)_n,\ (k-3)_n,\ \ldots . n_n$$

offenbar sämmtlich positiv sind, so ist nach dem im Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen höchst wichtigen Satze von den Mittelgrössen, wenn wir uns der dort eingeführten Bezeichnung der Mittelgrössen auch jetzt bedienen:

$$\Omega_n = M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},\ \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

also

$$R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)..(i-n\Delta x)}{1.2.3..(n+1)}\,M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right).$$

und folglich nach 11):

$$13)\quad f(x+i) = y + \frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)..(i-n\Delta x)}{1.2.3..(n+1)}M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right).$$

III.

Wenn man sich jetzt Δx der Null nähern, also, weil $i=k\Delta x$ ist, k in's Unendliche wachsen lässt, so nähern sich die Grössen

$$\frac{i(i-\Delta x)}{1.2},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)}{1.2.3.4},$$

u. s. w.

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3.4\ldots n},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3.4\ldots(n+1)};$$

wobei man nicht zu vergessen hat, dass n hier als constant zu betrachten ist, respective den Gränzen

$$\frac{i^2}{1.2},\ \frac{i^3}{1.2.3},\ \frac{i^4}{1.2.3.4},\ \ldots\frac{i^n}{1.2.3..n},\ \frac{i^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}.$$

Weil ferner nach bekannten Sätzen der Differenzenrechnung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta x^2}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{\Delta(\Delta^2 y)}{\Delta x^3}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}=\frac{\Delta(\Delta^3 y)}{\Delta x^4}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)}{\Delta x},$$

u. s. w.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{\Delta(\Delta^{n-1}y)}{\Delta x^n}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}}\right)}{\Delta x}$$

ist, so nähern sich nach den bekannten Begriffen der Differentialrechnung, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}, \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}, \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

respective den Gränzen:

$$\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

u. s. w.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n};$$

oder in einer andern bekannten Bezeichnung respective den Gränzen:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f''''(x) \ldots . f^{(n)}(x).$$

Weil endlich

$$y = f(x) = f(x),$$

$$y_1 = f(x+\Delta x) = f(x+\frac{i}{k}),$$

$$y_2 = f(x+2\Delta x) = f(x+2\frac{i}{k}),$$

$$y_3 = f(x+3\Delta x) = f(x+3\frac{i}{k}),$$

u. s. w.

$$y_{k-n-1} = f(x+(k-n-1)\Delta x) = f(x+(1-\frac{n-1}{k})i)$$

oder, wenn wir

$$\frac{i}{k} = i_1$$

setzen:

$$y = f(x),$$
$$y_1 = f(x+i_1),$$
$$y_2 = f(x+2i_1),$$
$$y_3 = f(x+3i_1)$$
u. s. w.
$$y_{k-n-1} = f(x+(i-(n-1)i_1))$$

ist; so nähert sich, wenn Δx sich der Null, also k dem Une llchen, und folglich auch i_1 sich der Null nähert, die Reihe Grössen

$$y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{k-n-1}$$

offenbar der Reihe der Grössen, welche man erhält, wenn in der Function $f(u)$ sich u von $u = x$ bis $u = x + i$ stetig ve dern lässt, und die Reihe der Grössen

$$\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_3}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}$$

nähert sich folglich, wie mittelst des Vorhergehenden leicht hellet, der Reihe der Grössen, welche man erhält, wenn ma

$$\frac{\partial^{n+1} f(u)}{\partial u^{n+1}} = f^{(n+1)}(u)$$

sich u von $u = x$ bis $u = x + i$ stetig verändern lässt.

Ist nun $f^{(n+1)}(u)$ von $u = x$ bis $u = x + i$ stetig, so muss immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null näh offenbar jederzeit unter den Werthen, welche $f^{(n+1)}(u)$ erh wenn man u sich von $u = x$ bis $u = x + i$ stetig verändern lä nothwendig einen geben, welcher der Mittelgrösse

$$M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right)$$

gleich ist, und man kann also, wenn ϱ eine die Einheit ni übersteigende positive Grösse bezeichnet, unter der gemac Voraussetzung immer

$$f^{(n+1)}(x+\varrho i) = M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n}}{\Delta x^{n+1}}\right.$$

setzen.

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt aus 13) unmittelbar, dass, wenn

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind — was näi lich bei der ganzen vorhergehenden Betrachtung vorausgese

werden muss — und die Function $f^{(n+1)}(u)$ von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig ist, immer

$$14)\quad f(x+i)$$
$$=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x)$$
$$+\frac{i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x+\varrho i)$$

gesetzt werden kann, wo ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Dies ist bekanntlich das Fundamentaltheorem der ganzen Lehre von den Reihen, aus welchem der eigentliche Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz leicht hergeleitet werden können, worüber ich hier nichts weiter sage, weil diese Ableitung in jedem guten, den neueren Ansichten sich anschliessenden Lehrbuche der Differentialrechnung zu finden ist.

IV.

Soll ich schliesslich noch mein Urtheil über den im Obigen absichtlich so schleunig als möglich den Lesern des Archivs mitgetheilten Beweis des vorhergehenden so höchst wichtigen Satzes aussprechen, so muss ich, so wie ich die Sache jetzt ansehe, bekennen, dass ich allerdings der Meinung bin, dass dieser Beweis sehr verdient, bei dem Vortrage der Differentialrechnung benutzt zu werden. Vor dem von Cauchy gegebenen, hauptsächlich auf dem bekannten Ampère'schen Theoreme beruhenden, Beweise, den man in zum Theil abgeänderter Darstellung z. B. in meinen Lehrbüchern (Elemente der Differential- und Integralrechnung. Erster Theil. Leipzig. 1837. S. 116. und Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. 33. ff.) findet, scheint mir der obige Beweis hauptsächlich den für den Unterricht keineswegs unwichtigen Vorzug zu haben, dass er, wie aus der im Vorhergehenden gegebenen Entwickelung ersichtlich ist, eine ganz analytische Darstellung zulässt, indem im Gegentheil Cauchy's Beweis eine mehr synthetische Darstellung erfordert. Interessant ist mir der von Herrn Caqué gegebene Beweis auch hauptsächlich durch die bei demselben gemachte Anwendung des im Archiv. Thl. 1. S. 292. §. 45. bewiesenen Satzes von den Mittelgrössen gewesen, dessen grosse Wichtigkeit immer mehr erkannt zu werden verdient. Endlich will ich auch noch bemerken, dass, streng genommen, dieser Beweis durchaus nur eine im Sinne der neueren Analysis vervollkommnete Darstellung des ältesten Beweises ist, durch welchen Brook Taylor selbst in seiner Methodus incrementorum directa et inversa. Londini. 1715. 4. Prop. VII. Coroll. 2. den späterhin nach ihm benannten Satz zu begründen suchte, wovon sich Jeder, wer diese ziemlich seltene Schrift nicht selbst besitzt, auch schon aus dem Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 768. hinreichend, jedoch nicht voll-

ständig, zu überzeugen im Stande ist, so dass wir also auf diese Art auch bei dem vorliegenden höchst wichtigen Gegenstande, was jedenfalls sehr interessant ist, wieder zu den ersten Anfängen der Differentialrechnung, — welche von der zu einer gewissen Zeit, und auch jetzt noch, bei vielen Mathematikern so sehr beliebten, aber gewiss höchst ungründlichen Methode der unbestimmten Coefficienten nichts wussten, — nur in einer in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge und Evidenz sehr vervollkommneten Darstellung, zurückgeführt werden. Einer ähnlichen Betrachtungsweise hat sich in neuerer Zeit übrigens auch schon Crelle in seinem Journal. Thl. VII. S. 276. ff. bedient, der ich aber, wenn sie auch allgemeiner ist, in Bezug auf den vorliegenden bestimmten Zweck doch die obige Darstellung des Herrn Caqué aus mehr als einer Rücksicht vorziehen möchte.

XV.

Ueber einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

In einer Abhandlung des Herrn Professor Steiner über Fusspunkten-Vielecke, Fusspunkten-Curven u. s. w. (Crelle's Journal. 21. Band.) wird bemerkt, dass derselben eine andere Untersuchung zur Seite stehe, welche sich mit den folgenden Aufgaben beschäftige.

α) In der Ebene einer gegebenen Curve denjenigen Punkt zu bestimmen, dessen Fusspunkten-Curve in Rücksicht auf jene unter allen die kürzeste sei.

β) Wenn in der Ebene eine gegebene Curve auf einer festen Geraden rollt, denjenigen mit ihr verbundenen Punkt anzugeben, welcher die kürzeste Curve beschreibt.

γ) Dasselbe, wenn die Curve auf einer anderen Curve rollt.

Wiewohl die Auflösung dieser Aufgaben wegen ihres innigen Zusammenhanges mit den dortigen Untersuchungen ziemlich nahe liegt, so erlaube ich mir doch, die meinige hier mitzutheilen, weil Betrachtungen über Rektifikation der Curven, der Analysis gegen-

über, so zu sagen, die schwache Seite der Geometrie bilden, und daher ein jeder dahin einschlagende Fortschritt der letzteren näher festgestellt zu werden verdient.

§. 1.

Vom Punkte der mittleren Entfernung.

Sind a, a_1, a_2 die Abstände eines beliebigen Punktes A, in der Ebene eines beliebigen Dreiecks MM_1M_2, von den Seiten M_1M_2, MM_2, MM_1 oder p, p_1, p_2 des letzteren, so ist, jenachdem derselbe 1) innerhalb des Dreiecks, oder 2) ausserhalb desselben in einem seiner Winkel (MM_2M_1), oder 3) im Scheitelwinkel eines seiner Winkel (MM_2M_1) liegt:

1) $\Delta AM_1M_2 + \Delta AMM_2 + \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2$, und daher

$$a.p + a_1.p_1 + a_2.p_2 = 2\Delta;$$

oder 2) $\Delta AM_1M_2 + \Delta AMM_2 - \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2$, und

$$a.p + a_1.p_1 - a_2.p_2 = 2\Delta;$$

oder 3) $-\Delta AM_1M_2 - \Delta AMM_2 + \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2$, und

$$-a.p - a_1.p_1 + a_2.p_2 = 2\Delta.$$

Lehrsatz 1.

Die algebraische Summe der Rechtecke zwischen den Seiten eines beliebigen Dreiecks und den Abständen eines beliebigen Punktes seiner Ebene von diesen Seiten ist dem doppelten Inhalte des Dreiecks gleich, indem ein jeder Abstand positiv oder negativ genommen wird, jenachdem jener Punkt und die Gegenecke der betreffenden Dreiecksseite auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten dieser letzteren liegen.

Sind nun A, B, C, $D \ldots n$ beliebige Punkte in der Ebene des Dreiecks MM_1M_2, sind α, β, γ, $\delta \ldots$ eben so viele diesen Punkten entsprechende ganze oder gerbochene, positive oder negative Zahlen, und a, a_1, a_2; b, b_1, b_2, c, c_1, c_2; d, d_1, d_2;.. die Abstände der ersteren von den Seiten p, p_1, p_2 des Dreiecks, so ist

$$\alpha ap + \alpha a_1p_1 + \alpha a_2p_2 = 2\alpha\Delta;$$
$$\beta bp + \beta b_1p_1 + \beta b_2p_2 = 2\beta\Delta;$$
$$\gamma cp + \gamma c_1p_1 + \gamma c_2p_2 = 2\gamma\Delta;$$
$$\delta dp + \delta d_1p_1 + \delta d_2p_2 = 2\delta\Delta;$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

also $(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d \ldots)p + (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1 \ldots)p_1$
$+ (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2 \ldots)p_2 = 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots)\Delta$,

oder, indem man die Faktoren von p, p_1, p_2, 2Δ kürzer du $\Sigma(\alpha a)$, $\Sigma(\alpha a_1)$, $\Sigma(\alpha a_2)$, $\Sigma(\alpha)$ bezeichnet:

$$\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p + \frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_1 + \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_2 = 2\Delta.$$

Denkt man sich nun in derselben Ebene einen Punkt S, w cher von den Seiten p und p_1 um

$$s = \frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)} \text{ und } s_1 = \frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)}$$

entfernt ist, was allemal und bei gehöriger Berücksichtigung (Zeichen dieser Ausdrücke nur auf einzige Weise möglich ist, t ist s_2 der Abstand des so bestimmten Punktes S von der drit Seite p_2, so folgt einmal aus der vorigen Gleichung:

$$s \cdot p + s_1 \cdot p_1 + \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_2 = 2\Delta;$$

dann aber auch aus dem Lehrsatze 1.:

$$s \cdot p + s_1 \cdot p_1 + s_2 \cdot p_2 = 2\Delta;$$

folglich ist auch

$$s_2 = \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)}.$$

Bildet die Gerade MM_1 mit M_1M_2 und MM_2 kein Dreie sondern ist dieselbe mit einer von beiden, z. B. mit M_1M_2, 1 rallel, und ist m der Abstand beider von einander, so ist

$$a = m + a_2,\ b = m + b_2,\ c = m + c_2,\ d = m + d_2,\ \ldots;$$
$$s = m + s_2;$$

wo a_2, b_2, c_2, $d_2 \ldots$, s_2 positiv oder negativ zu nehmen sind, j nachdem die Punkte A, B, C, D,.., S ausserhalb oder innerh der Parallelen liegen; substituirt man also diese Ausdrücke in d Gleichung

$$\Sigma(\alpha) \cdot s = \Sigma(\alpha a),$$

so wird daraus

$$\Sigma(\alpha) \cdot m + \Sigma(\alpha) \cdot s_2 = \Sigma(\alpha) \cdot m + \Sigma(\alpha a_2),$$

also wiederum, wie oben:

$$s_2 = \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)}.$$

Nehmen die Coefficienten α, β, γ, $\delta \ldots$ in gleichem Verhä nisse zu oder ab, so werden hierdurch die Werthe der Quotien

$\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$ und $\frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)}$, und also auch die Lage des Punktes S nicht geändert. Ist $\alpha=\beta=\gamma=\delta\ldots$, so sind s, s_1, s_2 die arithmetischen Mittel zwischen den Abständen a, b, c, $d\ldots$; a_1, b_1, c_1, $d_1\ldots$; a_2, b_2, c_2, $d_2\ldots$, und der Punkt S heisst im gewöhnlichen Sinne der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf das System der Punkte A, B, C, $D\ldots$. Offenbar aber ist der Ausdruck $\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$, wenigstens für den Fall positiver ganzer Zahlen α, β, γ, $\delta\ldots$, ebenfalls das arithmetische Mittel zwischen den Abständen der Punkte A, B, C, $D\ldots$ von einer Geraden, insofern man sich in diesen Punkten bezüglich eine Anzahl von α, β, γ, $\delta\ldots$ Punkten vereinigt denkt. Daher ist man berechtigt, auch im allgemeinen Falle den Ausdruck $\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$ das arithmetische Mittel zwischen den mit den Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Längen a, b, c, $d\ldots$, und den Punkt S den Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die mit den Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Punkte A, B, C, $D\ldots$ zu nennen.

Lehrsatz 2.

Sind die Abstände eines Punktes S von zwei beliebigen, einander durchschneidenden Geraden, ein jeder das arithmetische Mittel zwischen den, mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Abständen eines ebenen Systems von Punkten A, B, C, $D\ldots$ von der betreffenden Geraden, so besitzt jener Punkt S die nämliche Eigenschaft hinsichtlich jeder dritten Geraden; und es gibt daher allemal einen, aber auch nur einen Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf ein gegebenes System mit gegebenen Coefficienten behafteter Punkte. Hierbei aber wird vorausgesetzt, dass die Abstände je zweier Punkte von einer Geraden mit einerlei oder mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, jenachdem sie auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen.

Zusatz. Geht die Gerade, von welcher die Abstände gerechnet werden, durch den Punkt der mittleren Entfernung selbst, so ist

$$s=\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}=0, \text{ also } \Sigma(\alpha a)=0,$$

und umgekehrt: Gilt die letztere Gleichung für zwei Geraden, welche sich schneiden, so ist ihr Durchschnitt der Punkt der mittleren Entfernung. Daher sind im Falle lauter positiven Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ die Punkte A, B, C, $D\ldots$ nothwendig auf beide Seiten einer jeden Geraden vertheilt,

welche durch den Punkt der mittleren Entfernung geht, und wel daher eine Linie der mittleren Entfernung heisst.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise, wie hier mittels Dreiecks MM_1M_2 im Fall eines ebenen Systems von Punkten, k man mittels einer Pyramide auch den Punkt der mittleren E fernung in Bezug auf ein System von Punkten im Raume stimmen.

§. 2.

Vom Punkte der kleinsten Entfernung.

Es seien in (Taf. III. Fig. 2., 3., 4.) S, S_1 zwei Punkte von be biger Entfernung mit einem beliebigen dritten Punkte A durch Geraden AS, AS_1 verbunden, und von dem einen (S_1) auf Gerade AS eine Senkrechte S_1m gefällt, so ist

entweder 1) $Am = AS + Sm,$

oder 2) $Am = AS - Sm,$

oder 3) $Am = Sm - AS$
$= AS - Sm + 2Am,$

oder aber 4) $Am = AS;$

jenachdem das in S auf SS_1 errichtete Loth SX 1) zwischen Punkten A und S_1 hindurchgeht, 2) oder nicht, und zwar $AS >$ oder 3) $AS < Sm$, oder aber 4) dieses Loth mit AS zusamm fällt.

Jedenfalls aber ist

$$AS_1 > Am.$$

Wird nun aus A auf SS_1 noch die Senkrechte Ap gefä so ist

$$Sm = SS_1 \cdot \frac{Sp}{AS};$$

also, wenn man der Kürze wegen AS, A_1S, SS_1, Sp mit A, A s, a bezeichnet und unter p eine Linie versteht, welche Null od grösser als Null ist, so erhält man in jedem Falle folgende U gleichung:

$$A_1 > A - s \cdot \frac{a}{A} + p,$$

wo a positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem die Punk A und S_1 auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten des Loth SX liegen.

Sind also irgend ein ebenes System von Punkten $A, B, C, D\ldots$ d ebensoviele ganze oder gebrochene, aber positive Zahlen $\beta, \gamma, \delta\ldots$ gegeben; werden erstere mit zwei beliebigen Punk- S, S_1 der Ebene bezüglich durch die Geraden $A, B, C, D\ldots$ $A_1, B_1, C_1, D_1\ldots$ verbunden, und sind $a, b, c, d\ldots$ die Ab- jener Punkte von dem in S auf SS_1 errichteten Lothe, so man für jeden dieser Punkte eine der vorigen analoge Un- chung, und wenn man die Glieder einer jeden bezüglich mit Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ multiplicirt und sodann die Summen der ken und der rechten Seiten nimmt, so ergibt sich:

$$\alpha . A_1 + \beta . B_1 + \gamma . C_1 + \delta . D_1 + \ldots > \alpha . A + \beta . B + \gamma . C + \delta . D + \ldots$$
$$- s\left(\frac{\alpha . a}{A} + \frac{\beta . b}{B} + \frac{\gamma . c}{C} + \frac{\delta . d}{D} + \ldots\right) + P,$$

$a, b, c, d\ldots$ positiv oder negativ oder $=0$ zu nehmen sind, achdem die betreffenden Punkte $A, B, C, D\ldots$ auf derjenigen eite des Lothes SX, wo der Punkt S_1 sich befindet, oder auf r anderen Seite, oder auf dem Lothe selbst liegen; und wo P iederum eine Linie $\geqq 0$ bedeutet. Mittels der schon oben ge- auchten Abkürzungszeichen lässt sich die zuletzt erhaltene Be- hung auch so ausdrücken:

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A) - s . \Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) + P.$$

Gesetzt nun, es wäre S ein solcher Punkt der Geraden SS_1, welchen die algebraische Summe

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0,$$

würde

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A) + P,$$

so mehr also

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)$$

n, und zwar — was für den Vergleich der geometrischen mit r analytischen Entwickelungsweise von Wichtigkeit ist — wie oss oder klein auch die Strecke $SS_1 = s$ gedacht rden mag.

Werden die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ mit anderen vertauscht, lche zu den ersteren alle einerlei Verhältniss haben, so besteht h jetzt noch für den Punkt S die Bedingungsgleichung

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0,$$

es wird also hierdurch die Lage des Punktes S nicht verändert. . die Coefficienten $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots$, so ist, wenn

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}+\ldots=0,$$

allemal

$$A_1+B_1+C_1+D_1+\ldots>A+B+C+D+\ldots,$$

d. h. die Summe der Entfernungen des so bestimmten Punk von den Punkten $A, B, C, D\ldots$ ist kleiner als die eines anderen Punktes S_1 derselben Ebene, und in diesem Falle i der Punkt S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezu das System der Punkte $A, B, C, D\ldots$. Im Falle ungle Coefficienten aber braucht man sich nur vorzustellen, dass Anzahl von α Punkten im Punkte A, β Punkte in B, γ in in $D\ldots$ vereinigt seien, um auch jetzt in den Ausdrücken Σ($\Sigma(\alpha A_1)$ die Summen der Entfernungen der Punkte S, S_1 von $A, B, C, D\ldots$ zu erkennen und in dieser Vorstellung noch Schritt weiter gehend den Sinn der folgenden Definition zu fas Ein Punkt S heisst der Punkt der kleinsten Ent nung in Bezug auf ein gegebenes System, mit geg nen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficien $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteter Punkte $A, B, C, D\ldots$, wenn Summe der Entfernungen des Punktes S von die letzteren kleiner als die eines jeden anderen Pun S_1 ist.

Man kann die Quotienten $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D}\ldots$ als cons Coefficienten ansehen, mit denen die Punkte $A, B, C, D\ldots$ haftet sind. Gesetzt nun, der Punkt S, welcher von den Pu $A, B, C, D\ldots$ um die Längen $A, B, C, D\ldots$ entfernt ist der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf diese Pu so würde nach Lehrsatz 2. Zusatz. für jede durch S gehende rade die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0$$

gelten, und da die in §. 1. für die Abstände $a, b, c, d\ldots$ g bene Zeichenregel mit derjenigen des jetzigen Paragraphen kommen übereinstimmt, so müsste der Punkt S zugleich auc Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den C cienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D\ldots$ sein.

Denkt man sich um den Punkt S als Centrum mit belieb Halbmesser r einen Kreis beschrieben, welcher die Geraden $BS, CS, DS\ldots$ in den Punkten $A', B', C', D'\ldots$ schn und sind $a', b', c', d\ldots$ die Abstände dieser Punkte von Lothe SX, so ist

$$\frac{a}{A}=\frac{a'}{r},\ \frac{b}{B}=\frac{b'}{r},\ \frac{c}{C}=\frac{c'}{r},\ \frac{d}{D}=\frac{d'}{r}\ldots,$$

also

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=\frac{1}{r}\,\Sigma(\alpha a').$$

esetzt also, der Punkt S wäre der Punkt der **mittleren** Entrnung in Bezug auf die mit den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ beıfteten Punkte $A', B', C', D' \ldots$, so würde

$$\Sigma(\alpha a') = 0, \text{ und also auch } \Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0 \text{ sein},$$

[illegible] S zugleich auch der Punkt der **kleinsten** Entfernung in [illegible] auf die mit denselben Coefficienten behafteten Punkte A, [illegible] $C, D \ldots$ sein.

Lehrsatz 3.

Ist irgend ein ebenes System von Punkten $A, B, C, D \ldots$, und sind ebensoviele ganze oder gebrochene [illegible]sitive Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ gegeben, und gibt es in [illegible]er Ebene jenes Systems einen Punkt S, welcher, wenn man die reciproken Werthe seiner Abstände $A, B, C, D \ldots$ von jenen Punkten bezüglich mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ multiplicirt, der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die, mit den so erhaltenen Zahlen $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D} \ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D \ldots$ ist, so ist dieser Punkt S zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf dieselben, mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ behafteten Punkte, und zwar gibt [illegible]dann allemal nur einen einzigen solchen Punkt S.

Lehrsatz 4.

Ist der Mittelpunkt eines Kreises der Punkt der [illegible]ittleren Entfernung in Bezug auf ein System von [illegible]nkten, welche auf seinem Umfange liegen und mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven Coeffi[illegible]enten behaftet sind, so ist derselbe zugleich auch [illegible]er Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf ein [illegible]ystem von ebensovielen, mit denselben Coefficien[illegible]n behafteten Punkten, welche beliebig auf den nach [illegible]nen Punkten gehenden Halbmessern, auf einerlei [illegible]eite vom Mittelpunkte, liegen.

Lehrsatz 5.

Der Punkt der kleinsten Entfernung für ein gege[illegible]nes System von Punkten, welche mit gegebenen [illegible]efficienten behaftet sind, bleibt unverändert, wenn [illegible]se Coefficienten alle in gleichem Verhältniss sich [illegible]rn.

[illegible] übrigens allemal ein Punkt der kleinsten Entfernung exi[illegible] derselbe gefunden werde, lässt sich bis jetzt im

Allgemeinen nicht ermitteln, wohl aber in besonderen Fäll welchen hier der folgende, von welchem später Gebrauch wird, hervorgehoben werden soll.

Liegen je zwei der gegebenen Punkte, z B. A und einem Strahle eines Strahlbüschels S, und zwar auf versc Seiten des Punktes S, so sind die Abstände a, b derse einem beliebigen Strahle des Strahlbüschels entgegenge es ist $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$. Sind also nun auch noch die betreffen Coefficienten α und β einander gleich, so ist

$$\frac{\alpha a}{A} + \frac{\beta b}{B} = 0,$$

und somit überhaupt

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0,$$

also S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug au sammtheit dieser Punktenpaare.

Lehrsatz 6.

Schneiden sich beliebig viele Gerade in Punkte S, und sind auf einer jeden auf verschi Seiten von S zwei Punkte beliebig gegeben beliebigen ganzen oder gebrochenen positive paarweise unter sich gleichen Coefficienten be so ist S der Punkt der kleinsten Entfernung in auf die Gesammtheit dieser Punktenpaare.

Aus einer bekannten Eigenschaft des Punktes der Entfernung ergibt sich, dass für einen beliebigen Punk Ausdruck $\Sigma\left(\frac{\alpha . A^2_1}{A}\right)$ um so grösser wird, je weiter d S_1 sich vom Punkte S der kleinsten Entfernung entf frägt sich, ob dasselbe auch von dem Ausdrucke $\Sigma(\alpha A_1)$

Denkt man sich in (Taf. III. Fig. 2., 3., 4.) die Strecke im Zunehmen begriffen, so wird die Linie AS_1 in Taf. III. F Fig. 4. zwar unbedingt zunehmen, dagegen in Taf. III. Fig. 3. abnehmen, bis SS_1 so gross als die Projektion Sp der I geworden ist; hat aber SS_1 diese Grösse erreicht, so nimmt AS_1 nun ins Unendliche zu. Das nämliche gilt also a $\alpha . AS_1$. Gesetzt aber auch, dass ein oder mehrere der $\alpha . A_1$, $\beta . B_1$ ... die Grenze, über welche hinaus sie si zugleich fortwährend vergrössern müssen, erreicht haben, sich doch dasselbe nicht eher von der Summe $\Sigma(\alpha A_1)$ s Gewissheit behaupten, bis ein jedes der Produkte an diese angelangt ist; und da die Projektion Sp mit der Verkl des Winkels ASS_1 bis zur Grösse von AS zunimmt, sich hiernach mit völliger Gewissheit nur Folgendes fests

Lehrsatz 7.

Die Summe der Abstände eines Punktes S_1 von den mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficienten behafteten Punkten A, B, C, D... einer Ebene nimmt mit seinem Abstande vom Punkte S der kleinsten Entfernung nothwendig zu, sobald derselbe den Umfang desjenigen Kreises erreicht hat, welcher um den Punkt S als Mittelpunkt durch den von ihm entferntesten unter jenen Punkten A, B, C, D... gelegt wird.

§. 3.

Von den Fusspunkten-Vielecken und den Fusspunkten-Curven.

Fällt man auf alle Seiten eines gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$, aus einem Punkte P seiner Ebene, Senkrechte, und verbindet deren Fusspunkte der Reihe nach paarweise durch Gerade, so entsteht ein neues Vieleck V, welches dem gegebenen eingeschrieben ist. **Dieses neue Vieleck V heisst das Fusspunkten-Vieleck des Punktes P in Bezug auf das gegebene Vieleck $\mathfrak{V}$**; und zwar soll diese Benennung gelten, es mag nun das Vieleck $\mathfrak{V}$ geschlossen oder offen sein, lauter ausspringende oder auch einspringende Winkel besitzen, einen einzigen oder mehrere Räume einschliessen

Ist nun A irgend eine Ecke des Vielecks $\mathfrak{V}$, α der von den anstossenden Seiten eingeschlossene spitze oder stumpfe Winkel, PA der Abstand eines beliebigen Punktes P von dieser Ecke, und MN die derselben entsprechende Seite des Fusspunkten-Vielecks V, so lässt sich um das Viereck $PMAN$ ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser PA ist; folglich ist dessen Sehne

$$MN = PA \,.\, \sin\alpha.$$

Man erhält also den Umfang von V, indem man die Abstände des Punktes P von den Ecken des Vielecks $\mathfrak{V}$ bezüglich mit den Sinus der an diesen Ecken liegenden Winkel von $\mathfrak{V}$ multiplicirt und die Summe der Produkte nimmt, oder:

Lehrsatz 8.

a) Der Umfang des Fusspunkten-Vielecks V eines beliebigen Punktes P, in Bezug auf ein beliebiges gegebenes, geschlossenes oder offenes Vieleck $\mathfrak{V}$, ist ebensogross als die Summe der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des Vielecks $\mathfrak{V}$, insofern diese letzteren mit den Sinus der betreffenden Winkel von $\mathfrak{V}$, als Coefficienten, behaftet werden.

b) Und daher hat unter allen Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf ein gegebenes Vieleck 𝔅 dasjenige den kleinsten Umfang, welches dem Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit jenen Sinus behafteten Eckpunkte des Vielecks 𝔅 entspricht.

c) Je weiter ein Punkt P über diejenige Kreislinie hinausrückt, welche um den erwähnten Punkt S, als Mittelpunkt, durch die von ihm entfernteste Ecke des Vielecks 𝔅 beschrieben wird, desto grösser wird der Umfang seines Fusspunkten-Vielecks V.

Da im regelmässigen Vieleck alle Winkel einander gleich sind, und da, was sich sehr leicht aus Lehrsatz 4. und 6. ergibt, sein Mittelpunkt der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf seine Ecken ist, so hat man insbesondere:

Lehrsatz 9.

a) Der Umfang des Fusspunkten-Vielecks V eines beliebigen Punktes P, in Bezug auf ein regelmässiges Vieleck 𝔅, ist gleich der Summe der Abstände des Punktes P von den Ecken des letzteren, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels des regelmässigen Vielecks.

b) Unter allen Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf ein regelmässiges Vieleck hat das dem Mittelpunkte des letzteren entsprechende den kleinsten Umfang.

Fällt man auf die sämmtlichen Tangenten einer Curve (oder eines Curvenstückes) 𝔅 aus einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene Senkrechte, so bilden die Fusspunkte dieser letzteren ebenfalls eine Curve (oder ein Curvenstück) V. Diese Curve V heisst die Fusspunkten-Curve des Punktes P in Bezug auf die Curve 𝔅. Kraft des Gesetzes der Continuität nun lassen sich alle Eigenschaften der Fusspunkten-Vielecke auf die Fusspunkten-Curven übertragen. Denn eine jede Curve 𝔅 lässt sich als ein Vieleck mit unendlich kleinen, einander gleichen Seiten betrachten, und dann sind die Fusspunkten-Curven in Bezug auf die Curve 𝔅 mit den Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf das Vieleck 𝔅 identisch, indem die Seiten des letzteren die Richtungen der Tangenten der ersteren bestimmen. Die Winkel, welche je zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten einschliessen, treten jetzt an die Stelle der Winkel des Vielecks, und da dieselben unendlich klein, also ihre Sinus genau ihren Bogen, für den Halbmesser $=1$, gleich sind, so darf man diese Bogen an die Stelle jener Sinus setzen. Handelt es sich nur um die Bestimmung des Punktes der kleinsten Entfernung oder um das Verhältniss der Umfänge der Fusspunkten-Curven, so kann man auch, was offenbar bequemer ist, nach Lehrsatz 5. sich statt jener Sinus der reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser in den betreffenden Punkten der Curve 𝔅 bedienen. Denn ist A irgend eine Ecke eines gleichseitigen Vielecks 𝔅, die Seite desselben $=2h$, und denkt man sich in den Mittelpunkten m, n der die Ecke A oder

den Winkel α einschliessenden Seiten zwei Senkrechte errichtet, welche sich im Punkte a schneiden, so ist

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 2\frac{am}{aA}.\frac{Am}{aA} = \frac{2h\sqrt{(aA)^2-h^2}}{(aA)^2},$$

und ebenso erhält man für irgend eine andere Ecke C

$$\sin\gamma = \frac{2h\sqrt{(Cc)^2-h^2}}{(Cc)^2};$$

also

$$\sin\alpha : \sin\gamma = \frac{\sqrt{(aA)^2-h^2}}{(aA)^2} : \frac{\sqrt{(cC)^2-h^2}}{(cC)^2}.$$

Da nun im Falle der Curve $\mathfrak{B}$ die Seite $2h$ unendlich klein ist, so ist hier

$$\sin\alpha : \sin\gamma = \frac{1}{aA} : \frac{1}{cC}.$$

Offenbar aber sind in diesem Falle die Längen aA, cC die Krümmungshalbmesser der Curve in den Punkten A, C.

Lehrsatz 10.

a) **Der Umfang der Fusspunkten-Curve V eines beliebigen Punktes P in Bezug auf eine beliebige gegebene Curve (oder Curvenstück) $\mathfrak{B}$ ist ebensogross als die Summe der Abstände des Punktes P von sämmtlichen Punkten der Curve $\mathfrak{B}$, wenn man einen jeden dieser Abstände mit dem Bogen des Winkels, welchen die Tangente in dem betreffenden Punkte mit der ihr zunächst folgenden bildet (für den Halbmesser $=1$), multiplicirt.**

b) **Unter allen Fusspunkten-Curven in Bezug auf eine gegebene Curve $\mathfrak{B}$ ist diejenige die kürzeste, welche dem Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf sämmtliche Punkte der Curve $\mathfrak{B}$ entspricht, vorausgesetzt, dass diese Punkte mit den unter *a*) erwähnten Bogen oder auch mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser der Curve, als Coefficienten, behaftet werden.**

c) **Die Fusspunkten-Curve eines Punktes P in Bezug auf eine gegebene Curve (oder Curvenstück) $\mathfrak{B}$ wird um so länger, je weiter der Punkt P über diejenige Kreislinie hinausrückt, welche um den genannten Punkt S der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.**

Da bei einer Ellipse und Hyperbel die Krümmungen der Curve in zwei Endpunkten eines Durchmessers allemal einander gleich sind, also nach Lehrsatz 6. der Mittelpunkt des Kegelschnittes der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser behafteten Punkte des ganzen Kegelschnittes sowohl, als auch zweier von zwei Durchmessern begrenzten Curvenstücke ist, so ergibt sich insbesondere:

Lehrsatz 11.

Unter allen Fusspunkten-Curven in Bezug auf eine Ellipse oder Hyperbel, oder auch in Bezug auf zwei von zwei Durchmessern begrenzte Bogen derselben ist diejenige die kürzeste, welche dem Mittelpunkte des Kegelschnittes entspricht.

§. 4.

Von den Curven, welche dadurch erzeugt werden, dass eine andere Curve auf einer Geraden rollt.

Es sei $MABCDN$ (Taf. III. Fig. 5.) irgend eine gebrochene Linie oder ein Stück eines Vielecks; A, B, C, D seien die Ecken und α, β, γ, δ die Winkel, welche die Seiten AB, BC, CD, DN mit den Verlängerungen der ihnen vorhergehenden Seiten MA, AB, BC, CD bilden; und P sei irgend ein Punkt in der Ebene des Vielecks. Denkt man sich nun, dass jenes Stück des letzteren auf einer festen Geraden $\mathfrak{G}$ als Basis rolle, d. h. dass die Seiten MA, AB, BC, CD, DN desselben nach einander in die Stelle der Abschnitte MA, $A\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{N}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ treten, so wird gleichzeitig der Punkt P eine krumme Linie beschreiben, welche aus so vielen Kreisbogen besteht, als das Polygonstück Ecken hat; die Punkte A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ werden die Centra, die Längen PA, PB, PC, PD die Halbmesser und die Winkel α, β, γ, δ die Centriwinkel dieser Bogen sein. Setzt man also der Kürze wegen $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$. $PD=d\ldots$, und versteht unter α, β, γ, δ die den gleichnamigen Winkeln zugehörigen Bogen für den Halbmesser $=1$, so ist die Länge der so entstandenen krummen Linie $PA_1B_1C_1D_1$ oder

$$W=\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=\Sigma(\alpha a).$$

Je kleiner nun die Winkel α, β, γ, δ werden, desto mehr nähert sich die Summe $\Sigma(\alpha a)$ der Summe $\Sigma(\sin\alpha.a)$, d. h. die Länge W dem Umfange des Fusspunkten-Vielecks V des Punktes P in Bezug auf das gegebene Polygonstück $MABCDN$ oder $\mathfrak{B}$; werden also jene Winkel unendlich klein, so sind beide einander gleich.

Lehrsatz 12.

Rollt eine gebrochene Linie 𝔙 über einer Geraden 𝔊, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von 𝔙 fest verbundene Punkt P eine krumme Linie W, deren Länge der Länge des Fusspunkten-Vielecks V des Punktes P in Bezug auf 𝔙 um so näher kommt, je kleiner die Winkel sind, welche die Theillinien von 𝔙 mit einander bilden.

Der Fall, dass sämmtliche Winkel α, β, γ, δ unendlich klein sind, tritt aber ein, wenn statt des Polygonstückes 𝔙 ein Curvenstück 𝔙 gesetzt wird; also gilt mit vollkommener Strenge:

Lehrsatz 13.

a) Rollt irgend eine Curve oder ein Curvenstück 𝔙 über einer Geraden 𝔊, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von 𝔙 fest verbundene Punkt P eine zweite Curve W, welche genau eben so lang ist, als die Fusspunkten-Curve V des Punktes P in Bezug auf denjenigen Theil von 𝔙, mit welchem diese Curve beim Rollen nach und nach die Gerade 𝔊 berührt.

b) Unter allen Curven W, welche durch das Rollen einer Curve 𝔙 über einer Geraden entstehen, ist diejenige die kürzeste, welche vom Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf die, mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser, als Coefficienten, behafteten Punkte der Curve 𝔙 beschrieben wird.

c) Die Curve W wird um so länger, je weiter der dieselbe beschreibende Punkt P über diejenige Kreislinie hinaus liegt, welche um den genannten Punkt S der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt des rollenden Theiles der Curve 𝔙 beschrieben wird.

Ueber die Gestalt der Curve W ist Folgendes zu bemerken: Besitzt die Curve 𝔙 einen Wendungspunkt und berührt sie in demselben beim Rollen die Gerade 𝔊, so tritt dieselbe von nun an von der einen Seite dieser Geraden auf die andere über und setzt zwar ihre Bewegung in derselben Richtung von 𝔊 fort, aber die Ebene der Curve 𝔙 dreht sich plötzlich z. B. rechtsherum, wenn sie bisher sich linksherum drehte, weshalb jenem Wendungspunkte von 𝔙 ein Rückkehrpunkt der Curve W entsprechen muss. In Taf. III. Fig. 5. wird die Tangente im Wendungspunkte durch die Linie BC des Polygonstücks, und der Rückkehrpunkt von W durch den Punkt B_1 repräsentirt. — Das Nämliche findet statt, wenn die Curve 𝔙 einen sogenannten Rückkehrpunkt im Schnabel (rebroussement en bec) besitzt, indem sie dann, bis zu diesem Punkte auf der Geraden 𝔊 fortgerollt, sofort in der entgegengesetzten Richtung, aber ohne von der einen Seite von 𝔊 auf die andere überzutreten, zurückrollt. Dagegen hat ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt, wo die Tangente zwischen beiden

Zweigen der Curve hindurchgeht, keinen Rückkehrpunkt der Curv
W zur Folge In diesem Falle nämlich rollt die erstere zw
auch längs dem anderen Zweige auf der Geraden 𝔖 zurück, tri
aber zugleich auch auf die andere Seite von 𝔖 über, so dass di
Ebene von 𝔅 selbst keine entgegengesetzte Drehung erleidet. Auc
diese beiden Fälle zeigen sich schon am Polygonstück 𝔅, wen
eine Ecke desselben nicht um denjenigen Winkel, welchen ei
Seite mit der Verlängerung der vorhergehenden bildet, sonde
um den von beiden Seiten selbst gebildeten hohlen Winkel g
dreht wird.

Besondere Fälle.

a) Ist die rollende Curve 𝔅 ein Kreis oder ein Kreisboge
so beschreibt der Mittelpunkt desselben eine Gerade von d
Länge des durchrollten Bogens; in der That fällt die Fusspunkte
Curve des Mittelpunktes eines Kreises in Bezug auf einen Boge
desselben mit diesem letzteren selbst zusammen. Der vorige Leh
satz *b*) sagt also aus, dass unter allen Cykloiden, welche von de
Punkten in der Ebene eines rollenden Kreises beschrieben werde
die gerade Linie die kürzeste sei.

b) Ist die Curve 𝔅 eine Parabel, so ist die Fusspunkte
Curve des Brennpunktes in Bezug auf dieselbe eine Gerad
nämlich die Scheiteltangente der Parabel; und gilt es nur eine
Bogen der letzteren, so ist die Fusspunkten-Curve des Bren
punktes demjenigen Stücke der Scheiteltangente gleich, das vo
den Tangenten in den beiden Endpunkten dieses Bogens begren
wird. Aber das Stück der Scheiteltangente, welches zwische
dem Scheitel und einer Tangente der Parabel liegt, ist bekann
lich halb so gross, als die Ordinate des Berührungspunktes diese
Tangente, und folglich das von jenen zwei Tangenten begrenzt
Stück halb so gross, als die Summe oder Differenz der Ordinate
der Endpunkte jenes Bogens; also ergibt sich aus Lehrsatz 13.
a) der folgende besondere

Lehrsatz 14.

Rollt ein Parabelbogen auf einer geraden Lini
so beschreibt der Brennpunkt der Parabel eine Curv
welche halb so lang als die Projektion jenes Bogen
auf eine zur Achse senkrechte Gerade ist.

c) Die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes einer Ellips
oder Hyperbel in Bezug auf dieselbe ist bekanntlich ein Krei
dessen Mittelpunkt mit dem der ersteren einerlei, und dessen Durch
messer die Hauptachse derselben ist. Ist nun in Taf. III. Fig. 6. A
irgend ein Bogen einer Ellipse oder Hyperbel; sind Aa, Bb di
Tangenten in dessen Endpunkten A, B; und a, b die Fusspunkt
der Senkrechten aus dem Brennpunkte F auf diese Tangenten, s
ist der Bogen ab jenes Kreises derjenigen Curve gleich, welch
vom Punkte F beim Rollen des Bogens AB auf einer Gerade
beschrieben wird. Zieht man aber noch die Halbmesser Ma, M

und aus dem anderen Brennpunkte F_1 die Zuglinien F_1A, F_1B, so sind letztere bekanntlich den ersteren parallel, und daher die Winkel aMb und AF_1B von gleicher Grösse. Demnach darf man behaupten:

Lehrsatz 15.

Rollt ein Ellipsen- oder ein Hyperbelbogen auf einer geraden Linie, so beschreibt ein jeder der beiden Brennpunkte des Kegelschnittes eine Curve von der Länge eines Kreisbogens, dessen Halbmesser die halbe Hauptachse, und dessen Centriwinkel derjenige Winkel ist, unter welchem jener erstere Bogen vom anderen Brennpunkte aus gesehen wird.

Zusatz. Rollt eine Ellipse oder Hyperbel in einer Ebene $\mathfrak{E}$ auf einer festen Geraden dieser Ebene, so verhalten sich die dem Berührungspunkte beider Linien entsprechenden Geschwindigkeiten des einen Brennpunktes ebenso wie die Geschwindigkeiten, mit welchen die Zuglinie des anderen Brennpunktes in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ des Kegelschnittes selbst den Berührungspunkt begleitet.

Lehrsatz 16.

Rollt eine Ellipse oder Hyperbel auf einer geraden Linie, so beschreibt unter allen Punkten ihrer Ebene der Mittelpunkt derselben die kürzeste Curve.

§. 5.

Von den Curven, welche durch das Rollen einer Curve auf einer anderen Curve erzeugt werden.

Denkt man sich zwei Polygonstücke $MABCDN$ und $M_1A_1B_1C_1D_1N_1$ oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$, deren gleichnamige Seiten paarweise gleich sind, so kann man das eine, z. B. $\mathfrak{B}$, dergestalt um das andere herumführen, dass fortwährend die gleichen Seiten sich decken und dass die Ecken von $\mathfrak{B}$ sich um die gleichnamigen Ecken von $\mathfrak{B}_1$ drehen. Während aber diess geschieht, wird jeder beliebige, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P eine krumme Linie beschreiben, welche aus so vielen Kreisbogen besteht, als das Polygonstück $\mathfrak{B}$ Ecken hat; die Halbmesser a, b, c, d dieser Bogen werden den Abständen PA, PB, PC, PD des Punktes P von diesen Ecken, und die Centriwinkel derselben werden, jenachdem die zusammentreffenden Ecken von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ sich gegenseitig ihre convexen Seiten zukehren oder nicht, den Summen oder den Differenzen der Winkel α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1, welche die gleichnamigen Seiten mit den Verlängerungen der vorhergehenden bilden, gleich sein.

Unter den vielen Fällen, welche auf der Unterscheidung des Convexen und Concaven in den beiden Polygonstücken beruhen, kommen hier vorzüglich folgende in Betracht:

a) Alle Winkel α, β, γ, δ von $\mathfrak{B}$ sind grösser (oder doch nur einzelne eben so gross) als die gleichnamigen Winkel von $\mathfrak{B}_1$; und dann ist es für das Endresultat einerlei, ob die convexen Ecken von $\mathfrak{B}$ durchweg den convexen, durchweg den concaven, oder aber theils den convexen, theils den concaven Ecken von $\mathfrak{B}_1$ zugekehrt werden.

b) Sämmtliche Winkel α, β, γ, δ sind kleiner (oder doch nur einzelne eben so gross) als die gleichnamigen von $\mathfrak{B}_1$, und es kommt die Bedingung hinzu, dass die convexen Ecken von $\mathfrak{B}_1$ entweder durchweg den convexen oder durchweg den concaven Ecken von $\mathfrak{B}$ zugekehrt seien.

c) Beide Polygonstücke sind congruent.

Bezeichnet man nämlich die Länge der vom Punkte P beschriebenen Curve, jenachdem $\mathfrak{B}$ von der einen oder von der anderen Seite auf $\mathfrak{B}_1$ rollt, das eine Mal durch W und das andere Mal durch W_0, und bedenkt, dass diese beiden Fälle sich durch die additive und subtraktive Lage der gleichnamigen Winkel unterscheiden, so erhält man für W und W_0 nothwendig zwei Gleichungen von folgender gegenseitiger Beziehung, nämlich im Falle

$$a)\quad W = a(\alpha\pm\alpha_1)+b(\beta\pm\beta_1)+c(\gamma\mp\gamma_1)+d(\delta\pm\delta_1);$$
$$W_0 = a(\alpha\mp\alpha_1)+b(\beta\mp\beta_1)+c(\gamma\pm\gamma_1)+d(\delta\mp\delta_1);$$

und hieraus die dritte:

$$W+W_0=2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)=2\Sigma(a\alpha):$$

$$b)\quad W = a(\alpha_1+\alpha)+b(\beta_1+\beta)+c(\gamma_1+\gamma)+d(\delta_1+\delta);$$
$$W_0 = a(\alpha_1-\alpha)+b(\beta_1-\beta)+c(\gamma_1-\gamma)+d(\delta_1-\delta);$$
$$W-W_0=2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)=2\Sigma(a\alpha);$$

$$c)\quad W = 2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta);$$
$$W_0=0;$$
$$W\pm W_0=2\Sigma(a\alpha).$$

Da nun die Grössen $\Sigma(a\alpha)$ und $\Sigma(a\sin\alpha)$ der Gleichheit um so näher kommen, je kleiner die Bogen α, β, γ, δ werden, so erhält man folgenden Satz, aus welchem man mit Leichtigkeit noch eine Reihe anderer Sätze wird ableiten können:

Lehrsatz 17.

Haben zwei Polygonstücke $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ paarweise und in derselben Ordnung gleiche Seiten, und rollt das erstere auf der einen Seite des andern, so beschreibt ein jeder mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P

eine krumme Linie W; und rollt $\mathfrak{B}$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{B}_1$, so beschreibt derselbe Punkt P eine andere krumme Linie W_0. Sind nun *a*) alle hohlen Winkel von $\mathfrak{B}$ kleiner als die ihnen entsprechenden hohlen Winkel von $\mathfrak{B}_1$, oder doch nur einzeln denselben gleich, so nähert sich die Summe der Längen von W und W_0 um so mehr der doppelten Länge des Fusspunkten-Vielecks des Punktes P in Bezug auf das Polygonstück $\mathfrak{B}$, je kleiner die Nebenwinkel aller jener hohlen Winkel werden. Sind dagegen *b*) alle hohlen Winkel von $\mathfrak{B}$ grösser als die ihnen entsprechenden hohlen Winkel von $\mathfrak{B}_1$ oder doch nur einzeln denselben gleich, und sind bei der Erzeugung von W immer nur die convexen Winkel von $\mathfrak{B}$ den convexen von $\mathfrak{B}_1$, und bei der Erzeugung von W_0 immer nur die concaven Winkel von $\mathfrak{B}$ den convexen von $\mathfrak{B}_1$ zugekehrt, so gilt das nämliche nicht von der Summe, sondern von dem Unterschiede jener Längen. Sind endlich *c*) beide Polygonstücke congruent, so gilt diess von der Länge der einen Curve selbst, und die andere verschwindet.

Lehrsatz 18.

A) Rollt eine beliebige Curve (oder ein Curvenstück) $\mathfrak{B}$ auf der einen Seite einer anderen beliebigen Curve $\mathfrak{B}_1$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ festverbundene Punkt P eine neue Curve W; und rollt $\mathfrak{B}$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{B}_1$ so, dass immer wieder dieselben Punkte beider Curven wie das erste Mal zusammentreffen, so beschreibt derselbe Punkt P eine andere Curve W_0. Ist nun *a*) die Curve $\mathfrak{B}$ in allen ihren Punkten stärker gekrümmt, als die Curve $\mathfrak{B}_1$ in den entsprechenden Punkten, so ist die Summe der Längen von W und W_0 doppelt so gross als die Länge der Fusspunkten-Curve des Punktes P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{B}$; ist aber *b*) die Curve $\mathfrak{B}$ in allen ihren Punkten schwächer gekrümmt, als die Curve $\mathfrak{B}_1$ in den entsprechenden Punkten, und ist bei der Erzeugung der beiden Curven W und W_0 das eine Mal der convexen Seite von $\mathfrak{B}_1$ durchweg die convexe, das andere Mal durchweg die concave Seite von $\mathfrak{B}$ zugekehrt, so ist der Unterschied der Längen von W und W_0 doppelt so gross als die jener Fusspunkten-Curve. Sind endlich *c*) beide Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ congruent, so gilt das nämliche von der Länge der einen Curve W selbst, und die andere W_0 verschwindet. Uebrigens gilt das in *a*) und *b*) Ausgesagte auch noch, wenn die Krümmungen der Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in einzelnen Punktenpaaren einander gleich sind.

B) Die Längen derjenigen Curven W und W_0 bilden unter allen die grösste Summe oder Differenz, welche vom Punkte der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den reciproken Werthen ihrer Krümungshalbmesser

behafteten Punkte der rollenden Curve 𝔅 beschrieben werden.

C) Und jene Summe oder Differenz wird um so grösser, je weiter der beschreibende Punkt *P* über diejenige Kreislinie hinaus liegt, welche um den genannten Punkt der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt der Curve 𝔅 gelegt wird.

Lehrsatz 19.

A) Die Epicykloide und die von dem nämlichen Punkte beschriebene Hypocykloide sind zusammen doppelt so lang als die Fusspunkten-Curve jenes Punktes in Bezug auf den erzeugenden Kreis, wenn der letztere kleiner als die Basis ist; dagegen ist die Epicykloide um die doppelte Länge dieser Curve grösser als die Hypocykloide, wenn der erzeugende Kreis grösser als die Basis ist; und sind diese beiden letzteren einander gleich, so ist die Epicykloide doppelt so lang als jene Fusspunkten-Curve — es mag nun die ganze Basis oder nur ein bestimmter Theil derselben von einem bestimmten Theile des erzeugenden Kreises durchrollt werden.

B) Die Summe oder Differenz der Längen der Epicykloide und Hypocykloide, welche vom Mittelpunkte des erzeugenden Kreises auf einerlei Basis beschrieben werden, ist doppelt so gross als diese Basis, und ist die letztere dem ganzen Umfange des erzeugenden Kreises gleich, so ist die Summe oder der Unterschied der Längen der Epicykloide und Hypocykloide, welche von irgend einem anderen Punkte beschrieben werden, grösser als die doppelte Basis.

Anmerkung. Im Falle *B*) sind die Epicykloide und Hypocykloide selber Kreise oder Kreisbogen; ist nämlich der Halbmesser der Basis $=r$, der des erzeugenden Kreises $=\varrho$, so ist der der Epicykloide $W=r+\varrho$ und der der Hypocykloide, wenn $r>\varrho$, $=r-\varrho$, und wenn $r<\varrho$, $=\varrho-r$. Ist nun $2qr\pi$ der durchrollte Theil der Basis, wo $q \gtreqless 1$, so verhält sich, wenn $r>\varrho$:

$$W:2(r+\varrho)\pi=2qr\pi:2r\pi;$$
$$W_0:2(r-\varrho)\pi=2qr\pi:2r\pi;$$

also

$$W+W_0=2q(r+\varrho)\pi+2q(r-\varrho)\pi=4qr\pi.$$

Ist aber $r<\varrho$, so ist

$$W-W_0=2q(r+\varrho)\pi-2q(\varrho-r)\pi=4qr\pi;$$

in beiden Fällen also erhält man das Doppelte der Basis oder, was einerlei ist, das Doppelte des erzeugenden Kreisbogens.

Lehrsatz 20.

Rollt ein Bogen eines Kegelschnittes nacheinander auf beiden Seiten eines eben so langen Bogens einer beliebigen Curve, so beschreibt ein jeder Brennpunkt des Kegelschnitts zwei Curven, deren Summe oder Unterschied eine bestimmte, von der Basis unabhängige Grösse hat, jenachdem der erste Bogen durchweg stärker oder schwächer als der zweite gekrümmt ist, vorausgesetzt, dass im zweiten Falle die Basis keinen Wendungspunkt besitzt. Diese Grösse ist nämlich im Falle der Parabel die Projektion ihres Bogens auf eine zur Achse senkrechte Gerade, und im Falle der Ellipse und Hyperbel ein Kreisbogen, welcher die halbe Hauptachse zum Halbmesser und das Doppelte des Winkels, unter welchem jener Bogen vom anderen Brennpunkte aus gesehen wird, zum Centriwinkel hat.

Lehrsatz 21.

Rollt ein Kegelschnitt auf einem demselben congruenten Kegelschnitte, indem immer zwei entsprechende Punkte zusammentreffen, so hat 1) unter allen Punkten in der Ebene des ersten sein Mittelpunkt die geringste Geschwindigkeit; 2) verhalten sich die Geschwindigkeiten, mit welchen sich ein Brennpunkt in der Ebene der Basis bewegt, ebenso wie die Geschwindigkeiten, mit welchen im Falle der Parabel die mit der Achse parallele Gerade, im Falle der Ellipse und Hyperbel die Zuglinie des anderen Brennpunktes den Berührungspunkt beider Kegelschnitte in der Ebene des erzeugenden begleitet.

XVI.

Ueber einen Satz der analytischen Geometrie.

Von

dem Herausgeber.

1.

Jedermann kennt die elegante und in der Anwendung so fruchtbare Formel, durch welche der Cosinus des zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkels, den zwei von dem Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume ausgehende gerade Linien mit einander einschliessen, durch die Cosinus der von diesen Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, ebenfalls zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel ausgedrückt wird. Sind nämlich α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die von den beiden Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel, und bezeichnen wir den von diesen beiden Linien mit einander eingeschlossenen, ebenfalls 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, so ist bekanntlich

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Es scheint mir interessant zu sein, diesen in der vorhergehenden Form auf rechtwinklige Coordinaten eingeschränkten Satz auf beliebige schiefwinklige Coordinatensysteme zu erweitern, oder vielmehr die der vorhergehenden entsprechende allgemeine Gleichung für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem aufzusuchen, unter welcher die vorhergehende Gleichung als ein besonderer Fall enthalten ist, und aus der dieselbe hervorgehen muss, wenn man das beliebige schiefwinklige System rechtwinklig annimmt. Diese allgemeine Gleichung werde ich in der vorliegenden Abhandlung auf eine von andern nicht ganz allgemein bekannten Untersuchungen möglichst unabhängige und völlig elementare Weise zu entwickeln versuchen, und werde dann auch zeigen, dass sich aus derselben mit grosser Leichtigkeit ein anderer ebenfalls sehr bemerkenswerther Satz ableiten lässt, welchen Cauchy auf eine von der hier gegebenen Entwickelung völlig verschiedene Weise

in der neuesten bis jetzt erschienenen Lieferung seiner Exercices d'Analyse et de Physique mathématique *) bewiesen hat, bemerke aber, dass ich die in Rede stehende allgemeine, von Cauchy a. a. O. nicht entwickelte und wohl auch überhaupt sonst noch nicht bekannte Gleichung als den Hauptgegenstand dieser Abhandlung betrachtet zu sehen wünsche.

II.

In Taf. III. Fig. 7. sei O der Anfang eines beliebigen Coordinatensystems im Raume und $OK = \varrho$ eine von demselben ausgehende gerade Linie, welche mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z respective die 180^0 nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst. Die Coordinaten des Punktes K seien x, y, z. Sind nun OX, OY, OZ die Theile der drei Coordinatenaxen, welche den körperlichen Winkel einschliessen, in dem die Linie OK liegt, so beschreibe man über denselben als Kanten von unbestimmter Länge und mit der ihrer Länge nach bestimmten Linie OK als Diagonale ein Parallelepipedon, wie aus der Figur ohne weitere Erläuterung ersichtlich ist. Denken wir uns dann noch die in der Figur nicht gezeichnete Linie AK gezogen, so ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze in dem Dreiecke OAK:

$$1)\quad AK^2 = OK^2 + OA^2 - 2OK.OA.\cos AOK,$$

und nach demselben Satze ist offenbar

$$2)\quad AK^2 = OB^2 + OC^2 + 2OB.OC.\cos YOZ.$$

Nun ist aber, wie sogleich in die Augen fällt, entweder

$$OA = +x,\ \angle AOK = \alpha$$

oder

$$OA = -x,\ \angle AOK = 180^0 - \alpha,$$

und folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OA = \pm x,\ \cos AOK = \pm \cos\alpha;$$

also immer

$$OA.\cos AOK = x\cos\alpha;$$

folglich nach 1) in völliger Allgemeinheit:

$$3)\quad AK^2 = \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha.$$

Ferner ist, wobei die Bedeutung des Symbols (yz) als bekannt

*) Tome troisième. 1843. 29. Livraison. Paris. 1845. p. 137.

vorausgesetzt werden kann, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander entweder

$$OB = \pm y,\quad OC = \pm z,\quad \angle YOZ = (yz).$$

oder

$$OB = \pm y,\quad OC = \mp z,\quad \angle YOZ = 180^0 - (yz);$$

d. i. mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OB.OC = \pm yz,\quad \cos YOZ = \pm \cos(yz);$$

also immer

$$OB.OC.\cos YOZ = yz \cos(yz);$$

folglich nach 2) in völliger Allgemeinheit:

$$4)\quad AK^2 = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz).$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) ergiebt sich also jetzt die völlig allgemein gültige Gleichung:

$$5)\quad \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz).$$

Vertauscht man nun aber in dieser Gleichung die Zeichen gehörig, so erhält man überhaupt die drei folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz), \\ \varrho^2 + y^2 - 2\varrho y\cos\beta = z^2 + x^2 + 2zx\cos(zx), \\ \varrho^2 + z^2 - 2\varrho z\cos\gamma = x^2 + y^2 + 2xy\cos(xy). \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$7)\quad 3\varrho^2 - 2\varrho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx).$$

Denkt man sich jetzt in der Figur von den Punkten C und D auf die Linie OK Perpendikel gefällt, und bezeichnet deren Fusspunkte durch C' und D', so ist

$$8)\quad OK = KD' + C'D' + OC'.$$

Jenachdem nun $OA = +x$ oder $OA = -x$ ist, ist offenbar $\angle XOK = \alpha$ oder $\angle XOK = 180^0 - \alpha$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OA = \pm x,\quad \cos XOK = \pm\cos\alpha;$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$KD' = OA.\cos XOK = x\cos\alpha.$$

Denkt man sich durch CC' und DD' zwei auf OK senkrecht stehende Ebenen gelegt, und zwischen denselben von C' aus eine der Linie OB parallele Linie $C'D''$ gezogen, so ist offenbar $C'D''=OB$, und, jenachdem $OB=+y$ oder $OB=-y$ ist, ist $\angle D'C'D''=\angle YOK=\beta$ oder $\angle D'C'D''=\angle YOK=180^0-\beta$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OB=\pm y, \cos D'C'D''=\cos YOK=\pm\cos\beta;$$

also ist, weil das Dreieck $C'D'D''$ offenbar bei D' rechtwinklig ist, in völliger Allgemeinheit

$$C'D'=OB.\cos YOK=y\cos\beta.$$

Jenachdem endlich $OC=+z$ oder $OC=-z$ ist, ist offenbar $\angle ZOK=\gamma$ oder $\angle ZOK=180^0-\gamma$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OC=\pm z, \cos ZOK=\pm\cos\gamma;$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$OC'=OC.\cos ZOK=z\cos\gamma.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von KD', $C'D'$, OC' in die Gleichung 8) ein, und setzt zugleich $OK=\varrho$, so erhält man die Gleichung

$$9)\quad \varrho=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Diese Gleichung führt aber in Verbindung mit der Gleichung 7) auf der Stelle zu der Gleichung

$$10)\quad \varrho^2=x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx).$$

Sind jetzt x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten zweier beliebigen Punkte im Raume, deren Entfernung von einander durch E bezeichnet werden mag, so lege man durch den ersten dieser beiden Punkte als Anfang ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem, und bezeichne die Coordinaten des zweiten der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf dieses neue System durch x', y', z'; so ist nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$x_1=x+x', \; y_1=y+y', \; z_1=z+z';$$

also

$$x'=x_1-x, \; y'=y_1-y, \; z'=z_1-z.$$

Nun ist aber nach 10) offenbar

$$E^2=x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(xy)+2y'z'\cos(yz)+2z'x'\cos(zx),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$11)\quad E^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 + 2(x_1-x)(y_1-y)\cos(xy) + 2(y_1-y)(z_1-z)\cos(yz) + 2(z_1-z)(x_1-x)\cos(zx)$$

oder

$$12)\quad E^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + 2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy) + 2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz) + 2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx).$$

Führt man den Ausdruck von ϱ^2 aus 10) in eine jede der dr[illegible] Gleichungen 6) ein, so erhält man nach einigen leichten Redu[illegible] tionen die drei folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} \varrho\cos\alpha = x + y\cos(xy) + z\cos(zx), \\ \varrho\cos\beta = y + z\cos(yz) + x\cos(xy), \\ \varrho\cos\gamma = z + x\cos(zx) + y\cos(yz); \end{cases}$$

und wenn man nun aus diesen drei Gleichungen auf dem Weg gewöhnlicher algebraischer Elimination x, y, z bestimmt; so er hält man, wenn der Kürze wegen

$$14)\quad \begin{cases} K = \cos\alpha\sin^2(yz) - \cos\beta\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\} \\ \qquad - \cos\gamma\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}, \\ L = \cos\beta\sin^2(zx) - \cos\gamma\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \\ \qquad - \cos\alpha\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}, \\ M = \cos\gamma\sin^2(xy) - \cos\alpha\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\} \\ \qquad - \cos\beta\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \end{cases}$$

und

$$15)\quad N = 1 - \cos^2(xy) - \cos^2(yz) - \cos^2(zx) + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx)$$

gesetzt wird:

$$16)\quad x = \frac{K}{N}\varrho,\quad y = \frac{L}{N}\varrho,\quad z = \frac{M}{N}\varrho.$$

Es ist auch, wie man leicht findet:

$$17)\quad \begin{aligned} N &= \sin^2(yz)\sin^2(zx) - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}^2 \\ &= \sin^2(zx)\sin^2(xy) - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}^2 \\ &= \sin^2(xy)\sin^2(yz) - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}^2. \end{aligned}$$

Zerlegt man aber jede dieser Differenzen zweier Quadrat[illegible]

auf bekannte Weise in Factoren, so erhält man mit Hülfe einiger bekannten goniometrischen Formeln auch:

$$18)\quad N = 4\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(yz)+(zx)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(yz)+(zx)-(xy)\}$$
$$\times\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(zx)-(yz)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(yz)-(zx)\}.$$

III.

Wir wollen uns nun zwei von dem Anfange der Coordinaten ausgehende gerade Linien denken, und den von denselben eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, die von diesen Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, ebenfalls 180^0 nicht übersteigenden Winkel aber durch α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 bezeichnen. In jeder dieser beiden Linien nehmen wir einen beliebigen Punkt an, und bezeichnen die Entfernungen dieser beiden Punkte von dem Anfange der Coordinaten durch ϱ und ϱ_1, ihre Entfernung von einander aber durch E; so ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$19)\quad E^2 = \varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\Theta.$$

Bezeichnen wir aber die Coordinaten der beiden in Rede stehenden Punkte durch x, y, z und x_1, y_1, z_1; so ist nach 10) und 12)

$$\varrho^2 = x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx),$$
$$\varrho_1{}^2 = x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2x_1y_1\cos(xy)+2y_1z_1\cos(yz)+2z_1x_1\cos(zx)$$

und

$$\begin{aligned}E^2 = (x-x_1)^2 &+ (y-y_1)^2+(z-z_1)^2\\ &+2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy)\\ &+2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz)\\ &+2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx);\end{aligned}$$

also nach 19):

$$\begin{aligned}(x-x_1)^2 &+ (y-y_1)^2+(z-z_1)^2\\ &+2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy)\\ &+2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz)\\ &+2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&= x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx)\\ &+ x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2x_1y_1\cos(xy)+2y_1z_1\cos(yz)+2z_1x_1\cos(zx)\\ &- 2\varrho\varrho_1\cos\Theta,\end{aligned}$$

oder, wie man hieraus, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, leicht findet:

$$20)\quad \varrho\varrho_1 \cos\Theta = xx_1 + yy_1 + zz_1 + (xy_1 + yx_1)\cos(xy) \\ + (yz_1 + zy_1)\cos(yz) \\ + (zx_1 + xz_1)\cos(zx).$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$21)\quad P = \sin^2(xy),\ Q = \sin^2(yz),\ R = \sin^2(zx)$$

und

$$22)\quad \begin{cases} P_1 = \cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx), \\ Q_1 = \cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy), \\ R_1 = \cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz); \end{cases}$$

so ist nach 16)

$$x = \frac{Q\cos\alpha - P_1\cos\beta - R_1\cos\gamma}{N}\varrho,$$

$$y = \frac{R\cos\beta - Q_1\cos\gamma - P_1\cos\alpha}{N}\varrho,$$

$$z = \frac{P\cos\gamma - R_1\cos\alpha - Q_1\cos\beta}{N}\varrho$$

und

$$x_1 = \frac{Q\cos\alpha_1 - P_1\cos\beta_1 - R_1\cos\gamma_1}{N}\varrho_1,$$

$$y_1 = \frac{R\cos\beta_1 - Q_1\cos\gamma_1 - P_1\cos\alpha_1}{N}\varrho_1,$$

$$z_1 = \frac{P\cos\gamma_1 - R_1\cos\alpha_1 - Q_1\cos\beta_1}{N}\varrho_1$$

Also ist nach 20):

$$23)\quad NN\cos\Theta =$$

$$(Q\cos\alpha - P_1\cos\beta - R_1\cos\gamma)(Q\cos\alpha_1 - P_1\cos\beta_1 - R_1\cos\gamma_1)$$
$$+(R\cos\beta - Q_1\cos\gamma - P_1\cos\alpha)(R\cos\beta_1 - Q_1\cos\gamma_1 - P_1\cos\alpha_1)$$
$$+(P\cos\gamma - R_1\cos\alpha - Q_1\cos\beta)(P\cos\gamma_1 - R_1\cos\alpha_1 - Q_1\cos\beta_1)$$
$$+\begin{Bmatrix} (Q\cos\alpha - P_1\cos\beta - R_1\cos\gamma)(R\cos\beta_1 - Q_1\cos\gamma_1 - P_1\cos\alpha_1) \\ +(R\cos\beta - Q_1\cos\gamma - P_1\cos\alpha)(Q\cos\alpha_1 - P_1\cos\beta_1 - R_1\cos\gamma_1) \end{Bmatrix}\cos(xy)$$
$$+\begin{Bmatrix} (R\cos\beta - Q_1\cos\gamma - P_1\cos\alpha)(P\cos\gamma_1 - R_1\cos\alpha_1 - Q_1\cos\beta_1) \\ +(P\cos\gamma - R_1\cos\alpha - Q_1\cos\beta)(R\cos\beta_1 - Q_1\cos\gamma_1 - P_1\cos\alpha_1) \end{Bmatrix}\cos(yz)$$
$$+\begin{Bmatrix} (P\cos\gamma - R_1\cos\alpha - Q_1\cos\beta)(Q\cos\alpha_1 - P_1\cos\beta_1 - R_1\cos\gamma_1) \\ +(Q\cos\alpha - P_1\cos\beta - R_1\cos\gamma)(P\cos\gamma_1 - R_1\cos\alpha_1 - Q_1\cos\beta_1) \end{Bmatrix}\cos(zx)$$

r, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$24)\quad NN\cos\Theta = \left.\begin{Bmatrix} QQ+P_1P_1+R_1R_1 \\ -2QP_1\cos(xy) \\ +2P_1R_1\cos(yz) \\ -2R_1Q\cos(zx)\end{Bmatrix}\right\}\cos\alpha\cos\alpha_1$$

$$+\left.\begin{Bmatrix} RR+Q_1Q_1+P_1P_1 \\ -2RP_1\cos(xy) \\ -2Q_1R\cos(yz) \\ +2P_1Q_1\cos(zx)\end{Bmatrix}\right\}\cos\beta\cos\beta_1$$

$$+\left.\begin{Bmatrix} PP+R_1R_1+Q_1Q_1 \\ +2Q_1R_1\cos(xy) \\ -2PQ_1\cos(yz) \\ -2R_1P\cos(zx)\end{Bmatrix}\right\}\cos\gamma\cos\gamma_1$$

$$-\left.\begin{Bmatrix} ((Q+R)P_1-Q_1R_1) \\ -(QR+P_1P_1)\cos(xy) \\ -(P_1Q_1-RR_1)\cos(yz) \\ -(R_1P_1-QQ_1)\cos(zx)\end{Bmatrix}\right\}(\cos\alpha\cos\beta_1+\cos\beta\cos\alpha_1)$$

$$-\left.\begin{Bmatrix} ((R+P)Q_1-R_1P_1) \\ -(P_1Q_1-RR_1)\cos(xy) \\ -(RP+Q_1Q_1)\cos(yz) \\ -(Q_1R_1-PP_1)\cos(zx)\end{Bmatrix}\right\}(\cos\beta\cos\gamma_1+\cos\gamma\cos\beta_1)$$

$$-\left.\begin{Bmatrix} ((P+Q)R_1-P_1Q_1) \\ -(R_1P_1-QQ_1)\cos(xy) \\ -(Q_1R_1-PP_1)\cos(yz) \\ -(PQ+R_1R_1)\cos(zx)\end{Bmatrix}\right\}(\cos\gamma\cos\alpha_1+\cos\alpha\cos\gamma_1).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned}25)\quad NN\cos\Theta = {} & A\cos\alpha\cos\alpha_1 \\ & +B\cos\beta\cos\beta_1 \\ & +C\cos\gamma\cos\gamma_1 \\ & +D(\cos\alpha\cos\beta_1+\cos\beta\cos\alpha_1) \\ & +E(\cos\beta\cos\gamma_1+\cos\gamma\cos\beta_1) \\ & +F(\cos\gamma\cos\alpha_1+\cos\alpha\cos\gamma_1),\end{aligned}$$

wo die Bedeutung von

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$$

von selbst erhellen wird; so ist, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\begin{aligned}
A &= N\sin^2(yz),\\
B &= N\sin^2(zx),\\
C &= N\sin^2(xy),\\
D &= -N\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\},\\
E &= -N\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\},\\
F &= -N\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\};
\end{aligned}$$

und nach 25) erhält man also für $N\cos\Theta$, wo immer N seine aus dem Obigen bekannte Bedeutung hat, den folgenden merkwürdigen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
26)\quad N\cos\Theta = &\sin^2(yz)\cos\alpha\cos\alpha_1\\
&+\sin^2(zx)\cos\beta\cos\beta_1\\
&+\sin^2(xy)\cos\gamma\cos\gamma_1\\
&-\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}(\cos\alpha\cos\beta_1+\cos\beta\cos\alpha_1)\\
&-\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}(\cos\beta\cos\gamma_1+\cos\gamma\cos\beta_1)\\
&-\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}(\cos\gamma\cos\alpha_1+\cos\alpha\cos\gamma_1).
\end{aligned}$$

Für rechtwinklige Coordinaten ist

$$(xy)=(yz)=(zx)=90^0,$$

also nach dem Obigen offenbar $N=1$, und folglich nach 26):

$$27)\quad \cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1,$$

welches die bekannte Formel ist, deren schon oben in der Einleitung Erwähnung gethan worden ist.

IV.

Zu dem im Vorhergehenden betrachteten Coordinatensysteme der xyz wollen wir nun ein zweites Coordinatensystem der $x'y'z'$ mit demselben Anfangspunkte fügen, dessen Axen auf den Coordinatenebenen des ersten Systems, nämlich die Axe der

$$x',\ y',\ z'$$

respective auf der Ebene der

$$yz,\ zx,\ xy,$$

senkrecht stehen, und wollen die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte ausgehenden beiden Linien mit den positiven Theilen der Axen der x', y', z' einschliessen, durch α', β', γ' und α'_1, β'_1, γ'_1 bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, ist offenbar nach 26):

$$
\begin{aligned}
N\cos\alpha'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xx')\cos\alpha_1 \\
& + \sin^2(zx)\cos(yx')\cos\beta_1 \\
& + \sin^2(xy)\cos(zx')\cos\gamma_1 \\
& - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xx')\cos\beta_1+\cos(yx')\cos\alpha_1\} \\
& - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yx')\cos\gamma_1+\cos(zx')\cos\beta_1\} \\
& - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zx')\cos\alpha_1+\cos(xx')\cos\gamma_1\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\cos\beta'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xy')\cos\alpha_1 \\
& + \sin^2(zx)\cos(yy')\cos\beta_1 \\
& + \sin^2(xy)\cos(zy')\cos\gamma_1 \\
& - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xy')\cos\beta_1+\cos(yy')\cos\alpha_1\} \\
& - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yy')\cos\gamma_1+\cos(zy')\cos\beta_1\} \\
& - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zy')\cos\alpha_1+\cos(xy')\cos\gamma_1\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\cos\gamma'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xy')\cos\alpha_1 \\
& + \sin^2(zx)\cos(yz')\cos\beta_1 \\
& + \sin^2(xy)\cos(zz')\cos\gamma_1 \\
& - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xz')\cos\beta_1+\cos(yz')\cos\alpha_1\} \\
& - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yz')\cos\gamma_1+\cos(zz')\cos\beta_1\} \\
& - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zz')\cos\alpha_1+\cos(xz')\cos\gamma_1\}.
\end{aligned}
$$

Nach der Voraussetzung sind aber die Winkel

$$(yx'),\ (zx');\ (zy'),\ (xy');\ (xz'),\ (yz')$$

sämmtlich rechte Winkel, und die drei obigen Gleichungen nehmen daher die folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
& N\frac{\cos\alpha'_1}{\cos(xx')} \\
& = \sin^2(yz)\cos\alpha_1 - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\cos\beta_1 \\
& \qquad - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\cos\gamma_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& N\frac{\cos\beta'_1}{\cos(yy')} \\
& = \sin^2(zx)\cos\beta_1 - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\cos\alpha_1 \\
& \qquad - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\cos\gamma_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& N\frac{\cos\gamma'_1}{\cos(zz')} \\
& = \sin^2(xy)\cos\gamma_1 - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\cos\beta_1 \\
& \qquad - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\cos\alpha_1.
\end{aligned}
$$

Weil nun nach 26)

$$N\cos\Theta$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \cos\alpha\,\{\sin^2(yz)\cos\alpha_1 - (\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx))\cos\beta_1 \\
& \qquad - (\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz))\cos\gamma_1\} \\
+ \; & \cos\beta\,\{\sin^2(zx)\cos\beta_1 - (\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx))\cos\alpha_1 \\
& \qquad - (\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy))\cos\gamma_1\} \\
+ \; & \cos\gamma\,\{\sin^2(xy)\cos\gamma_1 - (\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy))\cos\beta_1 \\
& \qquad - (\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz))\cos\alpha_1\}
\end{aligned}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$28)\quad \cos\Theta = \frac{\cos\alpha\cos\alpha'_1}{\cos(xx')} + \frac{\cos\beta\cos\beta'_1}{\cos(yy')} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma'_1}{\cos(zz')}.$$

Bezeichnet man die beiden Linien durch ϱ und ϱ', so kann man diese Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$29)\quad \cos(\varrho\varrho')$$

$$= \frac{\cos(\varrho x)\cos(\varrho' x')}{\cos(xx')} + \frac{\cos(\varrho y)\cos(\varrho' y')}{\cos(yy')} + \frac{\cos(\varrho z)\cos(\varrho' z')}{\cos(zz')}.$$

Weil nach bekannten stereometrischen Sätzen auch die Axen der

$$x,\ y,\ z$$

respective auf den Ebenen der

$$y'z',\ z'x',\ x'y'$$

senkrecht stehen, so kann man in der vorhergehenden Gleichung die gleichnamigen Axen der beiden Systeme mit einander verwechseln, wodurch man die Gleichung

$$30)\quad \cos(\varrho\varrho')$$

$$= \frac{\cos(\varrho x')\cos(\varrho' x)}{\cos(xx')} + \frac{\cos(\varrho y')\cos(\varrho' y)}{\cos(yy')} + \frac{\cos(\varrho z')\cos(\varrho' z)}{\cos(zz')}$$

erhält.

Ist das System der xyz, und also natürlich auch das System der $x'y'z'$ rechtwinklig, so kann man offenbar immer annehmen, dass die positiven Theile der Axen der x', y', z' respective mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z zusammenfallen, und es ist dann

$$(xx') = (yy') = (zz') = 0$$

und

$$(\varrho' x') = (\varrho' x),\ (\varrho' y') = (\varrho' y),\ (\varrho' z') = (\varrho' z);$$

also nach 29):

$$31) \quad \cos(\varrho\varrho')$$
$$= \cos(\varrho x)\cos(\varrho' x) + \cos(\varrho y)\cos(\varrho' y) + \cos(\varrho z)\cos(\varrho' z),$$

welches wieder die Gleichung 27) ist.

In den Gleichungen 29) und 30) ist der in der Einleitung erwähnte, von Cauchy a. a. O. auf eine ganz andere Art bewiesene Satz enthalten. Unser Hauptzweck bei der vorliegenden Abhandlung war aber, wie schon erinnert worden ist, die Entwickelung der allgemeinen Gleichung 26), von welcher die bekannte Gleichung 27) ein besonderer Fall ist.

XVII.

Ueber die Schwingungen eines kleinen Körpers, der an einem elastischen Körper befestigt ist.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die Abhandlung Nro. XXVI. im 7ten Bande des Archivs erinnerte mich an eine frühere Arbeit, die ich hier vorlegen will. Sie behandelt die Bewegung eines kleinen Körpers, der z. B. am einen Ende eines elastischen Schraubendrahtes befestigt ist. Wird ein solcher Draht ausgedehnt oder zusammengedrückt, so geräth der daran befestigte Körper in eine hin- und hergehende Bewegung um den Punkt seiner Ruhe herum. Diese Bewegung ist hervorgebracht durch die Kraft der Elastizität, von der man hier annimmt, sie wirke wie eine von dem Punkte, in welchem das Ende des freien Drahtes für den Fall der Ruhe ist, ausgehende und im Verhältniss der Entfernung wirkende anziehende Kraft. Unter diesen Voraussetzungen werden folgende Aufgaben leicht verstanden werden. Es wird natürlich dabei vorausgesetzt, dass das andere Ende des Drahtes festgemacht sei; der feste Punkt aber,

von dem im Folgenden die Rede ist, ist der Punkt, in welchem das freie Ende des Drahtes sich befindet, wenn der Draht unbelastet in Ruhe ist.

§. 1.

Ein Körper, dessen Gewicht (in Kilog.) p sei, ist einer im direkten Verhältniss der Entfernung wirkenden Kraft unterworfen, die von einem festen Punkte ausgeht; welches ist seine Bewegung?

Sei in untenstehender Figur

C———————A———Q———B

A der feste Punkt, B der Ausgangspunkt des Körpers, Q seine Stelle am Ende der Zeit t, und $AQ=x$, so hat man offenbar:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{gex}{p},$$

wenn g die bekannte Beschleunigung durch die Schwere, e eine konstante Grösse ist, die von der Beschaffenheit des Drahtes abhängt. Hieraus folgt zunächst:

$$2\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{2gex}{p}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=-\frac{gex^2}{p}+C=v^2.$$

Ist nun $AB=a$, so ist v (die Geschwindigkeit) für $x=a$ Null, also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=\frac{ge}{p}(a^2-x^2)=v^2. \qquad (1)$$

Aus (1) folgt

$$-\frac{\partial x}{\partial t}=\sqrt{\frac{eg}{p}}\cdot\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\partial t.\sqrt{\frac{eg}{p}}=-\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$t.\sqrt{\frac{eg}{p}}=C-\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right).$$

Da, für $x=a$, $t=0$, so ist

$$t.\sqrt{\frac{eg}{p}}=\frac{4n+1}{2}\pi-\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right), \qquad (2)$$

worin n eine bestimmte ganze Zahl ist.

Aus den Gleichungen (1) und (2) schliesst man leicht:

Der Körper bewegt sich von B bis C, wenn $AC = AB$, von B bis A mit zunehmender, von C bis A mit abnehmender Geschwindigkeit; in B und C ist seine Geschwindigkeit Null; von C bis B geht der Körper umgekehrt so, wie von B bis C u. s. f.

Die Zeit, welche verfliesst, bis der Körper, nachdem er von B ausgegangen, das erste Mal wieder dorthin zurückkommt, ist $2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$; die Zeit, die er braucht von B bis C, ist die Hälfte davon. (Von C bis B ist $\text{arc}(\sin = \frac{x}{a})$ negativ.)

In der Formel (2) ist für die erste Bewegung von B bis wieder nach B, $n = 1$; für die zweite Bewegung von B bis wieder nach B, $n = 2$ u. s. f.

Die Stelle, welche der Körper am Ende einer bestimmten Zeit T einnimmt, findet sich folgendermassen.

Sei $T = 2n\pi\sqrt{\frac{p}{eg}} + \varrho$, worin $\varrho < 2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, so ist

$$T\sqrt{\frac{eg}{p}} - \frac{4n+1}{2}\pi = -\text{arc}(\sin = \frac{x}{a}),$$

demnach

$$x = a\cos(\varrho\sqrt{\frac{eg}{p}}). \qquad (3)$$

Für $T = 0$ ist $\varrho = 0$, also $x = a$;

für $T = \pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$ ist $\varrho = \pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, also $x = -a$ u. s. f.

Die Gleichungen (1), (2), (3) bestimmen die Bewegung vollständig.

§. 2.

Die Verhältnisse seien wie im vorigen Paragraphen, nur nehmen wir den Körper auch noch als den Wirkungen der Schwerkraft unterworfen an. Es sei x vom Anziehungsmittelpunkte aus nach unten gerechnet und die ursprüngliche Entfernung von demselben wieder a (indem vorausgesetzt wird, dass die Schwingungen senkrecht auf und nieder geschehen).

Für diesen Fall ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g}{p}(p - ex),$$

woraus wie oben

$$v^2 = \frac{g}{p}(2px - ex^2) + C.$$

Da, für $x = a$, $v = 0$, so ist

$$v^2 = \frac{g}{p}[2p(x-a) + e(a^2 - x^2)] = \frac{g}{p}(2p - ea - ex)(x-a). \quad ($$

Setzt man also $2p - ae = be$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{ge}{p}(b-x)(x-a),$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{ge}{p}} \cdot \sqrt{(b-x)(x-a)},$$

$$\partial t . \sqrt{\frac{ge}{p}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}},$$

$$t\sqrt{\frac{ge}{p}} = -2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right) + C,$$

und da, für $x = a$, $t = 0$ ist, so folgt daraus:

$$t\sqrt{\frac{eg}{p}} = (2n+1)\pi - 2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right), \qquad (2)$$

aus welcher Formel man x durch t ausdrücken kann.

Vor Allem muss hier bemerkt werden, dass wenn $v = 0$ fü[r] $x = a$ sein soll, der Punkt, in welchem der Körper im Anfang sei[n] soll, tiefer sein muss, als der, in welchem die Anziehungskra[ft] und die Schwere gleich stark wirken, für den also $ex = p$, od[er] $x = \frac{p}{e}$ ist, d. h. $a > \frac{p}{e}$; im andern Falle ginge der Körper nich[t] zurück, sondern er würde sich zuerst noch weiter vom Anziehungs[-] mittelpunkte entfernen.

Die Geschwindigkeit ist Null für $x = a$ und für $x = b = \frac{2p}{e} -$[…]

Der Körper schwingt also in dem Raume von $x = a$ bis $x = \frac{2p}{e} -$[…] hin und her; ist demnach $a < \frac{2p}{e}$, so erreicht er nie den Anzie[-] hungsmittelpunkt. Die Zeit, welche der Körper braucht, um vo[n] $x = a$ bis $x = \frac{2p}{e} - a$ zu gehen, findet sich $\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, und die, welche er braucht, um auf seine ursprüngliche Stelle zurückzu[-] gehen: $2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, ganz wie in §. 1. Der Punkt, in welchem de[r]

Körper die grösste Geschwindigkeit hat, entspricht $x=\frac{p}{e}$; die Zeit, welche er braucht, um von $x=a$ bis $x=\frac{p}{e}$ zu gelangen, ist $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p}{eg}}$, also $\frac{1}{4}$ der ganzen Schwingungsdauer; zugleich liegt dieser Punkt in der Mitte zwischen den äussersten Punkten. Die Bewegung ist übrigens ähnlich wie in §. 1.

§. 3.

Sei Alles wie in §. 2., nur befinde sich der Körper im Anfange über dem Punkte $x=\frac{p}{e}$, sei also $a<\frac{p}{e}$, so findet man die gleichen Resultate in Bezug auf die Schwingungsdauer; die Bewegung ist ebenfalls die nämliche, ihre äussersten Gränzen sind $x=\frac{p}{e}$ und $x=\frac{2p}{e}-a$, wie oben, so dass §. 2. allgemein gilt.

Setzt man a negativ, so deutet diess an, dass der Körper anfänglich über dem Anziehungspunkte gewesen; die Schwingungsdauer ist die gleiche, wie so eben; der Körper oszillirt zwischen $x=-a$ und $x=\frac{2p}{e}+a$; seine grösste Geschwindigkeit hat er am nämlichen Punkte, wie so eben u. s. f.

§. 4.

Sei ein Körper, dessen Gewicht p sein soll, der Wirkung zweier anziehenden Mittelpunkte unterworfen, welche auf die angeführte Art wirken; heissen C und C' die Mittelpunkte, ist a ihre Entfernung und werden die Abszissen x gezählt von C gegen C', ist der Körper ferner im Anfange der Bewegung auf der geraden Linie, welche die beiden Anziehungsmittelpunkte verbindet, so hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{e'(a-x)-ex}{p}g,$$

wobei e' und e den beiden Mittelpunkten entsprechen, und x kleiner als a vorausgesetzt ist. Hieraus

$$v^2=\frac{2ae'x-e'x^2-ex^2}{p}g+C.$$

und wenn für $x=k(<a)$, $v=0$:

$$v^2 = \frac{g}{p}\left[2ae'(x-k) - (e+e')(x^2-k^2)\right] \qquad (1)$$

$$= \frac{g}{p}(2ae' - (e+e')(x+k))(x-k)$$

$$= \frac{g}{p}(2ae' - (e+e')k - (e+e')x)(x-k).$$

Setzt man also

$$2ae' - (e+e')k = m(e+e'),$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{g(e+e')}{p}(m-x)(x-k),$$

woraus, wie oben:

$$t\sqrt{\frac{g(e+e')}{p}} = (2n+1)\pi - 2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{m-x}{x-k}}\right). \qquad (2)$$

Also ist die Dauer einer Oszillation (hin und her) $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(e+e')}}$; der Körper oszillirt zwischen $x=k$ und $x=m=\frac{2ae'}{e+e'}-k$; er hat seine grösste Geschwindigkeit in $x=\frac{ae'}{e+e'}$, welcher Punkt in der Mitte liegt, und in welchem beide Mittelpunkte gleich stark wirken.

Setzt man $k=0$, $e=e'$, so geht der Körper von einem Mittelpunkte zum andern in der Zeit $\pi\sqrt{\frac{p}{2ge}}$.

§. 5.

Ein Körper vom Gewichte p sei den Wirkungen zweier senkrecht über einander liegenden Anziehungsmittelpunkte unterworfen, deren Kräfte von der mehrfach betrachteten Art sind; er befindet sich anfänglich zwischen beiden auf der Linie, welche dieselben verbindet. Sei C der untere, C' der obere Mittelpunkt der Anziehung, die x seien von C aus gegen C' gerechnet, a die Linie CC', k habe die Bedeutung des §. 3., wie e und e', endlich sei der Körper den Wirkungen der Schwere unterworfen. Hier hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{e'(a-x)}{p} - \frac{ex}{p} - 1\right)g = \frac{g}{p}(e'a - (e'+e)x - p),$$

oder, wenn zur Abkürzung $e'a - p = m$, $e'+e = r$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g}{p}(m - rx),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{p}(2mx - rx^2) + C,$$

$$v^2 = \frac{g}{p}(2m(x-k) - r(x^2-k^2)) = \frac{g}{p}(2m - r(x+k))(x-k) \quad (1)$$

$$= (2m - rk - rx)(x-k)\frac{g}{p}.$$

Setzt man $2m - rk = rb$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{gr}{p}(b-x)(x-k),$$

$$\partial t . \sqrt{\frac{gr}{p}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(b-x)(x-k)}},$$

$$t\sqrt{\frac{gr}{p}} = C - 2 . \text{arc}\left(\text{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-k}}\right),$$

$$t\sqrt{\frac{gr}{p}} = (2n+1)\pi - 2 . \text{arc}\left(\text{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-k}}\right). \quad (2)$$

Hieraus folgt, dass die ganze Oszillationsdauer $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{gr}}$ $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(e+e')}}$, also gerade wie in §. 3. ist; diese ist daher die nämliche, ob man die Schwere berücksichtigt oder nicht. Der Körper schwingt zwischen den Punkten $x = k$ und $x = b = \frac{2m}{r} - k$ $= \frac{2e'a - 2p}{e+e'} - k$; seine grösste Geschwindigheit hat er im Punkte $x = \frac{m}{r} = \frac{e'a - p}{e'+e}$, der in der Mitte liegt.

Wir schliessen demnach aus dem Obigen, dass die Oszillationsdauer durchaus die nämliche ist, ob man die Wirkung der Schwerkraft beachtet oder nicht; es hat dieselbe bloss Einfluss auf die Amplitude der Schwingung.

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn Δ den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC bezeichnet und A', B', C' beliebige Punkte in den Seiten BC, CA, AB oder deren Verlängerungen sind, der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ aber durch Δ' bezeichnet wird, so ist jederzeit

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA' + AC'.BA'.CB'}.$$

Wie lässt sich dieser Satz beweisen und auf sphärische Dreiecke erweitern?

(The Mathematician. March. 1846.) Thomas Cotterill.

Wenn die durch den Punkt M eines Kegelschnitts gezogene Berührende die Hauptaxe AB desselben in N schneidet, und das in N auf die Hauptaxe errichtete Perpendikel von den nöthigenfalls gehörig verlängerten Sehnen AN und BN in D und E geschnitten wird, so ist immer $DN = EN$.

(The Mathematician. March. 1846.) J. W. Elliott.

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen AC und BD sich in O schneiden. Durch den Punkt O ziehe man die Linien EF und GH den Seiten AB, CD und AD, BC des Parallelogramms $ABCD$ parallel. Nimmt man dann in EF einen beliebigen Punkt E' an, zieht die Linien AE' und DE', welche die Linie GH in G' und H' schneiden, und hierauf die Linien BG' und CH', so gehen diese beiden Linien durch denselben Punkt F' der Linie EF, und das Viereck $E'F'G'H'$ ist ein Parallelogramm.

(The Mathematician. March. 1846.) Fenwick.

Einen Bogen eines gegebenen Kreises so zu bestimmen, dass der Unterschied zwischen seiner Sehne und der Sehne seiner Hälfte ein Maximum ist.

(The Mathematician. March. 1846.) Matthew Collins.

Von dem Herrn Oberlehrer Seydewitz am Gymnasium zu Heiligenstadt.

1. Berühren drei Seiten AB, BC, CD eines einem Kreise eingeschriebenen Vierecks $ABCD$ einen zweiten, mit dem ersteren concentrischen Kreis, und verbindet man eine der beiden Ecken B, C, wo diese drei Seiten paarweise zusammenstossen, z. B. C, mit dem Berührungspunkte der dritten Seite AB durch eine Gerade, so wird letztere von der Geraden, welche den ersten Kreis in der anderen Ecke B berührt, und von der vierten Seite des Vierecks in einem und demselben Punkte geschnitten.

2. Liegen drei Ecken A, B, C eines einem Kreise umschriebenen Vierecks $ABCD$ auf dem Umfange eines mit demselben concentrischen Kreises, so schneidet eine jede der beiden Seiten AB, BC, welche zwei dieser Ecken verbinden, z. B AB, die Gerade, welche den zweiten Kreis in der dritten Ecke C berührt, in einem Punkte, welcher mit dem Berührungspunkte der anderen Seite BC und mit der vierten Ecke des Vierecks in einer und derselben geraden Linie liegt.

3. Bewegt sich ein rechter Winkel dergestalt um ein Quadrat, dass seine Schenkel fortwährend zwei benachbarte Ecken des letzteren berühren, so dreht sich die Halbirungslinie desselben um den Mittelpunkt des Quadrats.

Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

Man hat für jedes ganze, positive m und r:

$$\frac{(m+1).1.2.3\ldots(r-2)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}\left[1+\frac{m+r}{r-2}+\frac{(m+r)(m+r-1)}{(r-2)(r-3)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(m+r)(m+r-1)\ldots(m+3)}{(r-2)(r-3)\ldots1}\right]=1-\frac{1.2\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

II.

$$\frac{2p.(2p-2)\ldots2}{(2p+1)(2p-1)\ldots3}=1-\tfrac{1}{3}p+\tfrac{1}{5}\frac{p(p-1)}{1.2}-\tfrac{1}{7}\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^p.1}{2p+1},$$

wenn p eine ganze, positive Zahl ist.

III.

$$(-1)^p \frac{2.4.6\ldots 2p}{1.3.5\ldots(p+1)}.2^{2p} = \frac{1}{2p+1} - \frac{2p+1}{1}.\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p-3}.\frac{(2p+1)2p}{1.2} - .$$
$$\ldots(-1)^p \frac{(2p+1)2p\ldots(p+2)}{1.2.3\ldots p},$$

wenn p eine ganze, positive Zahl ist.

IV.

Setzt man

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} = n_m,$$

so findet man:

$$\frac{1}{n-m} n_m = \frac{1}{n} n_m + \frac{1}{n-1}(n-1)_{m-1} + \frac{1}{n-2}(n-2)_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-m+1}(n-m+1)_1 + \frac{1}{n-m},$$

was auch n sei, wenn nur m eine ganze, positive Zahl ist.

V.

$$1 - \frac{2m}{3} + \frac{2m(2m-2)}{1.3.5} - \frac{2m(2m-2)(2m-4)}{1.3.5.7} + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{2m(2m-2)\ldots 2}{3.5.7\ldots(2m+1)} = \frac{1}{2m+1},$$

wenn m eine ganze, positive Zahl ist.

VI

$$\frac{\cos\delta}{1.2} - \frac{\cos 3\delta}{3.4} + \frac{\cos 5\delta}{5.6} - \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\cos\delta}{4}\log(2(1+\cos 2\delta)) - \frac{\delta}{2}\sin\delta.$$

$$\frac{\sin\delta}{1.2} - \frac{\sin 3\delta}{3.4} + \frac{\sin 5\delta}{5.6} - \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}\right) - \frac{\delta}{2}\cos\delta + \frac{\sin\delta}{4}\log(2(1+\cos 2\delta)).$$

Beide Male $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

VII.

$$\frac{\cos\delta}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3\delta}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\cos 5\delta}{5.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\cos 7\delta}{7.8}+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\cos\delta}{\sqrt{(1+\sin\delta)}}\right)+\sqrt{2\sin\delta}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}\right)-\cos\delta.$$

$$\frac{\sin\delta}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3\delta}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin 5\delta}{5.6}+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=\log\left[\sqrt{1+\sin\delta}+\sqrt{\sin\delta}\right]-\sqrt{2\sin\delta}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}\right)+\sin\delta.$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.6}+\ldots$$

$$\delta \overset{=}{<} \frac{\pi}{2},\quad \delta \overset{=}{>} 0.$$

XIX.

Miscellen.

Beweis des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Während uns der Pythagoräische Lehrsatz sagt, dass bei jedem Rectangel $abcd$ (Taf. III. Fig. 8.) das Product der beiden Diagonalen gleich sei der Summe aus den Producten der gegenüberstehenden Seiten, d. h. dass

$$ac.bd = bc.ad + ba.cd$$

sei, so erweitert der Ptolemäische Lehrsatz bekanntlich diese Behauptung und spricht ihre Gültigkeit für **jedes Viereck im Kreise** aus

Er gehört daher zu den interessantesten Sätzen der Elementargeometrie.

Eine eigenthümliche Art ihn zu beweisen ist folgende.

Bezeichnet man ein Parallelogramm und ein Dreieck, wenn in beiden die Seiten x und y den Winkel v einschliessen, durch $\Pi\binom{x.y}{\angle v}$ und durch $\varDelta\binom{x.y}{\angle v}$, so hat man:

$$1)\quad \text{Viereck } abcd = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ac.bd}{\angle u} \text{ (Siehe Taf. III. Fig. 9.)}$$

Zieht man nun $de \# ac$ und dann ec und eb und ae, so ist

$$2)\quad \Delta\, adc \cong \Delta\, cea,$$

mithin

$$3)\quad \text{Viereck } abcd = \text{Viereck } aecb = \Delta\, bce + \Delta\, bae.$$

Zugleich aber ist:

$$4)\quad \angle ace = \angle cad = \delta,$$

mithin

$$5)\quad \angle bce = \delta + \beta = u';$$

also auch, da $abce$ ein Viereck im Kreise ist,

$$6)\quad \angle bae = 180^0 - bce = 180^0 - u' = u,$$

so dass

$$7)\quad \Delta\, bce = \varDelta\binom{be.ce}{\angle u'} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{bc.ce}{\angle u},$$

und

$$8)\quad \Delta\, bae = \varDelta\binom{ba.ae}{\angle u} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ba.ae}{\angle u}.$$

Es folgt daher aus 1), 3), 7) und 8):

$$9)\quad \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ac.bd}{\angle u} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{bc.ce}{\angle u} + \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ba.ae}{\angle u};$$

folglich, da die Gültigkeit einer solchen Gleichheit nicht aufgehoben wird, wenn man in jedem der drei Parallelogramme statt des Winkels u einen und denselben anderen Winkel, z. B. einen rechten Winkel R, setzt und die Factoren $\frac{1}{2}$ weglässt:

$$10)\quad \Pi\binom{ac.bd}{\angle R} = \Pi\binom{bc.ce}{\angle R} + \Pi\binom{ba.ae}{\angle R},$$

d. h.

$$11)\quad ac.bd = bc.ce + ba.ae,$$

oder, wenn man statt ce den Werth ad und statt ae den Werth cd substituirt,

$$12)\quad ac.bd = bc.ad + ba.cd.$$

Aufgabe.

Von dem Herrn Professor Dr. **Hessel** zu Marburg.

Ein gleichschenkeliges Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 10.), **dessen Schenkel CA und CB an Länge constant sind, verändert sich so, dass sein Winkel ACB wächst und sein Punkt B in einem Kreise vom Radius $CA = CB$ fortschreitet, während der Schenkel CA unbewegt bleibt: man soll die Curve zeichnen, in der sein Schwerpunkt β fortrückt.**

Auflösung. Es ist $C\beta = \frac{2}{3} Cu$, oder, wenn $Ca = \frac{2}{3} CA$ ist, $C\beta = Ca \,.\, \cos\frac{1}{2} ACB$. Es ist daher die Curve $a\beta\beta_1\beta_2 C$ ein Kreis vom Radius $ma = mC = \frac{1}{2} aC = \frac{1}{3} AC$, dessen Mittelpunkt m in CA so liegt, dass $Cm = \frac{1}{3} CA$ ist.

In dem Journale: The Mathematician. March. 1846. p. 69. hat Herr William Rutherford eine Untersuchung über die acht Kreise, von denen die drei Kreise, welche sich über den drei Seiten eines Dreiecks als Durchmessern beschreiben lassen, geliefert, deren Hauptresultate ich im Folgenden mittheilen will, weil ich glaube, dass das Aufsuchen der Beweise für dieselben Stoff zu zweckmässigen Uebungen darbieten, und vielleicht auch noch zu manchen andern interessanten Resultaten führen kann, die ich gern im Archive abdrucken lassen werde, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte hat.

Das gegebene Dreieck sei DEF und A, B, C seien die Mittelpunkte der Seiten EF, FD, DE. Man setze

$$BC = a,\; CA = b,\; AB = c$$

und $2s = a + b + c$; ferner der Kürze wegen

$$s_1 = s - a,\; s_2 = s - b,\; s_3 = s - c.$$

Die über EF, FD, DE als Durchmesser beschriebenen Kreise wollen wir respective den Kreis a, den Kreis b, den Kreis c nennen.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und dem Kreise a, b, c respective eine Berührung von Innen, Innen, Innen Statt findet, sei ϱ_1.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Aussen, Aussen Statt findet, sei ϱ_8.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Innen, Innen Statt findet, sei ϱ_2.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Aussen, Aussen Statt findet, sei ϱ_7.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Aussen, Innen Statt findet, sei ϱ_3.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Innen, Aussen Statt findet, sei ϱ_6.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Innen, Aussen Statt findet, sei ϱ_4.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Aussen, Innen Statt findet, sei ϱ_5

Die Halbmesser der vier die Seiten des Dreiecks ABC berührenden Kreise seien r, r_1, r_2, r_4; und zwar sei r der Halbmesser des in das Dreieck beschriebenen Kreises; r_1 sei der Halbmesser des über der Seite $a=BC$ ausserhalb liegenden Kreises; r_2 sei der Halbmesser des über der Seite $b=CA$ ausserhalb des Dreiecks liegenden Kreises; r_3 sei der Halbmesser des über der Seite $c=AB$ ausserhalb des Dreiecks liegenden Kreises.

Dies vorausgesetzt hat man die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{s-\varrho_1}=\frac{2}{r}-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_1-\varrho_2}=\frac{2}{r_1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_2-\varrho_3}=\frac{2}{r_2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_3-\varrho_4}=\frac{2}{r_3}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2},$$

$$\frac{1}{s_3+\varrho_5}=-\frac{2}{r_3}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2},$$

$$\frac{1}{s_2+\varrho_6}=-\frac{2}{r_2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_1+\varrho_7}=-\frac{2}{r_1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s-\varrho_8}=-\frac{2}{r}-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_3}.$$

Setzt man

$$2d = -r + r_1 + r_2 + r_3,$$

o wird

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{s} + \frac{r}{2s(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1+d-r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2+d-r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3+d-r_3)},$$

$$\frac{1}{\varrho_5} = -\frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3-d+r_3)},$$

$$\frac{1}{\varrho_6} = -\frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2-d+r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_7} = -\frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1-d+r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_8} = \frac{1}{s} - \frac{r}{2s(s+d+r)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8} = \frac{r}{2s}\left\{\frac{1}{s-(d+r)} + \frac{1}{s+(d+r)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7} = \frac{r_1}{2s_1}\left\{\frac{1}{s_1+(d-r_1)} + \frac{1}{s_1-(d-r_1)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} = \frac{r_2}{2s_2}\left\{\frac{1}{s_2+(d-r_2)} + \frac{1}{s_2-(d-r_2)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} = \frac{r_3}{2s_3}\left\{\frac{1}{s_3+(d-r_3)} + \frac{1}{s_3-(d-r_3)}\right\};$$

ler

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8} = \frac{r}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r}{(s+d+r)(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7} = \frac{r_1}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_1}{(s+d+r)(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} = \frac{r_2}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_2}{(s+d+r)(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} = \frac{r_3}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_3}{(s+d+r)(s-d-r)}.$$

Bemerkt man, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

ist, so erhält man hieraus die Relation

$$\frac{1}{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8}} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7}} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6}} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5}}$$

oder

$$\frac{\varrho_1 \varrho_8}{\varrho_8 - \varrho_1} = \frac{\varrho_2 \varrho_7}{\varrho_2 + \varrho_7} + \frac{\varrho_3 \varrho_6}{\varrho_3 + \varrho_6} + \frac{\varrho_3 \varrho_5}{\varrho_4 + \varrho_5}.$$

Endlich findet auch noch die folgende bemerkenswerthe R-
lation Statt:

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{\varrho_7} + \frac{1}{\varrho_8}$$

oder

$$-\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{\varrho_7} + \frac{1}{\varrho_8}.$$

Wenn der Winkel bei D in dem gegebenen Dreiecke *DE*
ein rechter Winkel ist, so ist

$$\varrho_1 = 0,$$

$$\varrho_2 = 0,$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2 + a - r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3 + a - r_3)},$$

$$\varrho_5 = 0,$$

$$\varrho_6 = 0,$$

$$\frac{1}{\varrho_7} = -\frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1 - a + r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_8} = \frac{1}{s} - \frac{r}{2s(s + a + r)}.$$

Wenn das gegebene Dreieck *DEF* gleichseitig ist, so

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2a},$$

$$\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho_4}=\frac{3\sqrt{3}+1}{2a},$$

$$\frac{1}{\varrho_5}=\frac{1}{\varrho_6}=\frac{1}{\varrho_7}=\frac{3\sqrt{3}-1}{2a},$$

$$\frac{1}{\varrho_8}=\frac{3-\sqrt{3}}{2a}.$$

Also ist in diesem Falle

$$\varrho_1=\frac{2a}{3+\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}(3-\sqrt{3})\,a,$$

$$\varrho_8=\frac{2a}{3-\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}(3+\sqrt{3})\,a;$$

lglich $\varrho_1+\varrho_8=2a=$ der Seite des gegebenen Dreiecks DEF.

Ich wiederhole, dass ich einer ausführlichen, mit möglichster leganz und Allgemeinheit durchgeführten Untersuchung über esen Gegenstand gern einen Platz in dem Archive einräumen erde, da mir die bisherigen Untersuchungen noch Manches zu ünschen übrig zu lassen scheinen.

Anzahl der Diagonalen eines Polyeders.

Die Anzahl der

3ecke, 4ecke, 5ecke, 6ecke, 7ecke, u. s. w,

elche ein Polyeder begränzen, sei respective

n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, u. s. w.

Bezeichnen wir nun die Anzahl aller Seitenflächen des Polyers durch F, so ist natürlich

$$1)\quad F=n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+\ldots.$$

Die Anzahl der Seiten aller Seitenflächen ist

$$3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+\ldots.$$

Weil nun jede Kante des Polyeders zwei Seitenflächen als ite angehört, so ist offenbar die doppelte Anzahl der Kanten r Anzahl der Seiten aller Seitenflächen gleich, d. h. wenn K e Anzahl der Kanten bezeichnet, so ist

$$2)\quad 2K=3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+\ldots.$$

Die Anzahl der Diagonalen unsers Polyeders, welche wir durch bezeichnen wollen, ist offenbar gleich der Anzahl aller die Ecken s Polyeders unter einander verbindenden Linien, weniger der zahl aller Kanten und der Anzahl der Diagonalen aller Seitenchen des Polyeders.

Bezeichnet E die Anzahl der Ecken, so ist $\frac{E(E-1)}{2}$ die A
zahl aller die Ecken des Polyeders unter einander verbindend
geraden Linien.

Die Anzahl der Diagonalen aller Seitenflächen des Polyede
ist nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie

$$\frac{3.0}{2}n_3+\frac{4.1}{2}n_4+\frac{5.2}{2}n_5+\frac{6.3}{2}n_6+\frac{7.4}{2}n_7+\ldots.$$

Hiernach, in Verbindung mit 2), ist also

$$3)\quad N=\frac{E(E-1)}{2}-\frac{3.0}{2}n_3-\frac{4.1}{2}n_4-\frac{5.2}{2}n_5-\frac{6.3}{2}n_6-\ldots.$$

$$-\frac{3}{2}n_3-\frac{4}{2}n_4-\frac{5}{2}n_5-\frac{6}{2}n_6-\ldots.$$

$$=\frac{E(E-1)}{2}-\tfrac{1}{2}(1.3n_3+2.4n_4+3.5n_5+4.6n_6+\ldots.)$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$4)\quad M=1.3n_3+2.4n_4+3.5n_5+4.6n_6+\ldots.$$

gesetzt und auf beiden Seiten der Gleichung mit 8 multiplicirt wir

$$5)\quad 8N=2E(2E-2)-4M.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist aber

$$E+F=K+2,$$

folglich

$$E=K-F+2,\quad 2E=2K-2F+4.$$

Weil nun nach 1) und 2) offenbar

$$2K-2F=n_3+2n_4+3n_5+4n_6+\ldots$$

ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$6)\quad L=n_3+2n_4+3n_5+4n_6+\ldots.$$

setzen,

$$2E=L+4,\quad 2E-2=L+2.$$

Also ist nach 5)

$$7)\quad 8N=(L+2)(L+4)-4M.$$

Dies führt uns zu dem folgenden Satze:

Wenn die Anzahl der

3ecke, 4ecke, 5ecke, 6ecke, 7ecke, ...

welche ein Polyeder begränzen, respective

$$n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6,\ n_7,\ \ldots.$$

ist, und der Kürze wegen

$$L = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 + 7n_7' + \ldots..$$
$$M = 1.3n_3 + 2.4n_4 + 3.5n_5 + 4.6n_6 + \ldots.$$

gesetzt, die Anzahl der Diagonalen des Polyeders aber durch N bezeichnet wird, so ist jederzeit

$$8N = (L+2)(L+4) - 4M.$$

(Dem Wesentlichen nach aus einem Aufsatze des Herrn Henri Binder in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono. Décembre. 1845. p. 656. entlehnt.)

Schon Thl. VII. S. 107. ist bemerkt worden, dass die französischen Kammern eine Sammlung und Herausgabe der Schriften Fermat's beschlossen haben. In dem Journal des Savants. Septembre 1839. Mai 1841. Novembre 1845. hat Libri drei Aufsätze sur la vie et les manuscrits de Fermat geliefert. Aus dem neuesten dieser Aufsätze theile ich den Lesern des Archivs folgende Fermat's Leben betreffende Stelle mit.

Non-seulement les écrits de Fermat ont été pour la plupart égarés, mais sa biographie même était encore à faire dans ces derniers temps. Excessivement modeste, ne voulant donner aucune publicité à ses travaux, vivant en province et souvent à la campagne, Fermat ne fut apprécié d'abord que par quelques esprits d'élite, qui, à Paris, à Londres, à Florence, admiraient ses belles découvertes scientifiques, et il mourut presque ignoré au mileu des siens. Aussi, jusqu'à ces derniers temps, on n'était d'accord ni sur l'époque de sa naissance ni sur celle de sa mort, et l'on peut dire que l'on ignorait à la fois la ville où il était né, celle où il avait cessé de vivre, et les principales circonstances de sa vie. Nous devons surtout aux infatigables recherches de M. Taupiac, avocat à Beaumont-de-Lomagne, la connaissance de plusieurs documents qui peuvent faire cesser l'incertitude dans laquelle on était à cet égard.

Sans être appuyée sur aucun fait positif, la tradition voulait que Fermat fût né à Toulouse, ville où il résidait habituellement, et cette opinion était adoptée généralement par les biographes, lorsque M. Taupiac, guidé par des renseignements et des traditions qu'il avait recueillis sur les lieux, entreprit, dans les archives de la ville de Beaumont, des recherches qui paraissent établir, à notre avis, que Fermat est né dans cette localité, au mois d'août 1601, de Dominique Fermat et de Françoise Cazeneuve, et qu'il avait été baptisé le 20 du même mois. Les Fermat étaient marchands de cuirs, et Dominique, père du géomètre, possédait des biens considérables. On peut lire, dans la *France méridionale* du 16. avril 1844, un article fort intéressant, dans lequel M. Taupiac, à l'aide d'un grand nombre de documents qu'il a découverts, suit pas à

pas la vie si tranquille de Fermat, et nous le montre avoc
bord, puis ensuite conseiller à la Chambre des requêtes du
ment de Toulouse. L'arrêt qui investit Fermat de ses fon
est du 14. mai 1631. Quelques jours plus tard, ce jeune mag
qui était déjà un illustre géomètre, épousait Louise de Lon
d'un conseiller au même parlement. Nous ne reproduirons p
les recherches de M. Taupiac relatives à la naissance des e
de Fermat, et aux fréquents voyages que celui-ci fit à Bea
Nous aimons mieux dire un mot d'une difficulté qui nous
arrête d'abord nous-même, difficulté qui ne semble pas s'êtr
sentée à l'esprit de M. Taupiac, et qui, si elle n'était pas
pourrait jeter une grande incertitude sur tout ce qu'il a avan
sujet de Fermat.

L'extrait de baptême, qui a été découvert par M. Taupi
parle de *Pierre Fermat*, sans la particule nobiliaire *de*, qu
cède le nom de cet illustre géomètre dans les *Opera varia*,
que dans le *Diophante* publié en 1670 avec des notes de lu
au XVIIe siècle, cette particule ne se prenait pas à volonté, c
cela est arrivé si fréquemment depuis, et il nous serait impo
d'admettre que *Pierre de Fermat*, conseiller au parlement de
louse, est le même individu qui avait été baptisé à Beaumont
le nom de *Pierre Fermat*, s'il n'y avait pas quelque moye
de constater l'identité. Heureusement d'autres documents,
M. Pelleport, archiviste de la cour royale de Toulouse, a tr
dans les papiers de l'ancien parlement, et dont nous devo
communication à l'obligeance de M. Martin, député de la H
Garonne, nous permettent d'expliquer cette difficulté. Dans l'
du 14. mai 1631, le nouveau conseiller est appelé *Pierre Fe*
et, dans un autre arrêt du 30. décembre 1638, on voit le n
conseiller, sur l'identité duquel il ne peut s'élever aucun d
appelé [illegible] *de Fermat*. C'est probablement dans c
tervalle de temps que ce grand mathématicien, auquel son
mission au parlement donnait ce qu'on appelait la *noblesse de*
commença à faire usage d'un particule qui n'existait pas dans
acte de baptême. Nous ignorons si, après cette admission, i
anobli et rendu apte, par un arrêt spécial, à faire précéder d
son nom, ou bien si une telle addition s'opéra seulement par
de la nouvelle charge dont il était revêtu. Quoi qu'il en soi
est bon d'ajouter que, même dans la suite, on trouve son
écrit tantôt de l'une, tantôt de l'autre manière (**).

(*) Voici cet acte [illegible] pas signé. [illegible] Pierre, fils de Domi
Fermat, bourgeois [illegible] de Beaumont, a
baptisé le 20 [illegible] Pierre Fermat, marchand et
[illegible] Dominique [illegible] A la suite
[illegible] qui [illegible]

(**) Ainsi, par exemple, [illegible] placée à la sui
[illegible] par [illegible] (Castres, 1
[illegible] p. 59), et [illegible] d'un ouvrage sur la même matière par T
[illegible] est adressée « A Monsieur Fermat, conseiller du roy au parle
de Tolose. »

XX.

Ueber die beste Construction horizontal belasteter Gewölbe.

Von dem

Herrn Reallehrer Brenner

zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Ein Gewölbe sei durch eine horizontal geebnete und in Bezug auf Dichtigkeit homogene Last bedeckt. Es soll nun das Gesetz, welches die Wölbung oder die durch den vertikalen und senkrechten Durchschnitt des Gewölbes dargestellte Curve befolgt, für den Fall vollständigen Gleichgewichts, so wie noch die übrigen, hieher gehörigen, wichtigsten Momente entwickelt werden.

Nehmen wir die Abscissenaxe AX (Taf. IV. Fig. 1.) horizontal und die Ordinatenaxe AY vertikal, so wird fraglicher Durchschnitt, den wir uns durch die Abscissenaxe, die Horizontalebene der Belastung, so wie durch zwei auf den sogenannten Widerlagern des Gewölbes ruhende Vertikalen begrenzt denken, ein rechtwinkliges Parallelogramm bilden. Es ist nun klar, dass wir uns jeden Theil des belasteten Gewölbes als vollständig fest und vermittelst der Kräfte, die auf denselben wirken, im Gleichgewicht sich befindend, vorstellen können. Einen solchen Theil stelle $ABEM$ vor, welcher durch die Gewölbskurve $AM=s$, die Horizontale $BE=AF=x$ und die Vertikalen $AB=b$ und $ME=b-y$, wo b die Höhe der Belastung ist, begrenzt ist. $ABEM$ befindet sich vermittelst dreier Kräfte im Gleichgewicht, nemlich

1) vermittelst des vom übrigen Theile des Gewölbes herrührenden Druckes D in M nach der Tangente und Richtung Mt;

2) vermittelst des vom Widerlager in A ausgeübten Druckes a nach der Tangente und Richtung At;

3) vermittelst des Gewichtes von $ABEM$, das wir durch P vorstellen wollen und in seinem Schwerpunkte vereinigt denken können.

Ersetzen wir D und a durch zwei gleiche nach Mt und At gerichtete Kräfte, so schneiden sie sich in t, und wählt man t als

Angriffspunkt, so folgt daraus, dass der Schwerpunkt von P mit t in derselben Vertikale liegen muss. Es ergeben sich somit für den Punkt t folgende zwei Gleichgewichts-Gleichungen:

$$a \cos\vartheta - D\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$a \sin\vartheta - P - D\frac{dy}{ds} = 0 \text{ *)},$$

wenn man den constanten Winkel $tAX = \vartheta$ setzt.

Eliminiren wir den veränderlichen Druck D, so ergibt sich $P = a\sin\vartheta - a\cos\vartheta\,\partial y$ oder, da P offenbar der Fläche $ABEM$ proportional ist:

$$(L) \qquad p\left(bx - \int y dx\right) = a \sin\vartheta - a\cos\vartheta\,\partial y,$$

wo p = dem Gewichte der Volumen-Einheit der Belastung ist und wo das Integral $\int y dx$ mit $x = 0$ zu beginnen hat.

Differenziiren wir in Beziehung auf x, so kommt

$$p(b - y) = -a\cos\vartheta\,\partial^2 y,$$

und wenn wir $-\frac{p}{a\cos\vartheta} = A$ und $y - b = z$ setzen:

$$(M) \qquad \partial^2 z = Az.$$

Das Integral dieser linearen Differenzial-Gleichung ist, wenn wir z wieder durch $y - b$ ersetzen,

$$y - b = C\cos(x\sqrt{-A}) + C_1 \sin(x\sqrt{-A}),$$

wo C und C_1 die beiden Constanten sind.

Für $x = 0$ hat man $y = 0$, daher $C = -b$.

Die Constante C_1 bestimmt sich aber aus (L) oder auch aus der Bedingung $[\partial y]_0 = tg\,\vartheta$, wo $[\partial y]_0$ der Werth von ∂y ist, wenn man $x = 0$ setzt, und so erhalten wir die Gleichung

$$(N) \qquad y = b - b\cos(x\sqrt{-A}) + \frac{tg\,\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(x\sqrt{-A}).$$

Ob unsere Curve die Abscissenaxe ausser dem Anfangspunkte A in noch weitern Punkten trifft, ergibt sich, wenn man $y = 0$ setzt und die Werthe von x entwickelt. Man hat

*) Zu bemerken ist, dass wir uns bald des Differenzial-Zeichens d, bald, nach Ohm, des [illegible] bedienen.

$$b[1-\cos(x\sqrt{-A})]+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(x\sqrt{-A})=0,$$

oder

$$\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})[b\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\cos(\frac{x}{2}\sqrt{-A})]=0,$$

welcher Gleichung genügt wird:

1) durch $\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})=0$, d. h.

$$e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}}-e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}=0,$$

oder, wenn man mit $e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}$ multiplicirt, $1=e^{x\sqrt{A}}$, woraus $x\sqrt{A}=\log 1=0$, also $x=0$, wodurch eben der Coordinaten-Anfang angezeigt wird;

2) durch $b\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\cos(\frac{x}{2}\sqrt{-A})=0.$

Geht man auch hier auf die Exponentialgrössen über, so kommt

$$b(e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}}-e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}(e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}+e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}})=0.$$

Multiplicirt man mit $e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}$, entwickelt $e^{x\sqrt{A}}$, und logarithmirt, so kommt

$$x=\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left(\frac{b\sqrt{A}+\operatorname{tg}\vartheta}{b\sqrt{A}-\operatorname{tg}\vartheta}\right)$$

als zweiter Durchschnittspunkt.

Daraus folgt, dass die Ordinate y eines Maximums fähig ist. Man hat für diesen Zweck

$$\partial y=b\sqrt{-A}\sin(x\sqrt{-A})+\operatorname{tg}\vartheta\cos(x\sqrt{-A})=0,$$

und durch eine ganz ähnliche Entwickelung wie oben in 2) oder auch durch blosse Ansicht von 2) ergibt sich

$$x=\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\left(\frac{b\sqrt{A}+\operatorname{tg}\vartheta}{b\sqrt{A}-\operatorname{tg}\vartheta}\right),$$

gerade halb so gross als das x des 2ten Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissenaxe, wie zu erwarten stand.

Meistens ist statt des Druckes a und des Winkels ϑ die Abscisse des zweiten Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissen-

axe, oder die Weite n des Gewölbes und dessen Höhe h das Maximum von y gegeben, und es kommt nun darauf an, ϑ oder auch A und ϑ aus n und h zu entwickeln. Wir zu gleicher Zeit

$$(O)\qquad 0 = b[1-\cos(n\sqrt{-A})] + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(n\sqrt{-A}),$$

$$(P)\qquad h-b = -b\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}).$$

Die erstere Gleichung (O) verwandelt sich in

$$0 = b\sin^2(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}$$

woraus

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})}.$$

Hiedurch geht (P) über in

$$\frac{b-h}{b} = \cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\sin^2(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})}.$$

welches gibt

$$\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) = \frac{b}{b-h},$$

oder, wenn man auf Exponentialgrössen übergeht und in auf $e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}}$ auflöst:

$$e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} = \frac{b \pm \sqrt{h(2b-h)}}{b-h}.$$

Die Grösse $e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}}$ ist aber nothwendig positiv und g[illegible] als 1.

Der Ausdruck

$$\frac{b \pm \sqrt{h(2b-h)}}{b-h},\qquad \frac{b-h}{b \mp \sqrt{h(2b-h)}}$$

erfüllt aber bei jedem (+ oder —) Zeichen die erstere

Denn da der Natur der Aufgabe gemäss $b > h$, so setze man
$= h + l$, woraus $2b = 2h + 2l$ und $2b - h = h + 2l = b - l + 2l$
$b + l$ und $h = b - l$, demnach

$$\sqrt{h(2b-h)} = \sqrt{b^2 - l^2},$$

lche Grösse kleiner ist als b. Die zweite Bedingung aber er-
dert, dass der Zähler grösser ist als der Nenner, und diess ist
r möglich, wenn man das positive Zeichen nimmt. Denn da
$> h$, so ist $2b - h > h$, daher $\sqrt{h(2b-h)} > h$.

Würde man das negative Zeichen nehmen, so bliebe der
ihler kleiner als der Nenner. Es ist demnach

$$\sqrt{A} = \log\left[\frac{b + \sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right] \text{ und } A = \left\{\frac{2}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\right\}^2.$$

Zur Abkürzung werden wir uns fast immer des, nun bekann-
n, Buchstabens A bedienen. Die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b \sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)}{\cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)}$$

fert uns nun aber

$$\operatorname{tg}\vartheta = b\sqrt{A}.\frac{e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} - e^{-\frac{n}{2}\sqrt{A}}}{e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} + e^{-\frac{n}{2}\sqrt{A}}} = b\sqrt{A}.\frac{e^{n\sqrt{A}} - 1}{e^{n\sqrt{A}} + 1}.$$

Allein wir haben

$$e^{n\sqrt{A}} = e^{\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2} = \left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2,$$

desswegen

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{2b}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].\frac{\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2 - 1}{\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2 + 1}$$

$$= \frac{2}{n}\sqrt{h(2b-h)}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].$$

Aus der Gleichung $A = \frac{p}{a\cos\vartheta}$ haben wir $a = \frac{p}{A}\cdot\frac{1}{\cos\vartheta}$.
end man nun die Formel hat $\frac{1}{\cos B} = \sqrt{1 + \operatorname{tg} B^2}$, so er-
ich

$$\text{II.}\quad a = \frac{p}{A}\sqrt{1 + A\left(b \cdot \frac{e^{n\sqrt{A}} - 1}{e^{n\sqrt{A}} + 1}\right)^2}$$

$$= \frac{p}{A}\sqrt{1 + \frac{4h}{n^2}(2b-h)\left\{\log\left[\frac{b + \sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\right\}^2}.$$

Vermittelst der Bestimmungen

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)}{\cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)} \text{ und } \cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right) = \frac{b}{b-h}$$

sind wir im Stande, der Gleichung (N) unserer Curve folgende Form zu geben:

$$\text{III.}\quad a)\ y = b-(b-h)\cos\left[\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{-A}\right],$$

$$b)\ y = b - \tfrac{1}{2}(b-h)\left[e^{\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}} + e^{-\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}}\right],$$

welche letztere Form zur Auswerthung der Ordinaten geeignet ist.

Würden wir (was wir jedoch hier nur bemerkungsweise thun) den Anfang der Coordinaten in den Durchschnittspunkt des Maximums h mit der Abscissenaxe verlegen, so hätten wir $x = x' + \frac{n}{2}$ zu setzen, wenn wir die neuen Abscissen mit x' bezeichnen und III. b) ginge über in

$$y = b - \tfrac{1}{2}(b-h)\left(e^{x'\sqrt{A}} + e^{-x'\sqrt{A}}\right),$$

eine Gleichung, welche ganz unverändert bleibt, wenn man $+x'$ in $-x'$ umwandelt. Man wird sich daher überzeugen, dass das Maximum von y die Curve in zwei congruente Zweige theilt. Auch ist es nicht schwer, einzusehen, dass sich die Curve in ihren beiden Zweigen auf der negativen Seite (nicht Richtung) der Abscissenaxe ins Unendliche fortsetzt. Auch könnte man der Gleichung III., wenn man statt $\sqrt{A}$ dessen in n und h gefundenen Ausdruck setzen wollte, eine andere Form ertheilen und zwar vermittelst der Formel $e^{m\log B} = B^m$.

Beschäftigen wir uns nun mit Aufsuchung des Druckes, den ein Gewölbstein auf den andern ausübt. Wir haben oben diesen Druck $= D$ gesetzt, und aus der Gleichung

$$a\cos\vartheta - D\frac{dx}{ds} = 0$$

ergibt sich in Verbindung mit $\frac{p}{a\cos\vartheta} = A$:

$$D = \frac{p}{A}\sqrt{1+\partial y^2}.$$

Wir haben

$$\partial y = -(b-h)\sqrt{-A}\,\sin\left[\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{-A}\right]$$

$$= (b-h)\sqrt{-A}\,\sin\left[\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-A}\right],$$

und erhalten

$$\text{IV.}\quad D = \frac{p}{A}\sqrt{1-A(b-h)^2\sin^2\left[\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-A}\right]}$$

$$= \frac{p}{A}\sqrt{1+A(b-h)^2\left(\frac{e^{\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}}-e^{\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{A}}}{2}\right)^2}.$$

Sowohl für $x=0$, als auch für $x=n$, finden wir nach kurzer Entwicklung den oben schon erhaltenen Druck a auf die Widerlager, während man für $[\partial y]_0 = \mathrm{tg}\,\vartheta$ den ebenfalls schon oben gewonnenen Werth I., allein für $[\partial y]_n$, d. h. für die Richtung des Drucks auf das zweite Widerlager, zwar denselben Ausdruck, jedoch mit negativem Zeichen erhält. Der stumpfe Winkel, den die letztere Richtung mit der Abscissenaxe macht, ist daher $180^0 - \vartheta$, so dass dieselbe mit der erwähnten Axe den Neigungswinkel $180^0 - (180^0 - \vartheta) = \vartheta$, also denselben Winkel macht, den auch die Drucksrichtung des ersten Widerlagers mit ihr macht, was übrigens zu erwarten stand.

Von besonderer Wichtigkeit ist endlich noch die Bestimmung des cubischen Inhaltes des Gewölbes. Bekanntlich findet man diesen Inhalt für cylindrische Gewölbe im Allgemeinen, wenn man den vertikalen und senkrechten Durchschnitt derselben mit ihrer Länge multiplicirt. Es kommt daher zunächst darauf an, diesen Vertikaldurchschnitt zu bestimmen. Derselbe ist offenbar gleich dem Flächeninhalt der äusseren Curve, minus dem der innern, zwischen ihren Abscissen genommen. Um den ersteren zu finden, scheint die Gleichung der äusseren Curve nöthig zu sein. Diese äussere Curve aber ist dadurch entstanden, dass man diejenigen Punkte aller verlängerten Normalen der innern, die von dieser stets gleich weit abstehen, mit einander verbindet, oder durch den Endpunkt einer Geraden, die, der Gewölbscurve stets normal, mit ihrem andern Endpunkt auf dieser dahingleitet. Auch ist klar, dass jeder fixirte Punkt einer so dahingleitenden Normale in Verbindung der erzeugenden Gewölbscurve den Durchschnitt des Gewölbes darstellen kann. Zieht man also durch den beliebigen Punkt M oder (x, y) der Erzeugungscurve eine Normale, welche die erzeugte Curve im Punkte m schneiden mag, so stellt Mm die constante Verlängerung der Normale vor. Wir setzen $Mm = r$, so wie die Coordinaten des Punktes m gleich x' und y'. Nach einfacher Betrachtung wird man sich bald überzeugen, dass

$$x' = x - \frac{r\,dy}{ds} \text{ oder } x' = x - \frac{r\partial y}{\sqrt{1 - \partial y^2}},$$

$$y' = y + \frac{r\,dx}{ds} \text{ oder } y' = y + \frac{r}{\sqrt{1 + \partial y^2}}$$

ist, welche Gleichungen, nebst der Gleichung der Erzeugungscurve $y = f(x)$ dazu dienen, x und y zu eliminiren, so dass dann eine Gleichung zwischen x' und y' resultirt, welche die der erzeugten Curve ist. Diese Eliminationen sind aber in den meisten Fällen ausserordentlich schwierig und führen zu verwickelten schwer zu behandelnden Gleichungen. Für ein Glück dürfen wir es daher halten, dass es einen weit einfachern Weg gibt, unsern Zweck zu erreichen, ein Weg, der uns nicht nur die Quadratur, sondern zu gleicher Zeit auch die Rectification unserer erzeugten Curve sogar ganz im Allgemeinen (abgesehen von unserer oben behandelten Gewölbs-Curve) zeigt.

Es ist nemlich klar, dass die Krümmungshalbmesser beider Curven einander decken und dass derjenige der erzeugten Curve um r grösser ist als der der erzeugenden, so wie, dass die unendlich kleinen Bogen ∂s und $\partial s'$ zwischen zwei auf einander folgenden Normalen oder Krümmungshalbmessern einander parallel sind. Daher ist

$$\frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} : \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} + r = \partial s : \partial s',$$

woraus

$$r : \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} = \partial s' - \partial s : \partial s;$$

ferner

$$\partial(s' - s) = r\,\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

Die Gleichung der Normale aber ist

$$y'' - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(x'' - x),$$

wenn x'' und y'' die Coordinaten der Normale selbst vorstellen, während, wie immer, (x, y) einen beliebigen Punkt in der Erzeugungscurve selbst bezeichnet. Setzt man nun den Winkel, den die Normale mit der Abscissenaxe macht, gleich w, so ist

$$\operatorname{tg} w = -\frac{\partial x}{\partial y},\quad \partial(\operatorname{tg} w) = \frac{\partial w}{\cos w^2} = -\frac{\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y}{\partial y^2},$$

und da

$$\cos w^2 = \frac{\partial y^2}{\partial s^2},$$

so ist

$$\partial w = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^2};$$

und so hat man

$$\partial (s' - s) = r \partial w,$$

woraus

$$s' - s = rw + C,$$

welches den Ueberschuss des Bogens s' über s vorstellt, wofern das Integral $rw + C$ zwischen den gehörigen Grenzen genommen wird. Zwischen diesen Grenzen stellt aber w den von den äussersten Normalen eingeschlossenen Winkel dar und rw ist der von diesem Winkel eingeschlossene Kreisbogen, beschrieben mit dem Radius r. Es ergibt sich daher der Satz:

Man findet den Bogen der nach oben beschriebener Art erzeugten Curve, wenn man den entsprechenden Bogen der Erzeugungscurve um denjenigen Kreisbogen vermehrt, welcher zwischen dem von den äussersten Normalen eingeschlossenen Winkel mit dem Radius gleich dem Abstand beider Curven beschrieben wird.

Ferner ist der Satz bekannt, dass der Inhalt einer Fläche, die eine Gerade so in einer Ebene beschreibt, dass sie in ihrem Mittelpunkt stets normal auf einer Curve dahingleitet, gleich ist dem Product aus dieser Geraden und der Curve. Diess ist offenbar der Fall mit unserer Erzeugungslinie r und der Curve, die ihr Mittelpunkt beschreibt. Allein, um diese Curve zu erhalten, darf man den Bogen s der Erzeugungscurve nur um den Kreisbogen $\frac{rw}{2}$ vermehren, so dass der von r beschriebene Flächenraum sein wird $r(s + \frac{r}{2} w)$, wofern w der zwischen den äussersten Normalen genommene Winkel ist. Diess auf unsern vorliegenden Fall angewendet, haben wir nur noch den Bogen s, so wie den Winkel w zu bestimmen. Man hat

$$\partial s = \sqrt{1 + \partial y^2} = \sqrt{1 - A(b-h)^2 \sin^2[(x - \tfrac{n}{2})\sqrt{-A}]},$$

daher

$$s = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \sqrt{1 - c^2 \sin t^2} . dt,$$

wenn wir $A(b-h)^2 = c^2$ und $(x - \frac{n}{2})\sqrt{-A} = t$ setzen.

So sind wir also auf ein elliptisches Integral gestossen, und wir haben

$$x = \frac{1}{\sqrt{-A}} \left\{ \begin{array}{l} t - \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2^2} \sin 2t \right) \\ - \frac{1.1}{1.2} e^4 \left(\frac{1.3}{2.4} t - \frac{4}{2^4} \sin 2t + \frac{1}{2^4.2} \sin 4t \right) \\ - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} t - \frac{15}{2^6} \sin 2t + \frac{6}{2^6.2} \sin 4t - \frac{1}{2^6.3} \sin 6t \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} + C,$$

welches Integral noch zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ oder zwischen $t = -\frac{\pi}{2}\sqrt{-A}$ und $t = +\frac{\pi}{2}\sqrt{-A}$ zu nehmen ist, so dass also bloss die rechte Seite, mit Weglassung der Constante, verdoppelt werden darf und t durch $\frac{\pi}{2}\sqrt{-A}$ ersetzt werden muss. Verwandelt man zuletzt die Sinus in Exponentialfunctionen, und vollendet die angezeigte Multiplication mit $\frac{1}{\sqrt{-A}}$, so wird die imaginäre Form verschwinden. Dieses Integral erweist sich übrigens als sehr brauchbar, indem es für die gewöhnlichen Fälle sehr fallend ist. Bemerkt mag noch werden, dass man dem c folgende Form geben kann:

$$c = \frac{2(p-h)}{\pi} \log \left[\frac{p + \sqrt{p(2p-h)}}{p-h} \right].$$

Endlich wird man bald finden, dass $\omega = 2t$, so dass sich die gesuchte Durchschnitt gleich

$$\sqrt{\ [illegible]\ } + \frac{[illegible]}{180}$$

findet, sofern der Winkel in Graden angegeben ist.

So kennen also die mit römischen Nummern bezeichneten Resultate alles, was in Bezug auf die horizontal belasteten Gewölbe [illegible] wissenswerth ist.

XXI.

Ueber plagiographische Projection.

Von dem

Herrn Professor Dr. Anger

in Danzig.

Wenn die unter einander parallelen Gesichtslinien mit der ojections-Ebene einen rechten Winkel bilden, so ist diese allein ht ausreichend, sondern es muss die Projection auch noch auf e andere Ebene, deren Lage gegen jene als bekannt vorausge-tzt wird, entworfen werden, falls man aus der Zeichnung die hren Dimensionen des dargestellten Gegenstandes soll entnehmen nnen, und man hat bekanntlich, wenn die beiden Projections-enen auf einander rechtwinklig stehen, die Methode der be-hreibenden Geometrie. Wenn aber die unter einander parallelen sichtslinien mit der Projections-Ebene einen schiefen Winkel lden, dessen Grösse gegeben ist, so reicht eine Projections-ene hin, um ein geometrisches Bild zu entwerfen, aus welchem ch die wahren Dimensionen des Gegenstandes erhalten lassen. er einfachste Fall ist derjenige, in welchem der Winkel, den die rojectionsstrahlen mit der Projections-Ebene machen, ein halber echter ist. Diese Projections-Art, welche in der Fortification in An-endung kommt, bietet auch in theoretischer Hinsicht einige nicht interessante Eigenschaften dar, weshalb eine Untersuchung dieses egenstandes mir nicht ganz überflüssig erscheint.

Poncelet erwähnt dieser Projections-Art in seinem: „Traité es propriétés projectives des figures" in der Einleitung ag. XXVIII. und XXIX., ohne sich auf den Gegenstand näher nzulassen.

Wenn wir im Folgenden die Theorie dieser Methode, welche ir die plagiographische Projection nennen, analytisch be-nden, so hat die Ansicht, dass auch für den praktischen Ge-auch sich auf diese Weise gewisse leichte Vorschriften für die ntwerfung der Projectionen der krummen Oberflächen ergeben, elche dem Zeichner willkommener sein werden, als die Methoden, ittelst welcher man auf mühsamen geometrischen Wegen das Ziel reicht, uns dabei vorgeschwebt. Auch in der gewöhnlichen be-hreibenden Geometrie sind die Auflösungen gewisser Aufgaben r die wirkliche Anwendung oft viel zu mühsam und ungenau,

als dass es nicht wünschenswerth wäre, sie durch andere zu ersetzen, die jener Vorwurf nicht trifft. Dazu führt aber gewöhnlich die analytische Auffassung sehr leicht. Die beschreibende Geometrie ist in dieser Hinsicht noch einer Erweiterung fähig, welche dem Praktiker nützlich werden kann. Bei dieser Gelegenheit sei jedoch die Bemerkung gestattet, dass es keineswegs unsere Meinung ist, dass der Zeichner zugleich einige Stücke der Construction auch berechnen solle, gegen eine solche Vermischung des Geometrischen und Arithmetischen müssen wir uns entschieden erklären; das Gesagte bezieht sich hier nur auf die Nachweisung der Richtigkeit, nicht aber auf die Ausführung der Construction, welche unter keinen Umständen ihren geometrischen Character verlieren darf.

Zur Projections-Ebene nehmen wir die Ebene der xy, die Projectionsstrahlen nehmen wir mit der Ebene der xz parallel und, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, den Neigungswinkel derselben mit der Projections-Ebene gleich 45° an.

Aufgabe 1. Man sucht die Gleichung für die plagiographische Projection einer krummen Linie, einfacher oder doppelter Krümmung, deren Gleichung gegeben ist.

Auflösung. Die krumme Linie sei allgemein durch die Gleichungen

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x$$

gegeben.

Die Abscissen der gesuchten Projection mögen durch ξ, die Ordinaten durch η bezeichnet werden. Es kommt nun darauf an, die Gleichung zwischen ξ und η zu ermitteln. Man hat aber

$$\xi = x,$$

und erhält dann

$$\eta = y + z,$$

also ist

$$\eta = \varphi\xi + \psi\xi$$

die gesuchte Gleichung.

Wenn z. B. die zu projicirende Linie ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht und mit der Ebene xz einen beliebigen Winkel bildet, und dessen Mittelpunkt der Einfachheit wegen im Anfangspunkte der Coordinaten liegen mag, so ist, wenn man den Radius mit r bezeichnet:

$$y = ax = \varphi x,$$
$$z = \sqrt{r^2 - (1+a^2)x^2} = \psi x,$$

also

$$\eta = a\xi + \sqrt{r^2 - (1 + a^2)\,\xi^2}$$

oder

$$\eta^2 + (1 + 2a^2)\,\xi^2 - 2a\,\eta\,\xi = r^2,$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Axen sich leicht ermitteln lassen.

Führt man nämlich neue Coordinaten ξ' und η' ein, so dass

$$\xi = \xi' \operatorname{Sin}\varphi - \eta' \operatorname{Cos}\varphi,$$
$$\eta = \xi' \operatorname{Cos}\varphi + \eta' \operatorname{Sin}\varphi$$

wird, so ergiebt sich, wenn man den Coefficienten von $\eta'\xi' = 0$ setzt, zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$0 = -a \operatorname{Sin} 2\varphi + \operatorname{Cos} 2\varphi,$$

d. h.

$$\operatorname{Tang} 2\varphi = \frac{1}{a} = \operatorname{Cot} u = \operatorname{Tang}(90^0 - u),$$

mithin

$$\varphi = 45^0 - \frac{1}{2}u,$$

und man erhält als Gleichung der gesuchten Projection.

$$\frac{\xi'^2}{r^2(1 + \operatorname{Sin} u)} + \frac{\eta'^2}{r^2(1 - \operatorname{Sin} u)} = 1.$$

Die halben Axen der Ellipse sind demnach:

$$r \operatorname{Cos}(45^0 - \tfrac{1}{2}u).\sqrt{2} \text{ und } r \operatorname{Sin}(45^0 - \tfrac{1}{2}u).\sqrt{2}.$$

Wenn der Fall eintritt, dass $u = 0$ ist, so wird die Ellipse ein Kreis, dessen Radius $= r$, und ist $u = 90^0$, so wird die Projection eine gerade Linie, welche in die Axe der y fällt und $= r\sqrt{2}$ ist.

Jede Ellipse kann demnach als die plagiographische Projection eines Kreises betrachtet werden, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht. Bezeichnen nämlich $2a$ und $2b$ resp. die grosse und kleine Axe dieser Ellipse, so hat man zur Bestimmung von u und r die beiden Gleichungen

$$a = r \operatorname{Cos}(45^0 - \tfrac{1}{2}u)\sqrt{2},$$

$$b = r \operatorname{Sin}(45^0 - \tfrac{1}{2}u)\sqrt{2}:$$

also

$$\text{Tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}u) = \frac{b}{a}, \text{ und}$$

$$r = \frac{a}{\text{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2}} = \frac{b}{\text{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2}},$$

oder auch

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{a-b}{a+b}, \quad r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

welche beide Ausdrücke sich besonders für die Construction eignen.

Der Inhalt dieser Ellipse ergiebt sich gleich

$$r^2 \pi \,\text{Cos}\, u,$$

also gleich dem Inhalte derjenigen Ellipse, welche die orthographische Projection desselben gegen eine Projections-Ebene unter dem Winkel u geneigten Kreises ist. Man erhält also immer eine unserer Projection des gegebenen Kreises dem *Inhalte* nach gleiche Ellipse, wenn man denselben Kreis in unveränderter Lage auf die Ebene der xz orthographisch projicirt.

Wenn wir die Bedingung aufheben, dass die parallelen Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene einen halben rechten Winkel machen, und annehmen, dass dieser Winkel allgemein $= i$ sei, so ergiebt sich, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen, die Gleichung

$$\eta = y + z\,\text{Cot}\,i,$$

also

$$\eta = \varphi\xi + \text{Cot}\,i \,.\, \psi\xi,$$

und man erhält als Lösung der obigen Aufgabe

$$\eta = a\xi + \text{Cot}\,i\sqrt{r^2 - (1+a^2)\xi^2},$$

also

$$\eta^2 + (\text{Cot}\,i^2 + \frac{a^2}{\text{Sin}\,i^2})\,\xi^2 - 2a\,\eta\,\xi = r^2\,\text{Cot}\,i^2,$$

welches wieder die Gleichung einer Ellipse ist.

Führt man auch hier neue Coordinaten ξ' und η' ein, so dass wieder

$$\xi = \xi'\,\text{Sin}\,\varphi - \eta'\,\text{Cos}\,\varphi,$$
$$\eta = \xi'\,\text{Cos}\,\varphi + \eta'\,\text{Sin}\,\varphi$$

wird, und bestimmt den Winkel φ so, dass $\eta'\xi'$ aus der Rechnung hinausgeht, so wird

$$\text{Tang}\,2\varphi = \frac{2\,\text{Tang}\,u\,.\,\text{Sin}\,i^2}{\text{Cos}\,2i + \text{Tang}\,u^2},$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$\xi'^2(\text{Sec}u^2 - \text{Cos}2\varphi(\text{Tang}u^2 + \text{Cos}2i) - 2\text{Tang}u\text{Sin}2\varphi.\text{Sin}i^2)$$
$$+\eta'^2(\text{Sec}u^2 + \text{Cos}2\varphi(\text{Tang}u^2 + \text{Cos}2i) + 2\text{Tang}u\text{Sin}2\varphi.\text{Sin}i^2) = 2r^2\text{Cos}i^2,$$

welche in ihrer einfachsten Gestalt so geschrieben werden kann:

$$\xi'^2\,.\,\frac{1 - \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}2i^2)}}{2r^2\text{Cos}\,u^2\,\text{Cos}\,i^2} + \eta'^2\,.\,\frac{(1 + \sqrt{1 - \text{Cos}u^2\text{Sin}2i^2})}{2r^2\,\text{Cos}u^2\text{Cos}i^2} = 1.$$

Die halben Axen der Ellipse sind demnach

$$\frac{r}{2\text{Sin}\,i}\,.\,\sqrt{(1 + \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}\,2i^2})}\,.\,\sqrt{2} \text{ und}$$

$$\frac{r}{2\text{Sin}\,i}\,.\,\sqrt{(1 - \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}\,2i^2})}\,.\,\sqrt{2}.$$

Der Inhalt dieser Ellipse ist also

$$r^2\pi\;\text{Cos}\,u\,.\,\text{Cot}\,i.$$

Setzt man $i = 45^0$, so ergeben sich die oben unter dieser Annahme gefundenen Ausdrücke für die halben Axen der Ellipse.

Setzt man $u = 0$, d. h. nimmt man den zu projicirenden Kreis als in der Ebene der xz liegend an, so wird die Projection eine Ellipse, deren halbe Axen

$$r\,\text{Cot}\,i \text{ und } r$$

sind.

Setzt man endlich $u = 0$ und $i = 45^0$, so wird die Projection ein dem zu projicirenden gleicher Kreis.

Bezeichnen hier wieder $2a$ und $2b$ resp. die grosse und kleine Axe der Ellipse, und setzt man

$$\text{Cos}\,u\,.\,\text{Sin}\,2i = \text{Cos}\,v,$$

so wird, ähnlich wie in dem besondern Falle,

$$\text{Tang}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}v) = \frac{b}{a},$$

$$r = \frac{a\,\text{Sin}\,i}{\text{Cos}\,(45^0 - \frac{1}{2}v)} = \frac{b\,\text{Sin}\,i}{\text{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}v)};$$

oder auch

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}v = \frac{a-b}{a+b},\ r = \text{Sin}\,i.\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass die beiden Methoden, welche **Gregorius a St. Vincentio** für die Construction der Ellipse mittelst des Kreises gegeben hat, indem er einmal die von der Peripherie auf den Durchmesser des Kreises gefällten Perpendikel, von den Fusspunkten derselben aus, auf schräge parallele gerade Linien aufträgt, dann aber auch diese Perpendikel selbst in einem constanten Verhältnisse verändert, in unserer plagiographischen Projection des Kreises ihre gemeinschaftliche Quelle haben Die erste jener Methoden ist nichts anderes, als unsere Projection des Kreises, der auf der Ebene der xy, der Projections-Ebene, senkrecht steht und mit den andern Coordinaten-Ebenen einen beliebigen Winkel bildet; die andere ist ebenfalls die Projection eines Kreises, welcher jedoch in der Ebene xz liegt, nur bilden hier die Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene nicht einen Winkel von 45°, sondern einen beliebigen Winkel, den wir oben durch i bezeichnet haben.

Wenn der zu projicirende Kreis wie vorhin auf der Projections-Ebene senkrecht steht, und sein Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so wird derselbe, während man ihm eine Drehung um seinen in die Axe der z fallenden Durchmesser beilegt, die Oberfläche einer Kugel beschreiben. Wenn man nun für beliebige Drehungswinkel u, wo u, wie oben, den Winkel bedeutet, welchen die Ebene des Kreises mit der Coordinaten-Ebene xz macht, denselben projicirt, so entstehen dadurch Ellipsen, welche sämmtlich einen gemeinschaftlichen Durchmesser haben, der dem Durchmesser des Kreises gleich ist. Zieht man durch einen der beiden Punkte, in welchen alle diese Ellipsen sich schneiden, zwei derselben Tangenten, so ist der Winkel, welchen diese einschliessen, gleich dem Unterschiede der entsprechenden Drehungswinkel des Kreises, oder, was dasselbe ist, gleich dem Winkel, welchen die Durchschnittslinien der Ebene des Kreises und der Projections-Ebene xy einschliessen. Alle diese Ellipsen werden von einer und derselben Ellipse eingehüllt, deren Axen wir durch die folgenden Betrachtungen erhalten.

Aufgabe 2. **Man sucht die plagiographische Projection einer Kugel.**

Auflösung. Die Kugel wird von der Mantelfläche des Cylinders, welchen die Projectionsstrahlen bilden, in einem grössten Kreise berührt, dessen Lage gegen die Projections-Ebene leicht ermittelt werden kann. Legt man den Mittelpunkt der Kugel in den Anfangspunkt der Coordinaten und nimmt wieder die Ebene xy zur Projections-Ebene, auch die Projectionsstrahlen mit der Ebene yz parallel an, so wird, da der Neigungswinkel des Berührungskreises gegen die Projections-Ebene 45° beträgt,

$$y = \sqrt{\frac{r^2-x^2}{2}},\quad z = \sqrt{\frac{r^2-x^2}{2}};$$

r den Radius der Kugel bedeutet, und man erhält

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{\frac{r^2 - \xi^2}{2}} + \sqrt{\frac{r^2 - \xi^2}{2}} = \sqrt{r^2 - \xi^2} \, . \, \sqrt{2};$$

D

$$\frac{\eta^2}{2r^2} + \frac{\xi^2}{r^2} = 1,$$

Gleichung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $r\sqrt{2}$ und
en halbe kleine Axe $= r$ ist.

Da man sich die Kugel durch Umdrehung des grössten Kreises
einen beliebigen festen Durchmesser entstanden denken kann,
wollen wir annehmen, dass dieser in der Axe der z liege.
nn ersieht man leicht, dass sämmtliche Ellipsen, welche in der
rigen Aufgabe als Projectionen des sich um diese Axe drehen-
n auf der Projections-Ebene senkrechten Kreises erscheinen,
n einer Ellipse eingehüllt werden, deren halbe grosse Axe $r\sqrt{2}$
d deren halbe kleine Axe r ist. Man erhält demnach folgenden
tz:

„Man ziehe in einem Kreise auf einen beliebigen
rchmesser eine Anzahl senkrechter Sehnen, und be-
rke die Durchschnittspunkte mit demselben. Giebt
n diesem Durchmesser eine drehende Bewegung um
n Mittelpunkt, und lässt zugleich die Sehnen mit
rer anfänglichen Richtung parallel sich fortbewegen,
liegen die Endpunkte derselben allemal in einer
lipse. Auf diese Weise erhält man für jeden Dre-
ngswinkel eine bestimmte Ellipse, und alle diese
rden von einer Ellipse eingehüllt, deren halbe grosse
e die Sehne eines Quadranten, und deren halbe
ine Axe der Radius dieses Kreises ist."

Wenn man die zu projicirende Kugel durch Ebenen parallel
t der Projections-Ebene schneidet, und die dadurch entstehen-
n Kreise projicirt, so sind diese Projectionen wieder Kreise,
d zwar ist jeder derselben demjenigen gleich, dessen Projection
ist. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen sämmtlich in der
e der y, und sind vom Anfangspunkte der Coordinaten eben-
weit entfernt, als die in der Axe der z liegenden Mittelpunkte
r ihnen entsprechenden, mit der Projections-Ebene parallelen
eise. Von jenen Kreisen werden alle diejenigen, deren Radius
ht kleiner als $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ist, von der Projection der Kugelfläche ein-
hüllt, von welcher wir gesehen haben, dass sie eine Ellipse
, welche die Sehne eines Quadranten des grössten Kreises zur
lben grossen Axe und den Radius desselben zur halben kleinen
e hat. Wir erhalten demnach einen Satz, welchen Herr Pro-
ssor Steiner im dritten Bande des Crelle'schen Journals
r reine und angewandte Mathematik. S. 208., wie
lgt, ausgesprochen hat:

„Zieht man in einem gegebenen Kreise Sehnen, die sämmtlich parallel sind, beschreibt über jeder, als Durchmesser genommen, einen Kreis, so wird jeder von diesen Kreisen (wozu auch der gegebene gehört) von einer bestimmten Ellipse eingeschlossen und in zwei Punkten berührt. Die Ellipse hat den mit den genannten Sehnen parallelen Durchmesser AB des gegebenen Kreises zur kleinen Axe, deren Quadrat gerade die Hälfte des Quadrats der grossen Axe ist. Diejenigen Kreise jedoch, deren Durchmesser kleiner sind als $AB\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ liegen innerhalb der Ellipse, ohne von ihr berührt zu werden"

Man ersieht aus diesen Beispielen, wie unsere Projectionsart angewandt werden kann, um Sätze durch geometrische Anschauung zu beweisen, welche man sonst auf analytischem Wege zu erhalten pflegt.

Wollte man den letzten Satz in Form einer Aufgabe aussprechen, so könnte man ihn auf folgende Weise fassen:

„Ein Kreis, dessen Radius r ist, liege in der Ebene xy und sein Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten. Lässt man nun den Mittelpunkt eines Kreises mit veränderlichem Radius sich in der Axe der y bewegen, und giebt diesem Radius jedesmal die Grösse, welche der Ordinate α des Mittelpunkts als Abscisse eines Punktes in der Peripherie jenes festen Kreises angehört, so werden solche bewegliche Kreise von einer krummen Linie eingehüllt, deren Gleichung gesucht wird."

Auflösung. Die Gleichung des beweglichen Kreises in irgend einer seiner Lagen ist

$$x^2 + (y-\alpha)^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so ergiebt sich

$$y = 2\alpha,$$

und substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung, so erhält man

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

oder

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

als Gleichung der gesuchten einhüllenden krummen Linie, welche demnach eine Ellipse mit halber grosser Axe $r\sqrt{2}$ und halber kleiner Axe r ist; übereinstimmend mit dem, was oben durch ganz andere Betrachtungen gefunden wurde.

Aufgabe 3. **Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Sphäroids, dessen Rotations-Axe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.**

Auflösung. Schneidet man die Oberfläche durch Ebenen parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen. Die Mittelpunkte dieser Kreise, welche sämmtlich in der Rotations-Axe liegen, bleiben auch in der Projection in ihren wahren Entfernungen von einander, wie denn auch die Rotations-Axe selbst ihre Grösse beibehält. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass, wenn man die Ellipse, durch deren Rotation das Sphäroid entstanden ist, construirt, auf die Rotations-Axe beliebige rechtwinklige Ordinaten fällt, und mit denselben als Radien aus den Punkten, in welchen die Axe getroffen wird, Kreise beschreibt, diejenige krumme Linie, welche solche Kreise einhüllt, die Projection des Rotations-Sphäroids sein wird. Auf diese Weise wird man sich dieser krummen Linie mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit nähern können.

Um diese Linie genauer kennen zu lernen, stellen wir folgende Untersuchung an. Die halbe grosse Axe der Ellipse des abgeplatteten Sphäroids, durch deren Umdrehung dasselbe entstanden ist, sei a, die halbe kleine b. Zieht man mit der grossen Axe beliebige parallele Sehnen, und beschreibt aus den Punkten, in welchen die kleine Axe von diesen getroffen wird, mit den Hälften der entsprechenden Sehnen als Radien, Kreise, so kann die einhüllende krumme Linie auch auf folgende Weise bestimmt werden. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

und wenn man die Ordinate eines Mittelpunkts jener Kreise durch α bezeichnet, so ist das Quadrat des ihr entsprechenden Radius

$$a^2\left(1-\frac{\alpha^2}{b^2}\right);$$

man hat demnach für jeden Kreis die Gleichung

$$x^2+(y-\alpha)^2=a^2\left(1-\frac{\alpha^2}{b^2}\right).$$

Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so ergiebt sich

$$y-\alpha=\frac{\alpha a^2}{b^2},$$

also

$$\alpha=\frac{b^2 y}{a^2+b^2},$$

welcher Werth, in die obige Gleichung substituirt, als Gleichung der einhüllenden krummen Linie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2+b^2}=1$$

ergiebt. Diese ist demnach eine Ellipse, deren Axen leicht construirt werden können. Die halbe kleine Axe ist nämlich gleich der halben grossen Axe der gegebenen Ellipse, und die halbe grosse Axe gleich der Sehne eines Quadranten derselben Ellipse. Dieser Construction wird man offenbar den Vorzug vor der ersten mittelst der Kreise geben.

Wenn das Sphäroid ein längliches, also durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe entstanden ist, und man die Sehnen parallel mit der kleinen Axe zieht, und aus den Punkten, in welchen die grosse Axe getroffen wird, mit den entsprechenden halben Sehnen Kreise beschreibt, so ist die Gleichung der dieselben einhüllenden krummen Linie:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2+b^2}=1,$$

d. h. diese Linie ist eine Ellipse, deren halbe kleine Axe gleich der halben kleinen Axe der gegebenen Ellipse und deren halbe grosse Axe, wieder wie vorhin, gleich der Sehne eines Quadranten derselben Ellipse ist.

In diesen beiden Sätzen ist, wie man leicht sieht, der Satz des Herrn Professor Steiner vom Kreise enthalten; man darf nur $a=b=r$ setzen, wo r den Radius des Kreises bedeutet.

Ferner ergeben sich durch Betrachtungen, welche den oben bei der Kugel angestellten ähnlich sind, folgende Sätze:

„Man ziehe in einer Ellipse mit einer Axe beliebige parallele Sehnen, und bemerke die Punkte, in welchen die andere getroffen wird. Giebt man dieser eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt, und lässt zugleich die Sehnen mit ihrer anfänglichen Richtung parallel sich fortbewegen, so liegen die Endpunkte derselben allemal in einer Ellipse. Auf diese Weise erhält man für jeden Drehungswinkel eine bestimmte Ellipse, und alle diese werden von *einer* Ellipse eingehüllt, deren halbe grosse Axe die Sehne eines Quadranten und deren halbe kleine Axe die halbe grosse oder halbe kleine Axe der gegebenen Ellipse ist, jenachdem die Sehnen mit jener oder dieser parallel sind."

„Alle diese Ellipsen haben die beiden Endpunkte derjenigen Axe, mit welcher die Sehnen parallel sind, zu gemeinschaftlichen Schneidungspunkten, und der Winkel, welchen zwei Ellipsen in einem dieser Punkte mit einander bilden, ist immer dem entsprechenden Drehungswinkel gleich."

Aufgabe 4. Man sucht die plagiographische Projection eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen, wenn eine dieser Axen auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Wenn man das Ellipsoid parallel mit der Projections-Ebene durch Ebenen schneidet, so entstehen Ellipsen, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen. Die Mittelpunkte derselben liegen sämmtlich in der auf der Projections-Ebene senkrechten Axe, welche in der Projection ihre wahre Grösse behält. Die Gleichung des zu projicirenden Ellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

und die Projections-Ebene, wie gewöhnlich, die Ebene der xy; auch sollen, wie bisher, die Projectionsstrahlen mit der Ebene yz parallel sein und mit der Ebene xy einen Winkel von 45^0 bilden. Dann fallen die Projectionen der Mittelpunkte der mit der Ebene xy parallelen Ellipsen in die Axe der y, in dieselben Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten, welche sie in der Wirklichkeit haben, und in dieselbe Linie fallen auch sämmtliche Axen, welche mit der Axe $2b$ parallel sind, während die mit der Axe $2a$ parallelen auf jene Linie senkrecht zu stehen kommen. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich nun folgende Construction:

„Man construire eine Ellipse, welche die Axen $2a$ und $2b$ hat, trage auf $2b$ nach beiden Seiten vom Mittelpunkte die halbe Axe c auf, construire die Ellipse, deren Axen $2a$ und $2c$ sind, trage auf $2a$ nach beiden Seiten vom Mittelpunkte die halbe Axe b auf, und construire eine dritte Ellipse, deren Axen $2b$ und $2c$ sind. Diese drei Ellipsen wollen wir resp. durch (a, b); (a, c); (b, c) bezeichnen. Zieht man nun mit $2a$ beliebige parallele Gerade, welche die Ellipsen (a, c) und (b, c) schneiden, und construirt über jeder dieser Sehnen Ellipsen, so dass die grössere von ihnen die grosse, die kleinere die kleine Axe wird, so ist die krumme Linie, welche diese Ellipsen einhüllt, die gesuchte Projection des Ellipsoids.“

Bezeichnet man durch α den Abstand einer der parallelen Sehnen von der Axe $2a$, so hat man für die Quadrate der halben Axen der entsprechenden Ellipse die Ausdrücke:

$$a^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right) \text{ und } b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right),$$

also ist die Gleichung derselben

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-\alpha)^2}{b^2}=1-\frac{\alpha^2}{c^2},$$

welche, in Bezug auf α differenziirt,

$$\alpha=\frac{c^2 y}{b^2+c^2}$$

ergiebt. Substituirt man diesen Ausdruck in die obige Gleichun
so erhält man für diejenige krumme Linie, welche jene Ellips
einhüllt, folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1.$$

Diese krumme Linie ist also wieder eine Ellip
deren halbe Axen a und $\sqrt{b^2+c^2}$ sind, aus welchem U
stande sich eine Construction unserer Aufgabe ergie
die ungleich einfacher als die oben angegebene ist.

Man sieht leicht, wie die Lösung der vorigen Aufgabe in
dieser allgemeinen enthalten ist.

Wir können die vorhergehenden Aufgaben aber auch vollständig lösen, ohne dabei die Theorie der Enveloppen als bekannt vorauszusetzen, wenn wir die krumme Linie suchen, in welcher die zu projicirende Oberfläche von dem Strahlen-Cylinder berührt wird, und diese krumme Linie sodann projiciren. Auf diese Weise gelangt man durch plagiographische Projection zu Sätzen über einhüllende Curven.

Wenn die Gleichung der zu projicirenden Oberfläche zwischen den Coordinaten x, y, z,

$$U=0,$$

gegeben ist, und die Gleichungen der erzeugenden Geraden eines Cylinders allgemein

$$x-az=\alpha,\; y-bz=\varphi\alpha$$

sind, so findet man bekanntlich die Gleichung des Cylinders, welcher die gegebene Oberfläche berührt, wenn man aus der Gleichung $U=0$ die partiellen Differenzialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ bestimmt, die Ausdrücke für dieselben in die Gleichung des Cylinders

$$1=a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

substituirt, und aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen x, y, z eliminirt, wodurch ein Ausdruck für $\varphi\alpha$ durch α gefunden wird. Setzt man in diesen die Ausdrücke für α und $\varphi\alpha$ durch x, y und z, so ist die dadurch entstehende Gleichung die gesuchte.

Aufgabe 5. Man sucht die plagiographische Projection einer Oberfläche, deren Gleichung $U=0$ gegeben ist.

Auflösung. Für den Fall unserer Projection haben wir, wenn die Gerade, welche den Cylinder erzeugt, mit der Ebene yz

rallel ist, und mit der Projections-Ebene xy einen Winkel von °bildet, $a=0$, $b=1$; die vier Gleichungen, welche hier in Beicht kommen, sind demnach:

$$U = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die drei Grössen x, y, z, erhält man einen Ausdruck für $\varphi\alpha$ durch α, und wenn man die usdrücke für $\varphi\alpha$ und α in diesen zurück substituirt, dann aber $=0$ setzt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x und y, welche e der gesuchten Projection der gegebenen Oberfläche ist.

Diese Aufgabe und Aufgabe 1. enthalten die ganze analytische heorie unserer Projectionsart.

Wenden wir die hier entwickelte allgemeine Theorie auf die ufgabe 4. an, in welcher die Aufgabe 3. enthalten ist, so wird

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z} \cdot \frac{c^2}{b^2},$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergiebt die Elimination der drei rössen x, y, z die Gleichung

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)(b^2 + c^2) = (\varphi\alpha)^2,$$

e ist, wenn man die Ausdrücke für $\varphi\alpha$ und α durch x, y, z in se Gleichung zurück substituirt, und dann $z=0$ setzt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1$$

Gleichung für die Projection des Ellipsoids, übereinstimmend der oben auf anderem Wege gefundenen. Für Aufgabe 3. ist $=b$, und man hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + c^2} = 1.$$

Aufgabe 6. Man sucht die plagiographische Protion eines Rotations-Paraboloids, dessen Axe auf Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Schneidet man den Körper parallel mit Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Proje in ihrer wahren Grösse erscheinen; daraus ergiebt sich folg Construction:

„Man construire die Parabel, durch deren Umdrehung ihre Axe der Körper entstanden ist, und ziehe beliebige au Axe senkrechte Sehnen. Die Durchschnittspunkte nehme m Mittelpunkten von Kreisen, deren Radien die Hälften dieser Se sind, dann ist diejenige krumme Linie, welche alle diese K einhüllt, die gesuchte Projection des Paraboloids."

Die Gleichung des zu projicirenden Körpers sei

$$x^2 + y^2 = p(a - z);$$

man hat also

$$U = x^2 + y^2 + pz - ap = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{2y}{p},$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt die Elimination der Grö x, y, z die Gleichung

$$\alpha^2 - \frac{p^2}{4} = ap + p\varphi\alpha,$$

also, wenn man die Ausdrücke für α und $\varphi\alpha$ zurück substi

$$x^2 = p\left(\frac{p}{4} + a + y\right).$$

Die Projection ist also wieder eine Parabel, und kann nach mit Leichtigkeit construirt werden.

Aufgabe 7. Man sucht die plagiographische l jection eines Rotations-Hyperboloids, dessen R tions-Axe auf der Projections-Ebene senkrecht st

Auflösung. Schneidet man den Körper durch Ebenen rallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welch der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen, und man e demnach folgende Construction:

„Man construire die Hyperbel, durch deren Umdrehung Körper entstanden ist. Auf die Rotations-Axe fälle man von liebigen Punkten der Hyperbel Lothe, und construire mit denselben als Radien aus den entsprechenden Durchschnittspunkten der Kreise. Diejenige krumme Linie, welche diese Kreise einh ist die gesuchte plagiographische Projection des Hyperbol Wenn der Körper ein Hyperboloid mit einem Fache ist, so man die Lothe auf die kleine Axe, wenn er ein Hyperboloid zwei Fächern ist, auf die grosse Axe zu fällen."

Wenn

$$U = a^2z^2 - c^2(y^2 + x^2) + a^2c^2 = 0$$

Gleichung des Umdrehungs-Hyperboloids mit einem Fache
, so hat man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{c^2y}{a^2z} = 1,$$

$$x = \alpha,$$

$$y = z + \varphi\alpha,$$

o

$$z = \frac{c^2\varphi\alpha}{a^2-c^2}, \quad y = \frac{a^2\varphi\alpha}{a^2-c^2},$$

ithin, nach gehöriger Substitution, für die Gleichung der gesuch-
n Projection:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1,$$

Gleichung einer Hyperbel.

Wenn

$$U = a^2z^2 - c^2(y^2 + x^2) - a^2c^2 = 0$$

e Gleichung des Umdrehungs-Hyperboloids mit zwei Fächern
t, so ergiebt sich für die Projection desselben

$$\frac{y^2}{c^2-a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

oraus man sieht, dass dieselbe ebenfalls eine Hyperbel wird.

In sehr vielen Fällen, namentlich in solchen, wo der zu pro-
icirende Körper von Ebenen begrenzt wird, ist es, um die pla-
giographische Projection zu erhalten, nicht nothwendig, zu den
allgemeinen Betrachtungen zurückzugehen, ja man bedarf nicht
einmal der Zeichnungen im Grund- und Aufrisse, sondern kann
durch besondere Betrachtungen, welche sich auf die Gestalt des
Körpers beziehen, die Projection erhalten. Dabei wird man Sätze,
wie die folgenden, welche in dem Wesen der plagiographischen
Projection begründet sind, anzuwenden Gelegenheit haben:

1. Alle gerade Linien, welche mit der Projections-Ebene
parallel sind, erscheinen in der Projection in ihrer wahren Grösse.

2. Alle gerade Linien, welche auf der Projections-Ebene
senkrecht stehen, behalten in der Projection ihre wahre Grösse.

3. Alle Winkel, deren Ebenen mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in dieser in ihrer wahren Grösse.

4. Alle mit einander parallele gerade Linien bleiben auch in der Projection mit einander parallel.

5. Alle ebene Figuren, welche mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in dieser in ihrer wahren Grösse und Form, d. h. als jenen congruente Figuren.

u. s. w.

Diese Projections-Art eignet sich ganz besonders, um beim Unterrichte in der Stereometrie angewandt zu werden, indem nicht nur die körperlichen Gebilde sich mittelst derselben in der Ebene sehr anschaulich darstellen lassen, sondern auch viele stereometrische Sätze mit überraschender Leichtigkeit bewiesen werden können.

XXII.

Ueber den Distanzmesser mit Parallelfäden.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff

an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Dieses Instrument besteht in einem um eine horizontale Axe drehbaren Fernrohr, bei welchem in der Ebene des Fadenkreuzes zwei horizontale Fäden in geringem Abstand (etwa 2 Linien) von einander gespannt sind. Visirt man mit dem Fernrohr in horizontaler Richtung nach einer entfernten in Zolle getheilten vertikalen Latte, so lässt sich aus dem beobachteten Lattenmaasse, d. h. aus der Anzahl von Zollen, welche sich zwischen jenen zwei Parallelfäden zeigen, die Entfernung der Latte vom Objektive (oder auch von der Axe) des Fernrohrs ziemlich genau bestimmen.

Da dieser Distanzmesser bei detaillirten Aufnahmen grosse Bequemlichkeit und bei bedeutender Verjüngung des Planes auch hinreichende Genauigkeit gewährt, so halte ich die Mittheilung folgender Bemerkungen über seinen Gebrauch um so weniger fi

nutzlos, als ich mich selbst hie und da von der unrichtigen Behandlung desselben überzeugt habe.

Vor Allem ist die Beziehung zwischen der Distanz D (der Latte von dem Objektive), dem Lattenmaasse L und den durch die Einrichtung des Fernrohrs bedingten Konstanten durch eine Gleichung auszudrücken.

Ist das Fernrohr ein astronomisches mit Einem Okular, P die Brennweite des Objektives, B das durch das Objektiv erzeugte kleine Bild des Lattenmaasses, so ist bekanntlich

$$B = \frac{P}{D-P} \cdot L,$$

daher

$$L = \frac{B}{P} \cdot D - B.$$

Eine scharfe Pointirung erfordert aber, dass das Bild B mit den Parallelfäden in Einer Vertikalebene liege, weil sonst dieses Bild hinter oder vor den Fäden schwankt. Der Fehler, welcher durch Hin- und Herbewegen des Auges leicht erkannt wird, muss durch Verschieben der Okularröhre beseitigt werden, nachdem in dieser die der deutlichen Sehweite entsprechende Entfernung zwischen dem Okular und den Parallelfäden hergestellt ist. Bei Erfüllung dieser Forderung ist aber das Bild B des Lattenmaasses genau gleich der vertikalen gegenseitigen Entfernung F der Parallelfäden, daher

$$L = \frac{F}{P} \cdot D - F.$$

Durch Verschiebung des Okulars in der Okularröhre wird alsdann das Lattenmaass nicht verändert; das Lattenmaass ist also von der Beschaffenheit des Auges unabhängig.

Die Konstante F kann nun unmittelbar gemessen werden. Da sich nämlich F sehr leicht bis auf $\frac{1}{15}$ Linie genau messen, dagegen L bei einer bedeutenderen Distanz nicht wohl über $\frac{1}{10}$ Zoll genau beobachten lässt, so verdient der bei der unmittelbaren Messung von F begangene Fehler keine Berücksichtigung.

Man hat also nur noch die Konstante $\frac{F}{P}$ durch wiederholte Beobachtungen von L für eine genau gemessene Distanz D zu bestimmen.

Ist z. B. $F = 0{,}19''$ und ist für $D = 5000''$ das arithmetische Mittel der Werthe von L aus 10 Beobachtungen $= 88{,}1''$ gefunden worden, so hat man

$$\frac{F}{P} = \frac{L+F}{D} = \frac{88{,}1+0{,}19}{5000} = 0{,}01766.$$

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 \,.\, D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a \,.\, L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a \,.\, 8{,}6 + b,$$
$$5000 = a \,.\, 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 \,.\, L + 17$$

ergeben würde.

Man könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zuge-
rigen Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g
Gleichung

$$L = f . D - g$$

ch der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch
er die Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

Es versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und
nselben Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen,
l dass dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal
nau über dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während
anderen Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

Auch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich
dern müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass
o alsdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobach-
ngen zu bestimmen sind.

Bisher wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens
he) horizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen
n Horizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte
s Lattenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass,
nn die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur
$L . \cos\alpha$ sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem
e Visirlinie die Latte trifft, nur $= a . L . \cos\alpha + b$, folglich die
rizontale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a . L . \cos\alpha + b) . \cos\alpha,$$

für bei kleinen Winkeln bis zu 10° ohne Bedenken

$$D = (a . L + b) . \cos^2\alpha$$

setzt werden kann. Für Winkel bis etwa 10° kann man aber,
nn α in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2 . \sin^2 1^0$
$= 1 - \alpha^2 . 0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b) . \alpha^2 . 0{,}0003$$

t. Um den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanz-
esser mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen
in. Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo
ch dann Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

Für bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel
$= aL + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle
rechnen, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die
tsprechende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

Wird der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch ge-
ucht, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man
ch der festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab
wirft, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz un-
telbar giebt.

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 \, . \, D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 \, . \, L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 \, . \, L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a \, . \, L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a \, . \, 8{,}6 + b,$$
$$5000 = a \, . \, 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 \, . \, L + 17$$

ergeben würde.

in könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zuge
ı Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g
eichung

$$L = f \, . \, D - g$$

ler Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch
ie Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und
ben Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen,
ıss dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal
über dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während
eren Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

ıch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich
müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass
lsdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobach-
zu bestimmen sind.

sher wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens
horizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen
orizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte
attenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass,
die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur
os α sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem
sirlinie die Latte trifft, nur $= a \, . \, L \, . \cos\alpha + b$, folglich die
ıtale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a \, . \, L \, . \cos\alpha + b) \, . \cos\alpha,$$

bei kleinen Winkeln bis zu 10° ohne Bedenken

$$D = (a \, . \, L + b) \, . \cos^2\alpha$$

werden kann. Für Winkel bis etwa 10° kann man aber,
in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2 \, . \sin^2 1^0$
$\alpha^2 \, . \, 0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b) \, . \, \alpha^2 \, . \, 0{,}0003$$

Jm den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanz-
mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen
Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo
ınn Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

r bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel
$L + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle
nen, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die
chende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

ird der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch ge-
t, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man
ler festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab
t, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz un-
ar giebt.

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 . D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 . L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 . L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a . L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a . 8{,}6 + b,$$

$$5000 = a . 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 . L + 17$$

ergeben würde.

n könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zuge
Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g
eichung

$$L = f . D - g$$

er Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch
e Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und
en Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen,
ss dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal
über dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während
eren Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

ch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich
müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass
sdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobach-
zu bestimmen sind.

sher wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens
horizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen
rizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte
attenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass,
die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur
s α sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem
sirlinie die Latte trifft, nur $= a . L . \cos\alpha + b$, folglich die
tale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a . L . \cos\alpha + b) . \cos\alpha,$$

bei kleinen Winkeln bis zu 10^0 ohne Bedenken

$$D = (a . L + b) . \cos^2\alpha$$

werden kann. Für Winkel bis etwa 10^0 kann man aber,
in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2 . \sin^2 1^0$
$\alpha^2 . 0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b) . \alpha^2 . 0{,}0003$$

Um den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanz-
mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen
Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo
nn Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

r bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel
$L + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle
en, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die
chende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

ird der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch ge-
t, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man
er festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab
t, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz un-
ar giebt.

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 \,.\, D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a \,.\, L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a \,.\, 8{,}6 + b,$$
$$5000 = a \,.\, 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 \,.\, L + 17$$

ergeben würde.

Man könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zuge
örigen Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g
er Gleichung

$$L = f \,.\, D - g$$

ch der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch
er die Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

Es versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und
nselben Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen,
d dass dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal
nau über dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während
anderen Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

Auch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich
dern müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass
so alsdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobach-
ngen zu bestimmen sind.

Bisher wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens
he) horizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen
n Horizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte
s Lattenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass,
enn die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur
$L \,.\, \cos\alpha$ sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem
e Visirlinie die Latte trifft, nur $= a \,.\, L \,.\, \cos\alpha + b$, folglich die
orizontale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a \,.\, L \,.\, \cos\alpha + b) \,.\, \cos\alpha,$$

ofür bei kleinen Winkeln bis zu 10^0 ohne Bedenken

$$D = (a \,.\, L + b) \,.\, \cos^2\alpha$$

esetzt werden kann. Für Winkel bis etwa 10^0 kann man aber,
enn α in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2 \,.\, \sin^2 1^0$
$= 1 - \alpha^2 \,.\, 0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b) \,.\, \alpha^2 \,.\, 0{,}0003$$

t. Um den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanz-
esser mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen
in. Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo
h dann Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

Für bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel
$= aL + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle
rechnen, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die
tsprechende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

Wird der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch ge-
aucht, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man
ch der festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab
twirft, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz un-
ttelbar giebt.

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 \,.\, D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a \,.\, L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a \,.\, 8{,}6 + b,$$
$$5000 = a \,.\, 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 \,.\, L + 17$$

ergeben würde.

Man könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zuge
írigen Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g
r Gleichung

$$L = f . D - g$$

ch der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch
ıer die Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

Es versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und
nselben Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen,
ıd dass dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal
mau über dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während
ı anderen Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

Auch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich
ıdern müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass
so alsdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobach-
ngen zu bestimmen sind.

Bisher wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens
ahe) horizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen
n Horizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte
s Lattenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass,
enn die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur
$L . \cos\alpha$ sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem
e Visirlinie die Latte trifft, nur $= a . L . \cos\alpha + b$, folglich die
rizontale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a . L . \cos\alpha + b) . \cos\alpha,$$

ıfür bei kleinen Winkeln bis zu 10° ohne Bedenken

$$D = (a . L + b) . \cos^2\alpha$$

setzt werden kann. Für Winkel bis etwa 10° kann man aber,
nn α in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2 . \sin^2 1^0$
$1 - \alpha^2 . 0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b) . \alpha^2 . 0{,}0003$$

t. Um den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanz-
sser mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen
n. Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo
h dann Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

Für bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel
$= aL + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle
echnen, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die
sprechende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

Wird der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch ge-
ucht, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man
h der festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab
irft, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz un-
ılbar giebt.

Ist z. B. $D = 56{,}14 . L + 17$ in Zollen, so hat man $D = 1$
$L = 30$ und $D = 5631$ für $L = 100$. Trägt man nun auf eine
Geraden von einem Anfangspunkt A aus nach dem verjüngten M
stab 17 Zoll und 5631 Zoll in derselben Richtung ab, bezei
die bezüglichen Endpunkte durch 0 und 100, theilt den Zwis
raum zwischen 0 und 100 in 100 gleiche Theile und bezeichn
Theilungspunkte durch 1, 2, 3....99, so ist die Gerade v
bis zum $m$ten Theilungspunkte die dem Lattenmaasse von m Z
entsprechende Distanz in der festgesetzten Verjüngung.
ähnliche Weise wie beim sogenannten tausendtheiligen Maass
lassen sich auch die Distanzen für die Zehntelzolle hinzufüge

Die anzunehmende Verjüngung hängt von der durch da
strument zu erreichenden Genauigkeit ab. Ist z. B. $D = 56{,}1$
$+ 17$ und lassen sich bei den grössten gemessenen Distanzen
die Zehntelzolle des Lattenmaasses gut schätzen, so erhält
die Distanzen auf $56 \times 0{,}1 = 5{,}6''$ genau. Da man nun der E
rung gemäss Linien mit dem Zirkel auf $\frac{1}{5}$ Linie ($\frac{1}{3}$ Millim
genau messen kann, so muss $\frac{1}{5}$ Linie des wahren Maassst
wenigstens $5{,}6'' = 56'''$ des verjüngten betragen, also $1'''$ des wa
Maassstabes wenigstens $15 \times 56 = 840'''$ des verjüngten: die
jüngung müsste also in diesem Falle höchstens $\frac{1}{840}$, dürfte
kleiner (z. B. $\frac{1}{1000}$) sein. Liessen sich bei den grössten ge
senen Distanzen nur noch Viertelzolle schätzen, so dürft
Verjüngung höchstens $\frac{1}{2100}$ sein.

XXIII.

Ueber Distanzmesser.

Von

dem Herausgeber.

I.

Da der Distanzmesser mit der Distanzlatte, für welchen
Professor . Langsdorff in dem vorhergehenden Aufsatze
Theorie geliefert hat, ein in der Praxis jedenfalls sehr viele
[illegible] Apparat ist, so will ich mir erlau

e Theorie desselben in dem vorliegenden Aufsatze noch nach n Ansichten zu entwickeln, welche ich selbst über diesen Gemstand der Praxis habe.

Wenn wir uns einen leuchtenden Punkt und von demselben uf die Axe eines Fernrohrs ein Perpendikel gefallt denken, die ntfernung des Fusspunktes dieses Perpendikels von dem ersten lemente *) des Objectiv-Systems durch p, die gehörig als positiv der als negativ betrachteten Entfernungen des leuchtenden Punktes nd seines dem letzten Elemente des Ocular-Systems, von welchem ie Strahlen unmittelbar in's Auge gelangen, entsprechenden Bildes ber respective durch q und Q bezeichnen; so ist, wenn A und B zwei constante, d. h. bloss von den unveränderlichen Bestimmungsstücken der Elemente des Objectiv-Systems und des Ocular-Systems und der unveränderlichen Lage derselben gegen einander n jedem dieser beiden Systeme einzeln genommen abhängende Grössen bezeichnen, unter der Voraussetzung einer genauen Einstellung des Fernrohrs zum deutlichen Sehen, für dasselbe Auge, nd unter der Bedingung, dass man das Auge immer an dieselbe Stelle hinter dem letzten Elemente des Ocular-Systems hält, wenigstens mit grosser Annäherung:

$$1)\quad \frac{q}{Q} = A + Bp.$$

Wegen des allgemeinen Beweises dieses Satzes, welcher sich er ohne Weitläufigkeit nicht geben lässt, muss ich mir erlauben uf den nach Verlauf von ein Paar Wochen erscheinenden, die llgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope enthaltenden sten Theil meiner Optischen Untersuchungen. Leipzig. 1846. S. 174. §. 23. Nro. 5. zu verweisen, indem ich hier nur merke, dass dieser Beweis sich hauptsächlich auf die auch in n beiden Aufsätzen Archiv. Theil VI. Nro. X. und Nro. IV. entwickelten Formeln gründet.

Nach meiner Meinung wird der Distanzmesser am besten mit wei in der Axe des Fernrohrs sich senkrecht durchschneidenden äden, von denen bei richtiger Aufstellung des Instruments sich er eine in horizontaler, der andere in vertikaler Lage befinden uss, und ausserdem mit noch zwei dem in Rede stehenden horizontalen Faden in möglichst genau gleichen Abständen von demselben parallelen Fäden versehen. Bei dem Gebrauche richtet an jederzeit die Axe des Fernrohrs genau nach dem Mittelpunkte der überhaupt nach irgend einem bestimmten Punkte M der vertikal aufgestellten Distanzlatte, liest das zwischen dem mittleren orizontalen Faden und einem der beiden ihm parallelen Fäden nthaltene Lattenmaass ab, oder bedient sich dabei auch der beiden em mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden zugleich, wobei ir immer das dem über der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkte der Latte entsprechende

*) Unter den Elementen eines Spiegel- und Linsen-Systems verich die einzelnen Spiegel und Linsen, aus denen dasselbe besteht, e in dem Systeme immer eine unveränderliche Lage gegen einander

Lattenmaass als positiv, das dem unter der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkte der Latte entsprechende Lattenmaass als negativ betrachten wollen, und misst an einem zweckmässig angebrachten Höhenkreise den Neigungswinkel der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont, indem man denselben als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die nach dem Punkte M gerichtete Visirlinie des Fernrohrs über oder unter der durch dessen Drehpunkt gehenden Horizontalen liegt. Dass alle nöthigen Hülfsmittel zur feinen Einstellung und genauen Aufstellung an dem Instrumente angebracht sein müssen, versteht sich von selbst.

Bezeichnen wir jetzt die Entfernung des Punktes M von dem Drehpunkte des Fernrohrs durch e, die constante Entfernung des ersten Elements des Objectiv-Systems von dem Drehpunkte des Fernrohrs durch Θ, den Neigungswinkel der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont durch i, das an einem der beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden abgelesene Lattenmaass durch λ; so erhellet aus Taf IV. Fig. 2. auch ohne weitere Erläuterung sogleich, dass in der Gleichung 1) in völliger Allgemeinheit

$$p = e - \Theta + \lambda \sin i,\ q = \lambda \cos i$$

zu setzen ist, wodurch dieselbe die Gestalt

$$2)\quad \frac{\lambda \cos i}{Q} = A + B(e - \Theta + \lambda \sin i)$$

oder

$$3)\quad \lambda \cos i = AQ + BQ(e - \Theta + \lambda \sin i)$$

erhält. Weil nun aber für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden offenbar Q eine constante Grösse ist, so sind für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden auch AB und BQ constante Grössen, und wir können also

$$4)\quad G = AQ,\ H = BQ;$$

wo G und H für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden constante Grössen sind, setzen, wodurch die Gleichung 3) in die folgende übergeht:

$$4)\quad \lambda \cos i = G + H(e - \Theta + \lambda \sin i).$$

Alles kommt nun zuvörderst auf die Bestimmung der beiden Constanten G und H an. Zu dem Ende messe man mit möglichster Genauigkeit eine Reihe von Werthen der Entfernung e, welche wir durch

$$E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ \ldots..$$

bezeichnen wollen, und bestimme die entsprechenden Werthe

$$L,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ \ldots..$$

des Lattenmaasses λ, natürlich immer an demselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden, und die entsprechenden Werthe

$$J,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ \ldots\ldots$$

des Neigungswinkels i. Dann hat man zur Bestimmung der beiden Constanten G und H die folgende Reihe von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} L\cos J = G+(E-\Theta+L\sin J)H, \\ L_1\cos J_1 = G+(E_1-\Theta+L_1\sin J_1)H, \\ L_2\cos J_2 = G+(E_2-\Theta+L_2\sin J_2)H, \\ L_3\cos J_3 = G+(E_3-\Theta+L_3\sin J_3)H, \\ L_4\cos J_4 = G+(E_4-\Theta+L_4\sin J_4)H, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man nun einer vollständigen Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwirft, worüber hier natürlich nichts weiter zu sagen ist, da in den bekannten betreffenden Schriften alles Erforderliche in grosser Ausführlichkeit nachgesehen werden kann.

Hat man aber auf diese Weise die Constanten G und H bestimmt, so erhält man nach der Gleichung 4) die Entfernung e aus den beobachteten Werthen von λ und i und dem immer leicht durch unmittelbare Messung mit aller nöthigen Genauigkeit zu bestimmenden Θ mittelst der Formel

$$6)\quad e=\Theta-\lambda\sin i+\frac{\lambda\cos i-G}{H}.$$

Wenn wir die Fehler von

$$G,\ H,\ \lambda,\ i,\ e$$

respective durch

$$\partial G,\ \partial H,\ \partial\lambda,\ \partial i,\ \partial e$$

bezeichnen, und dieselben als Differentiale betrachten, so haben wir nach 4) eigentlich die Gleichung

$$(\lambda+\partial\lambda)\cos(i+\partial i)=G+\partial G+(H+\partial H)\{e+\partial e-\Theta+(\lambda+\partial\lambda)\sin(i+\partial i)\},$$

also, weil e aus der Gleichung

$$\lambda\cos i=G+H(e-\Theta+\lambda\sin i)$$

bestimmt worden ist, nach den Principien der Differentialrechnung, wie man leicht findet:

$$\cos i\,\partial\lambda - \lambda \sin i\,\partial i = \partial G + (e - \Theta + \lambda \sin i)\,\partial H$$
$$+ H(\partial e + \sin i\,\partial\lambda + \lambda \cos i\,\partial i)$$

d. i.

$$\cos i\,\partial\lambda - \lambda \sin i\,\partial i = \partial G + \frac{\lambda \cos i - G}{H}\,\partial H$$
$$+ H(\partial e + \sin i\,\partial\lambda + \lambda \cos i\,\partial i)$$

und folglich

$$7)\quad \partial e = (\cos i - H \sin i)\frac{\partial\lambda}{H} - \lambda(\sin i + H\cos i)\frac{\partial i}{H} - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda \cos i - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Soll ∂i in Secunden ausgedrückt sein, so muss man
Gleichung $\sin 1''.\partial i$ für ∂i setzen, wodurch dieselbe die
Gestalt erhält:

$$8)\quad \partial e = (\cos i - H \sin i)\frac{\partial\lambda}{H} - \lambda(\sin i + H\cos i)\sin 1''.\frac{\partial i}{H} - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda \cos i - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Für $i=0$ ist

$$9)\quad \partial e = \frac{\partial\lambda}{H} - \lambda \sin 1''.\partial i - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Wenn man sich bei der Bestimmung der Constanten
H der Methode der kleinsten Quadrate nicht bedienen v
reichen zwei der Gleichungen 5), etwa die beiden Gleichu

$$10)\quad \begin{cases} L \cos J = G + (E - \Theta + L \sin J)\,H, \\ L_1 \cos J_1 = G + (E_1 - \Theta + L_1 \sin J_1)\,H, \end{cases}$$

zur Bestimmung dieser beiden Constanten hin. Mittelst
licher algebraischer Elimination erhält man nämlich ohne
rigkeit:

$$\begin{cases} G = -\dfrac{L(E_1 - \Theta + L_1 \sin J_1)\cos J - L_1(E - \Theta + L\sin J)\cos J_1}{E - E_1 + L\sin J - L_1 \sin J_1}, \\ H = \dfrac{L\cos J - L_1 \cos J_1}{E - E_1 + L\sin J - L_1 \sin J_1} \end{cases}$$

r

$$\begin{cases} G = -\dfrac{L(E_1 - \Theta)\cos J - L_1(E - \Theta)\cos J_1 - LL_1 \sin(J - J_1)}{E - E_1 + L\sin J - L_1 \sin J_1}, \\ H = \dfrac{L\cos J - L_1 \cos J_1}{E - E_1 + L\sin J - L_1 \sin J_1}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von ∂G und ∂H hat man aber nach 10), wenn früher auch jetzt $\partial\Theta = 0$ gesetzt wird, was jedenfalls verttet ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$(\cos J - H\sin J)\partial L - L(\sin J + H\cos J)\partial J - H\partial E$$
$$= \partial G + (E - \Theta + L\sin J)\partial H,$$

$$(\cos J_1 - H\sin J_1)\partial L_1 - L_1(\sin J_1 + H\cos J_1)\partial J_1 - H\partial E_1$$
$$= \partial G + (E_1 - \Theta + L_1 \sin J_1)\partial H.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$13) \quad \begin{cases} U = \cos J - H\sin J, \\ V = L(\sin J + H\cos J), \\ W = E - \Theta + L\sin J \end{cases}$$

$$14) \quad \begin{cases} U_1 = \cos J_1 - H\sin J_1, \\ V_1 = L_1(\sin J_1 + H\cos J_1), \\ W_1 = E_1 - \Theta + L_1 \sin J_1; \end{cases}$$

werden diese Gleichungen:

$$15) \quad \begin{cases} U\partial L - V\partial J - H\partial E = \partial G + W\partial H, \\ U_1\partial L_1 - V_1\partial J_1 - H\partial E_1 = \partial G + W_1\partial H; \end{cases}$$

führen mittelst leichter Elimination zu den beiden folgenden rücken:

$$16) \quad \partial G = -\frac{UW_1}{W - W_1}\partial L + \frac{U_1 W}{W - W_1}\partial L_1$$
$$+ \frac{VW_1}{W - W_1}\partial J - \frac{V_1 W}{W - W_1}\partial J_1$$
$$+ \frac{HW_1}{W - W_1}\partial E - \frac{HW}{W - W_1}\partial E_1$$

und

$$17)\quad \partial H = \frac{U}{W-W_1}\partial L - \frac{U_1}{W-W_1}\partial L_1$$
$$-\frac{V}{W-W_1}\partial J + \frac{V_1}{W-W_1}\partial J_1$$
$$-\frac{H}{W-W_1}\partial E + \frac{H}{W-W_1}\partial E_1.$$

Sollen ∂J und ∂J_1 in Secunden ausgedrückt sein, so diese Gleichungen:

$$18)\quad \partial G = -\frac{UW_1}{W-W_1}\partial L + \frac{U_1 W}{W-W_1}\partial L_1$$
$$+\frac{VW_1 \sin 1''}{W-W_1}\partial J - \frac{V_1 W \sin 1''}{W-W_1}\partial J_1$$
$$+\frac{HW_1}{W-W_1}\partial E - \frac{HW}{W-W_1}\partial E_1$$

und

$$19)\quad \partial H = \frac{U}{W-W_1}\partial L - \frac{U_1}{W-W_1}\partial L_1$$
$$-\frac{V \sin 1''}{W-W_1}\partial J + \frac{V_1 \sin 1''}{W-W_1}\partial J_1$$
$$-\frac{H}{W-W_1}\partial E + \frac{H}{W-W_1}\partial E_1.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass man das Lattenma den beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen beobachtet habe, und dass die Gleichung 2) für den über de *M* gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkt der

$$20)\quad \frac{\lambda \cos i}{Q} = A + B(e - \Theta + \lambda \sin i),$$

für den unter der nach *M* gerichteten Visirlinie des Fer liegenden Punkt der Latte dagegen

$$21)\quad \frac{\lambda' \cos i}{Q'} = A + B(e - \Theta + \lambda' \sin i)$$

sei; so haben wir die beiden Gleichungen

$$22)\quad \begin{cases} \lambda \cos i = AQ + BQ(e - \Theta + \lambda \sin i), \\ \lambda' \cos i = AQ' + BQ'(e - \Theta + \lambda' \sin i); \end{cases}$$

aus denen sich durch Subtraction die Gleichung

$$23)\quad (\lambda-\lambda')\cos i$$
$$= A(Q-Q') + B(Q-Q')(e-\Theta) + B(\lambda Q-\lambda' Q')\sin i$$

ergiebt. Sind nun die beiden Fäden, an denen das Lattenmaass beobachtet wird, gleich weit von dem mittleren horizontalen Faden entfernt, so ist $Q'=-Q$, also $Q-Q'=2Q$, und die vorhergehende Gleichung wird:

$$24)\quad (\lambda-\lambda')\cos i = 2AQ + 2BQ(e-\Theta) + BQ(\lambda+\lambda')\sin i,$$

oder, wenn wir

$$25)\quad \mathfrak{A} = 2AQ,\ \mathfrak{B} = 2BQ$$

setzen, wo natürlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind:

$$26)\quad (\lambda-\lambda')\cos i = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\{e-\Theta+\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\}.$$

Weil aber nach den oben gemachten Voraussetzungen λ positiv, dagegen λ' negativ ist, so ist offenbar $\lambda-\lambda'$ das zwischen den beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden enthaltene Lattenmaass, und folglich, wenn wir dieses durch l bezeichnen:

$$27)\quad l\cos i = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\{e-\Theta+\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\},$$

wo es nun wieder zuvörderst auf die Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ankommt.

Zu dem Ende messe man mit möglichster Genauigkeit eine Reihe von Werthen der Entfernung e, welche wir durch

$$E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ \ldots.$$

bezeichnen wollen, und bestimme die entsprechenden Werthe

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{L},\ \mathfrak{l},\ \mathfrak{l}';\\
\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{l}_1,\ \mathfrak{l}'_1;\\
\mathfrak{L}_2,\ \mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}'_2;\\
\mathfrak{L}_3,\ \mathfrak{l}_3,\ \mathfrak{l}'_3;\\
\mathfrak{L}_4,\ \mathfrak{l}_4,\ \mathfrak{l}'_4;\\
\text{u. s. w.}
\end{array}$$

der Lattenmaasse

$$l,\ \lambda,\ \lambda'$$

und die entsprechenden Werthe

$$J,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ \ldots.$$

des Neigungswinkels i. Dann hat man zur Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die folgende Reihe von Gleichungen:

$$28)\quad\begin{cases} \mathfrak{L}\cos J = \mathfrak{A} + \{E - \Theta + \frac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_1\cos J_1 = \mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_2\cos J_2 = \mathfrak{A} + \{E_2 - \Theta + \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_2+\mathfrak{l}'_2)\sin J_2\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_3\cos J_3 = \mathfrak{A} + \{E_3 - \Theta + \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_3+\mathfrak{l}'_3)\sin J_3\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_4\cos J_4 = \mathfrak{A} + \{E_4 - \Theta + \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_4+\mathfrak{l}'_4)\sin J_4\}\mathfrak{B}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man einer vollständigen Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwerfen muss.

Hat man also auf diese Weise die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden, so ergiebt sich e nach 27) mittelst der Formel

$$29)\quad e = \Theta - \tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda')\sin i + \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.$$

Kann man das Glied $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i$, wo, was wohl zu beachten ist, λ und λ' entgegengesetzte Vorzeichen haben, ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so werden die vorhergehenden Formeln etwas einfacher, was hier einer weiteren Ausführung nicht bedarf, indem die betreffenden Formeln mit der grössten Leichtigkeit aus den vorhergehenden allgemeinen Formeln sogleich abgeleitet werden können.

Durch Differentiation erhält man aus der Gleichung 27) auf gewöhnliche Weise

$$\cos i\,\partial l - l\sin i\,\partial i = \partial\mathfrak{A} + \{e - \Theta + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\}\partial\mathfrak{B}$$
$$+ \mathfrak{B}\{\partial e + \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda + \partial\lambda') + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\cos i\,\partial i\}$$

oder

$$\cos i\,\partial l - l\sin i\,\partial i = \partial\mathfrak{A} + \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\,\partial\mathfrak{B}$$
$$+ \mathfrak{B}\{\partial e + \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda + \partial\lambda') + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\cos i\,\partial i\},$$

und folglich

$$30)\quad \partial e = \cos i\frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda + \partial\lambda')$$
$$+ \{l\sin i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\lambda+\lambda')\cos i\}\frac{\partial i}{\mathfrak{B}}$$
$$- \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$
$$- \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}},$$

oder, wenn ∂i in Secunden ausgedrückt sein soll, auf ähnliche Art wie im Obigen:

$$31)\quad \partial e = \cos i\,\frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}\sin i\,(\partial\lambda + \partial\lambda')$$
$$- \{l\sin i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\lambda+\lambda')\cos i\}\sin 1''.\frac{\partial i}{\mathfrak{B}}$$
$$- \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$
$$- \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Für $i=0$ ist

$$32)\quad \partial e = \frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin 1''.\partial i - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - \frac{l-\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Will man sich bei der Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ [die] Methode der kleinsten Quadrate nicht bedienen, so reichen [zwei] der Gleichungen 28), etwa die beiden Gleichungen

$$33)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\cos J = \mathfrak{A} + \{E - \Theta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_1\cos J_1 = \mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1\}\mathfrak{B}, \end{cases}$$

[zu]r Bestimmung dieser Constanten hin. Auf dem Wege gewöhn[lic]her algebraischer Elimination erhält man nämlich ohne Schwie[rig]keit:

$$34)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\dfrac{\mathfrak{L}\{E_1-\Theta+\frac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1\}\cos J - \mathfrak{L}_1\{E-\Theta+\frac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J\}\cos J_1}{E-E_1+\frac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J - \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\mathfrak{L}\cos J - \mathfrak{L}_1\cos J_1}{E-E_1+\frac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J - \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1}, \end{cases}$$

Durch Differentiation erhält man aus den Gleichungen 33) [le]icht die beiden folgenden Gleichungen:

$$\cos J\,\partial\mathfrak{L} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J\,(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}')$$
$$- \{\mathfrak{L}\sin J + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\cos J\}\partial J - \mathfrak{B}\,\partial E$$
$$= \partial\mathfrak{A} + \{E - \Theta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J\}\partial\mathfrak{B},$$

$$\cos J_1\partial\mathfrak{L}_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J_1\,(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1)$$
$$- \{\mathfrak{L}_1\sin J_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\cos J_1\}\partial J_1 - \mathfrak{B}\,\partial E_1$$
$$= \partial\mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1\}\partial\mathfrak{B};$$

[o]der, wenn wir der Kürze wegen

$$35)\quad \begin{cases} \mathfrak{T} = \cos J, \\ \mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J, \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{L}\sin J + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\cos J, \\ \mathfrak{W} = E - \Theta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}+\mathfrak{l}')\sin J \end{cases}$$

$$36)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_1 = \cos J_1, \\ \mathfrak{U}_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J_1, \\ \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{L}_1 \sin J_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\cos J_1, \\ \mathfrak{W}_1 = E_1 - \Theta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}'_1)\sin J_1 \end{cases}$$

setzen:

$$37)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}\,\partial\mathfrak{L} - \mathfrak{U}\,(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') - \mathfrak{V}\,\partial J - \mathfrak{B}\partial E = \partial\mathfrak{A} + \mathfrak{W}\partial\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{T}_1\partial\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{U}_1\,(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1) - \mathfrak{V}_1\partial J_1 - \mathfrak{B}\partial E_1 = \partial\mathfrak{A} + \mathfrak{W}_1\partial\mathfrak{B}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$38)\quad \begin{aligned} \partial\mathfrak{A} = &-\frac{\mathfrak{T}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &+ \frac{\mathfrak{U}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') - \frac{\mathfrak{U}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1) \\ &+ \frac{\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J - \frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &+ \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E - \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

und

$$39)\quad \begin{aligned} \partial\mathfrak{B} = &\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &- \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') + \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1) \\ &- \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J + \frac{\mathfrak{V}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &- \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

oder, wenn ∂J und ∂J_1 in Secunden ausgedrückt sein sollen

$$40)\quad \begin{aligned} \partial\mathfrak{A} = &-\frac{\mathfrak{T}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &+ \frac{\mathfrak{U}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') - \frac{\mathfrak{U}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1) \\ &+ \frac{\mathfrak{V}\mathfrak{W}_1\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J - \frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &+ \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E - \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

und

$$41)\quad \partial\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1$$
$$- \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') + \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1)$$
$$- \frac{\mathfrak{B}\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J + \frac{\mathfrak{B}_1\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1$$
$$- \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1.$$

II.

Ich will nun noch die Idee zu einem anderen Distanzmesser
igeben, werde mich aber für jetzt durchaus nur auf die Darle-
ing derselben ganz im Allgemeinen beschränken, ohne mich auf
ntersuchungen über die Genauigkeit, welche dieses Instrument
twa zu gewähren im Stande sein möchte, einzulassen, weil ich
abei eine grössere Anzahl dioptrischer Sätze in Anwendung zu
ringen, und zu öfteren Verweisungen auf meine oben erwähnte,
diesem Augenblicke noch nicht erschienene Schrift genöthigt
ein würde. Bemerken will ich jedoch, dass ich diese Unter-
uchung für um so nöthiger halte, weil ich mir keineswegs ver-
ehle, dass die Ausführung des im Folgenden anzugebenden In-
truments allerdings nicht geringen praktischen Schwierigkeiten
nterliegen dürfte.

Wir denken uns zwei mit einander verbundene Fernröhre von
ehr verschiedener Vergrösserung, deren optische Axen einander
arallel sind, auf einem passenden, mit allen nöthigen Vorrich-
ungen zur groben und feinen Bewegung versehenen Stative auf-
estellt, und verbinden mit denselben einen mikrometrischen Appa-
at, durch welchen die linearen Grössen der Bilder der Objecte
nit grosser Genauigkeit gemessen werden können, wobei es jeden-
alls am vortheilhaftesten sein wird, wenn sich die Einrichtung so
reffen lässt, dass derselbe mikrometrische Apparat bei beiden
Fernröhren zur Messung der linearen Grössen der Bilder gebraucht
verden kann. Auch wird ein Höhenkreis zur Messung des Nei-
ungswinkels der einander parallelen optischen Axen der beiden
Fernröhre gegen den Horizont angebracht, wovon der Zweck leicht
on selbst in die Augen fallen wird, wenn wir auch im Folgenden
lieser Einrichtung nicht weiter Erwähnung thun werden, da es
ms, wie gesagt, für jetzt nur auf die Darlegung der Idee ganz
m Allgemeinen ankommt.

Eine gerade Linie, etwa ein Durchmesser eines beliebigen
Objects, deren Entfernung von dem Drehpunkte des Instruments
und deren Länge q sein mag, stehe nun auf den einander pa-
allelen optischen Axen der beiden Fernröhre senkrecht. Sind
dann die mit dem mikrometrischen Apparate gemessenen linearen
Grössen der Bilder dieser Linie in den beiden Fernröhren Q und
Q', und bezeichnen i und i' die Entfernungen der Objectivgläser
der beiden Fernröhre von dem Drehpunkte des Instruments; so
hat man, wie leicht erhellen wird, nach I. 1) für die beiden Fern-
röhre die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \frac{q}{Q} = A + B(p-i),\quad \frac{q}{Q'} = A' + B'(p-i');$$

wo A, B und A', B' Constanten sind. Durch Elimination von ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{A+B(p-i)}{A'+B'(p-i')},$$

und folglich

$$2)\quad p = -\frac{(A-Bi)\,Q-(A'-B'i')\,Q'}{BQ-B'Q'},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$3)\quad \mathfrak{A} = -\frac{A-Bi}{B},\quad \mathfrak{B} = \frac{A'-B'i'}{B},\quad \mathfrak{C} = \frac{B'}{B}$$

setzt:

$$4)\quad p = \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\frac{Q'}{Q}}{1-\mathfrak{C}\frac{Q'}{Q}},$$

mittelst welcher Formel, wenn die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bekannt sind, die Entfernung p aus dem durch Messung von Q und bestimmten Werthe von $\frac{Q'}{Q}$ berechnet werden kann.

Aus der Gleichung 4) ergiebt sich die Gleichung

$$5)\quad \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + p\frac{Q'}{Q}\mathfrak{C} = p.$$

Hat man nun durch wirkliche Messungen eine Reihe zusammengehörender Werthe von p und $\frac{Q'}{Q}$ ermittelt, so erhält man eine Reihe von Gleichungen von der Form:

$$6)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + p\frac{Q'}{Q}\mathfrak{C} = p, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{B} + p_1\frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{C} = p_1, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{B} + p_2\frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{C} = p_2, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{B} + p_3\frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{C} = p_3, \end{cases}$$

u. s. w.

welche in Bezug auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ als unbekannte Grössen vom ersten Grade sind. Hat man drei Gleichungen dieser Art, welches die geringste erforderliche Anzahl derselben ist, so erhält man die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination. Hat man dagegen mehr als drei Gleichungen von der obigen Form, so findet man die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mittelst der Methode der kleinsten Quadrate.

Hat man Gelegenheit zwei Paare zusammengehörender Werthe von p und q zu messen, so hat man nach 1) zur Bestimmung von A und B zwei Gleichungen von der Form:

$$A+(p-i)B=\frac{q}{Q},\quad A+(p_1-i)B=\frac{q_1}{Q_1};$$

und zur Bestimmung von A' und B' zwei Gleichungen von der Form:

$$A'+(p-i')B'=\frac{q}{Q'},\quad A'+(p_1-i')B'=\frac{q_1}{Q'_1}.$$

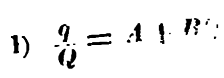
Hat man aber mittelst dieser Gleichungen die Constanten A, B und A', B' gefunden, so ergeben sich die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mittelst der Formeln 3), und man kann dann zuerst p mittelst der Formel 4), und hierauf auch q mittelst einer der beiden unmittelbar aus 1) fliessenden Formeln

$$7)\quad q=\{A+B(p-i)\}Q,\quad q=\{A'+B'(p-i')\}Q'$$

berechnen.

Bemerken wollen wir endlich noch, dass man, so wie vorher q, aus den beiden Gleichungen 1) auch p eliminiren, und sich ähnliche Vorschriften wie vorher zur unmittelbaren Bestimmung von p auch zur unmittelbaren Bestimmung von q bilden könnte, welches weiter auszuführen wir jedoch füglich dem Leser überlassen können.

Mit diesen allgemeinen Andeutungen über den vorliegenden Gegenstand müssen wir uns jetzt vorläufig begnügen.



wo A, B und A', ...
ergiebt sich aus die...

und folglich

2) p ...

oder, wenn man die...

3) $\mathfrak{A} = ... B ...$

setzt:

4) $p = ...$

mittelst welcher Formel, wenn ...
sind, die Entfernung p ... $\frac{Q'}{Q}$ ...
bestimmten Werthe von $\frac{Q'}{Q}$

Aus der Gleichung 4) ergiebt ...

5) $\mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} ...$

Hat man nun durch wirkli...
mengehörender Werthe von p ...
Reihe von Gleichungen von der

$$6) \begin{cases} \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + \ldots \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{B} \ldots \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{B} \ldots \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{B} \ldots \end{cases}$$

b und b', so ist das Moment desjenigen Kräftepaars, welches
Körper in seine alte Lage direct zurückzuführen strebt, $=\alpha k(b+$

Es sei jetzt e ein Element des zu k gehörigen Theiles f_0
Fläche f, e' ein Element des zu k' gehörigen, f_1; x und x' d
Entfernungen von l. Errichtet man auf e und e' Prismen bis
von f' als zweite Endfläche geschnitten werden, so ist deren H
$x \sin \varepsilon$ und $x' \sin \varepsilon$; demnach $ex \sin \varepsilon$ ein Element von k, $e'x'$
ein solches von k'. Multiplicirt man jedes Element mit se
Entfernung von l, und summirt alle Elemente bis man k un
vollständig erhält, so ist die Summe respective kb und k
folglich

$$kb = S e x^2 \sin \varepsilon, \quad kb' = S e' x'^2 \sin \varepsilon;$$
$$k(b+b') = (S e x^2 + S e' x'^2) \sin \varepsilon;$$

d. i. die Summe aller Elemente von f, jedes mit dem Qu
seiner Entfernung multiplicirt, oder das Trägheitsmoment
Fläche f in Bezug auf die Axe l, das wir durch M bezeich
wollen, mit $\sin \varepsilon$ multiplicirt. Mithin ist das Moment des zwe
Paares $=\alpha M \sin \varepsilon$. Setzt man beide Paare zusammen, so re
tirt das Moment

$$p \sin \varepsilon = (\alpha M - m(z+z')) \sin \varepsilon.$$

Ist p positiv, so wird demnach der Körper in seine alte L
zurückkehren, ist es negativ, sich davon entfernen, unter
Voraussetzung, dass er sich allein um l drehen kann.

Wäre der Körper nach der entgegengesetzten Seite ged
worden, so hätte sich nur das Zeichen von ε, also auch nur
des resultirenden Moments geändert; es wäre demnach die
gegengesetzte Bewegung mit gleicher Kraft erfolgt, d. h. für
sitive p in die alte Lage zurück, für negative von derselben hinw

Damit nun die Lage des Körpers stabil sei, wird erford
dass p für jede Richtung von l in der Ebene f positiv sei.
von dieser Richtung allein M abhängt, so wird p stets po
sein, wenn es für das Minimum von M positiv ist. Bekannt
ist das Trägheitsmoment einer Ebene überhaupt am kleinsten
eine Axe, die in derselben durch ihren Schwerpunkt geht. D
kann man den gewonnenen Satz so aussprechen:

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist si
oder unsicher, jenachdem das Product des specifischen Gewi
der Flüssigkeit in das kleinste Trägheitsmoment des vom Niv
gebildeten Schnittes des Körpers grösser oder kleiner ist als
Product der Körpermasse in die Höhe ihres Schwerpunkts
dem des verdrängten Volums.

Dieser Satz lässt gleichwohl noch den Fall $p=0$ unber
sichtigt, in welchem die Stabilität nicht mehr von M und z
allein abhängt. Hier würden die unendlich kleinen Grössen zwe
Ordnung, die wir vernachlässigt haben, in Betracht kommen,
die Neigungen der Oberfläche gegen das Niveau in der Nähe
selben in die Untersuchung zu ziehen sein, was einen besond
Gegenstand für diese bilden würde.

Als Beispiel wollen wir ein homogenes rechtwinkliges Parallel-
pedon wählen, welches offenbar im Gleichgewicht schwimmt,
n zwei Flächen dem Niveau parallel sind, und die Bedingung
Stabilität dieser Lage suchen. Es sei a die verticale Kante,
d c die horizontalen, und zwar $b \geqq c$; ferner β das specifische
cht, das der Flüssigkeit $=1$ gesetzt. Das kleinste Trägheits-
nt des Schnittes bc ist (was wir als anderweitig bekannt
setzen) $= \frac{1}{12} bc^3$. Die Masse $m = v = \beta abc$, also die Höhe
$= \beta a$. Hieraus ergiebt sich sehr leicht die Lage der Schwer-
; man wird finden

$$z = \frac{1}{2} a - \beta a, \quad z' = \frac{1}{2} \beta a;$$

$$z + z' = \frac{1}{2} a(1-\beta);$$

l

$$p = M - m(z+z') = \frac{1}{12} bc^3 - \frac{1}{2} \beta (1-\beta) a^2 bc.$$

emnach ist die Bedingung der Stabilität

$$\frac{1}{6} c^2 - \beta (1-\beta) a^2 > 0,$$

$$\frac{c}{a} > \sqrt{6\beta(1-\beta)};$$

wenn man β entwickelt:

$$\beta < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c^2}{6a^2}} \text{ und } \beta > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c^2}{6a^2}}.$$

as Maximum von $\sqrt{6\beta(1-\beta)}$ ist (für $\beta = \frac{1}{2}$) $= \sqrt{\frac{3}{2}}$;
o

$$\frac{c}{a} > \sqrt{\frac{3}{2}},$$

die genannte Lage für jedes specifische Gewicht stabil.

XXV.

Das Binomialtheorem, die Expon tialreihe, die logarithmische Re die Reihen für den Sinus und Cosi und die Reihe für den durch s Tangente bestimmten Arcus, zus menhängend im Geiste der neue Analysis dargestellt.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Ich werde in dieser Abhandlung, in welcher ich üb durchaus nicht überall Neues zu geben die Absicht habe, al Reihen, welche für die gesammte Mathematik von der gr Wichtigkeit, und namentlich als unentbehrlich für alle Un chungen über die Functionen anzusehen sind, nämlich die mialreihe, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe Reihen für den Sinus und Cosinus, und die Reihe für den seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im der neueren Analysis darzustellen suchen, und bemerke hie vorläufig, dass ich bei dieser Darstellung als deren Haupt ment die Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihe bekannt voraussetze, mir aber vorbehalte, auch diese so h wichtige Lehre in dem Archive bald einmal mit möglichster ständigkeit zu entwickeln. In der vorliegenden Abhandlung men übrigens nur solche Sätze aus derselben zur Anwen welche ganz mit demselben Rechte, wie etwa die bekannten mentarsätze von der Addition, Subtraction, Multiplication un vision als Haupt- und Fundamentalsätze der gemeinen Arith zu betrachten sind, als Haupt- und Fundamentalsätze der An angesehen werden müssen, und daher, wie hier geschieht, dings füglich als einem Jeden, der überhaupt der neueren An ein sorgfältiges und einigermaassen umfassendes Studium gew hat, hinreichend bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Vorzü

werde ich mich in dieser Abhandlung, das Binomial-
mit möglichster Vollständigkeit und Allgemeinheit darzu-
und als natürliche und unmittelbare Fortsetzung werde
:lben bald eine zweite Abhandlung folgen lassen, welche
iterung der in der Abhandlung Archiv. Thl. I. Nro. XL.
n ihren Grundelementen entwickelten Lehre von den ima-
Grössen zum Zweck hat.

§. 2.

st stellen wir uns die Aufgabe, die Reihe

$$(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

und a sämmtlich endliche völlig bestimmte reelle Grössen
d

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots.$$

öhnlich die Binomial-Coefficienten für den Exponenten α
r Ordnung bezeichnen, in allen den Fällen, wo dieselbe
rt und also auch bloss einer Summation fähig ist, zu sum-
Weil man aber bekanntlich (Archiv. Thl. I. S. 297.)

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

ositiv ist und, wie bekannt, der Modulus der imaginären
$a+b\sqrt{-1}$ genannt wird, also nach dem Moivre'schen
ne (a. a. S. 301.)

$$(a+b\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos n\Theta+\sin n\Theta\sqrt{-1}),$$

ine positive ganze Zahl bezeichnen soll, setzen kann; so
ch die obige Reihe jederzeit auf die Form

$$\begin{array}{l}
1,\\
\alpha_1\varrho\ (\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),\\
\alpha_2\varrho^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),\\
\alpha_3\varrho^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\
\alpha_4\varrho^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\
\quad\text{u. s. w.}
\end{array}$$

, und kann daher immer summirt werden, wenn man diese
Reihe zu summiren im Stande ist, weshalb wir uns jetzt
rst, indem wir, um die Untersuchung etwas zu verallge-
1, x eine beliebige positive oder negative Grösse bedeuten
mit der Summirung der Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1 x\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 x^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
u. s. w.

in allen den Fällen, wo dieselbe überhaupt möglich ist, beschäftigen, und dabei die Summe dieser Reihe, wenn es nämlich eine Summe derselben giebt, durch $F(\alpha)$ bezeichnen wollen.

§. 3.

Wenn zuerst α eine positive ganze Zahl ist, so bricht wegen der vom $(\alpha+1)$sten an verschwindenden Binomial-Coefficienten die zu summirende Reihe mit dem $(\alpha+1)$sten Gliede ab, und ist also in diesem Falle als eine endliche Reihe stets einer Summation fähig.

In der im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnung ist nun

$$1)\quad F(\alpha) = 1 + \alpha_1 x\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_2 x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_3 x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \alpha_\alpha x^\alpha (\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1}),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

multiplicirt:

$$\{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}\, F(\alpha)$$
$$= 1 + (1+\alpha_1)\, x\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ (\alpha_1+\alpha_2)\, x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ (\alpha_2+\alpha_3)\, x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
u. s. w.
$$+ (\alpha_{\alpha-1}+\alpha_\alpha) x^\alpha (\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_\alpha x^{\alpha+1} (\cos(\alpha+1)\Theta + \sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}).$$

Also ist nach ein Paar bekannten Sätzen von den Binomial-Coefficienten:

$$\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha)$$
$$=1+(\alpha+1)_1 x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+(\alpha+1)_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+(\alpha+1)_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+(\alpha+1)_{\alpha+1} x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta+\sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}),$$

weil der Analogie nach die Summe der Reihe auf der rechten
: des Gleichheitszeichens offenbar durch $F(\alpha+1)$ zu be
nen ist:

$$2)\quad F(\alpha+1)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha).$$

Weil nun wegen der Gleichung 1) augenscheinlich

$$F(1)=1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$

so ist nach der Gleichung 2) successive:

$$F(1)=\;1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$F(2)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(1)$$
$$=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^2,$$
$$F(3)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(2)$$
$$=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^3,$$
$$F(4)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(3)$$
$$=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^4,$$

u. s. w.

folglich offenbar allgemein:

$$3)\quad F(\alpha)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha,$$

i aber natürlich immer vorausgesetzt wird, dass α eine po
e ganze Zahl ist.

Setzt man

$$\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

t man zur Bestimmung des positiven Modulus ϱ und des
φ die beiden Gleichungen:

$$\varrho\cos\varphi=1+x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi=x\sin\Theta;$$

aus denen sich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt und dann addirt, leicht

$$\varrho^2 = 1 + 2x\cos\Theta + x^2,$$

also

$$4)\quad \varrho = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}};$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta},$$

also

$$5)\quad \varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ergiebt, wo aber, da ϱ positiv sein soll, und die Erfüllung der beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta$$

zugleich erfordert wird, der Bogen φ so genommen werden muss, dass er sich im ersten Quadranten endigt, wenn $1 + x\cos\Theta$ und auch $x\sin\Theta$ positiv ist; dagegen muss sich φ im zweiten Quadranten endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv ist; im dritten Quadranten muss sich φ endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ negativ und auch $x\sin\Theta$ negativ ist; im vierten Quadranten endlich muss sich φ endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist.

Wenn also α eine positive ganze Zahl ist, und der Bogen

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

den vorher angegebenen Bedingungen gemäss genommen wird, so ist nach dem Obigen

$$6)\quad F(\alpha) = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1}),$$

oder, vollständig entwickelt:

$$7)\quad F(\alpha) =$$

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta} + \sin\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}.\sqrt{-1}).$$

Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so läuft die zu summirende Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1 x\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 x^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
u. s. w.

in's Unendliche fort, und erfordert daher, bevor wir zu ihrer Summation schreiten können, eine besondere Untersuchung rücksichtlich ihrer Convergenz und Divergenz.

Weil nun nach der Theorie der Binomial-Coefficienten

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha - n}{n+1},$$

und folglich

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} = -1 + \frac{\alpha+1}{n+1}$$

ist; so nähert sich der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

wenn n wächst, der Gränze -1, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug annimmt. Immer wird sich aber, wie sogleich in die Augen fällt, eine Grösse von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass für jedes diese Grösse übersteigende n der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = -1 + \frac{\alpha+1}{n+1}$$

negativ, und folglich

$$1 - \frac{\alpha+1}{n+1}$$

der absolute Werth dieses Bruches ist. Wenn nun n nur erst diese Grösse überstiegen hat und dann fernerhin wächst, so nähert sich offenbar der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

der Einheit immer mehr und mehr und kann derselbe beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug annimmt, woraus sich nach einem bekannten Satze der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen ergiebt, dass die zu summirende Reihe

für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x convergirt, für jedes ausserhalb dieser Gränzen liegende x dagegen divergirt. Weil ferner der absolute Werth von $\alpha_n x^n$ offenbar der Modulus des allgemeinen Gliedes

$$\alpha_n x^n (\cos n\Theta + \sin n\Theta \sqrt{-1})$$

unserer Reihe ist, so bilden nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x auch die Moduli der einzelnen Glieder unserer Reihe eine convergirende Reihe.

Nehmen wir jetzt immer an, dass x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist in der eingeführten Bezeichnung für jedes α und β

$$8)\quad \begin{aligned} F(\alpha) = 1 &+ \alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_2 x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_3 x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_4 x^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und

$$9)\quad \begin{aligned} F(\beta) = 1 &+ \beta_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_2 x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_3 x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_4 x^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und folglich nach bekannten Sätzen aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen und aus der Lehre von den imaginären Grössen, weil, was man nicht zu übersehen hat, auch die Moduli der einzelnen Glieder der beiden vorhergehenden convergirenden Reihen unter den gemachten Voraussetzungen convergirende Reihen bilden:

$$10)\quad \begin{aligned} F(\alpha).F(\beta) = 1 & \\ &+ (\alpha_1+\beta_1)\,x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_2+\alpha_1\beta_1+\beta_2)\,x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_3+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\beta_3)\,x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3+\beta_4)\,x^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

also nach dem in der Abhandlung Archiv. Thl. I. Nr. X. S. 72. bewiesenen merkwürdigen Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$11)\quad F(\alpha).F(\beta) = 1 + (\alpha+\beta)_1\, x\, (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ (\alpha+\beta)_2\, x^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ (\alpha+\beta)_3\, x^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ (\alpha+\beta)_4\, x^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

i. in der eingeführten Bezeichnung:

$$12)\quad F(\alpha).F(\beta) = F(\alpha+\beta).$$

Durch successive Anwendung dieser Relation erhält man aber leicht

$$13)\quad F(\alpha).F(\beta).F(\gamma)\ldots F(\mu) = F(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu).$$

Wenn $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\mu$ gesetzt und die Anzahl dieser ssen durch n bezeichnet wird, so erhält man die für jedes sitive ganze n geltende Relation

$$14)\quad \{F(\alpha)\}^n = F(n\alpha).$$

Setzt man in der Gleichung 12) die Grösse $\beta = -\alpha$, also $+\beta = 0$, so erhält man

$$15)\quad F(\alpha).F(-\alpha) = F(0),$$

folglich, weil nach dem Obigen offenbar $F(0)=1$ ist:

$$16)\quad F(\alpha).F(-\alpha) = 1$$

r

$$17)\quad F(-\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)} = \{F(\alpha)\}^{-1}.$$

Ist nun α eine positive ganze Zahl, so ist nach 3)

$$F(\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha,$$

folglich nach 17)

$$18)\quad F(-\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{-\alpha}.$$

Ist ferner $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, wo λ eine positive oder negative, μ eine po- n ganze Zahl sein soll, so ist nach 14)

$$\{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^\mu = F(\mu\tfrac{\lambda}{\mu}) = F(\lambda),$$

lglich nach 3) und 18):

$$19)\quad \{F(\frac{\lambda}{\mu})\}^{\mu}=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\lambda}.$$

Setzen wir jetzt wieder

$$1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

wo ϱ eine positive Grösse ist, so haben wir zur Bestimmung v ϱ und φ wie oben die beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi=1+x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi=x\sin\Theta;$$

aus denen auf gewöhnliche Weise

$$20)\quad \varrho=(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

folgt. Ferner erhält man aus diesen beiden Gleichungen dur Division

$$21)\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta},$$

also

$$22)\quad \varphi=\operatorname{Arc}\operatorname{tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}.$$

Weil jetzt nach der Voraussetzung x zwischen -1 und + liegt, und folglich offenbar

$$\cos\varphi=\frac{1+x\cos\Theta}{\varrho}$$

stets positiv ist, so werden wir den beiden obigen Gleichun auf die einfachste Weise genügen, wenn wir für φ den zwisc $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen nehmen, dessen Tangente Grösse

$$\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist. Dies vorausgesetzt, ist nach dem Vorgehenden

$$1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$=(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

und folglich nach 19):

$$23)\quad \{F(\frac{\lambda}{\mu})\}^{\mu}=(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi$$

oder nach dem Moivre'schen Satze:

$$24)\quad \{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^\mu = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\lambda\varphi+\sin\lambda\varphi\sqrt{-1}).$$

Also ist nach der Lehre von den imaginären Grössen (Archiv. Th. I. S. 302.), wenn k eine ganze Zahl bezeichnet:

$$25)\quad F(\tfrac{\lambda}{\mu}) =$$

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}+\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\sqrt{-1}),$$

wo es nun auf die Bestimmung von k ankommt.

Es erhellet aber leicht, dass k nicht von x abhängig sein kann. So lange nämlich x zwischen -1 und $+1$ liegt, und folglich die Reihe convergirt, ändert sich $F(\frac{\lambda}{\mu})$, und folglich auch

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}+\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\sqrt{-1}),$$

stetig, wenn x sich stetig ändert. Also muss sich offenbar auch

$$\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}$$

stetig ändern, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert. Da nun aber

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

sich stetig ändert, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert, so muss k offenbar entweder von x unabhängig sein, oder sich stetig ändern, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert. Letzteres ist aber, weil k eine ganze Zahl ist, nicht möglich, und k muss folglich von x unabhängig sein, wie behauptet wurde. Kann man also k für irgend einen besondern Werth von x bestimmen, so wird k im Allgemeinen bestimmt sein. Setzt man nun in der Gleichung 22) die Grösse $x=0$, so ist auch der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmende Bogen $\varphi=0$, und folglich nach 25)

$$1=\cos\frac{2k\pi}{\mu}+\sin\frac{2k\pi}{\mu}\sqrt{-1},$$

also

$$\cos\frac{2k\pi}{\mu}=1,\ \sin\frac{2k\pi}{\mu}=0.$$

Folglich ist offenbar, wenn k_1 eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{2k\pi}{\mu} = 2k_1\pi,$$

also nach 25)

$$F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}\left\{\cos\left(\frac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi\right)+\sin\left(\frac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi\right)\sqrt{-1}\right\}$$

und folglich, weil nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos\left(\frac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi\right) = \cos\frac{\lambda}{\mu}\varphi, \quad \sin\left(\frac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi\right) = \sin\frac{\lambda}{\mu}\varphi$$

ist:

$$26)\quad F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}\left(\cos\frac{\lambda}{\mu}\varphi+\sin\frac{\lambda}{\mu}\varphi\sqrt{-1}\right).$$

Fasst man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergi sich überhaupt Folgendes.

Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes x

$$\begin{aligned}
27)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}&(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1}) \\
= 1 &+ \alpha_1 x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ \alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ \alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ \alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

wo

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten e digen muss, jenachdem $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ posit $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ u $x\sin\Theta$ negativ, $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist. Sollt Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

verschwinden, so ist, wie aus dem Vorhergehenden von sell erhellet, die Summe

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$

jederzeit als verschwindend zu betrachten. Auch bemerken, dass in diesem Falle die Grösse

$$1+2x\cos\Theta+x^2=(1+x\cos\Theta)^2+x^2\sin\Theta^2$$

verschwindet.

Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x

$$\begin{aligned}
28)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}&(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})\\
&=1+\alpha_1 x\ (\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad+\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad+\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad+\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

wo

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Für jedes ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegende x divergirt in dem Falle, wenn α keine positive ganze Zahl ist, die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 28), und hat daher keine Summe.

Hieraus ergeben sich nun auch unmittelbar die beiden folgenden wichtigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
29)\quad &(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha\varphi\\
&=1+\alpha_1 x\cos\Theta+\alpha_2 x^2\cos 2\Theta+\alpha_3 x^3\cos 3\Theta+\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
30)\quad &(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha\varphi\\
&=\alpha_1 x\sin\Theta+\alpha_2 x^2\sin 2\Theta+\alpha_3 x^3\sin 3\Theta+\ldots;
\end{aligned}$$

für jedes x, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Im ersten Falle ist

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

und muss sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen, jenachdem $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ negativ, $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist. Im zweiten

$$\varphi = \text{Arctang}\,\frac{x \sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

und muss immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

§. 4.

Die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

kann nun leicht summirt werden.

Zu dem Ende setze man

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$

so erhält man

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\Theta = \frac{a}{\varrho},\ \sin\Theta = \frac{b}{\varrho};$$

und die gegebene Reihe wird:

$$\begin{array}{l} 1, \\ \alpha_1\,\varrho\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}), \\ \alpha_2\,\varrho^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}). \\ \alpha_3\,\varrho^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}), \\ \alpha_4\,\varrho^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}), \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Die Summe dieser letzteren Reihe ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$(1 + 2\varrho\cos\Theta + \varrho^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1}),$$

wo

$$\varphi = \text{Arctang}\,\frac{\varrho\sin\Theta}{1+\varrho\cos\Theta} = \text{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

ist, für jedes positive $\varrho = \sqrt{a^2+b^2}$, d. i. für jedes a und b, we[nn] α eine positive ganze Zahl ist, und für $\varrho < 1$, d. i. für $\sqrt{a^2+b^2} < 1$ wenn α keine positive ganze Zahl ist. Im ersten Falle, w[enn] nämlich α eine positive ganze Zahl ist, muss der Bogen φ [ge]nommen werden, dass er sich im ersten, zweiten, dritt[en] Quadranten endigt, jenachdem $1+a$ positiv und [b] negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b n[egativ]

und b negativ ist. Im zweiten Falle, wenn nämlich α keine positive ganze Zahl ist, hat man den Bogen φ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen.

Weil nun

$$1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2 = 1+2a+a^2+b^2 = (1+a)^2+b^2$$

ist, so ist

$$31)\quad \{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}).\sqrt{-1}\}$$
$$= 1 + \alpha_1(a+b\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

für jedes a und b, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für $\sqrt{a^2+b^2}<1$, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Für $\sqrt{a^2+b^2}>1$ ist die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach dem Obigen offenbar divergent, wenn α keine positive ganze Zahl ist.

Der Bogen

$$\operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}$$

muss, wenn α eine positive ganze Zahl ist, sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen, jenachdem $1+a$ positiv und b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b negativ, $1+a$ positiv und b negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

verschwinden, so hat man nach dem Vorhergehenden die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

als verschwindend zu betrachten. Auch hat man zu bemerken, dass in diesem Falle die Grösse $(1+a)^2+b^2$ verschwindet.

Wir wollen nun den Fall, wenn $b=0$ ist, noch besonders betrachten.

Zuerst sei α eine positive ganze Zahl.

[illegible] $1+a$ positiv ist, so muss sich nach dem Vorherge- [illegible] $b=0$ sowohl als positiv, als auch als negativ

betrachten kann, $\operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a}$ im ersten oder im vierten Quadranten endigen, welche zwei Fälle unter der gemachten Voraussetzung offenbar in der Gleichung

$$\operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a} = 2k\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, die auch Null sein kann, zusammengefasst werden können. Also ist

$$\cos(\alpha \operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a}) = \cos 2\alpha k\pi = +1,$$

$$\sin(\alpha \operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a}) = \sin 2\alpha k\pi = 0;$$

und folglich nach 31)

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \ldots.$$

Weil aber nach dem Obigen die Quadratwurzel

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

natürlich immer positiv genommen werden muss, und nach der Voraussetzung $1+a$ positiv ist, so ist offenbar

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = (1+a)^\alpha,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(1+a)^\alpha = 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \ldots.$$

Wenn $1+a$ negativ ist, so muss sich nach dem Vorhergehenden, da man $b=0$ sowohl als positiv, als auch als negativ betrachten kann, $\operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a}$ im zweiten oder dritten Quadranten endigen, welche zwei Fälle unter der gemachten Voraussetzung offenbar in der Gleichung

$$\operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a} = (2k+1)\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, die auch Null sein kann, zusammengefasst werden können. Also ist

$$\cos(\alpha \operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a}) = \cos \alpha(2k+1)\pi = \pm 1,$$

$$\sin(\alpha \operatorname{Arc tang} \frac{b}{1+a}) = \sin \alpha(2k+1)\pi = 0;$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem α eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Folglich ist nach 31) immer mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens:

$$\pm\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots,$$

wo die Quadratwurzel

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

nach dem Obigen bekanntlich immer positiv genommen werden muss. Hält man aber dies und die vorher wegen des Zeichens gegebene Beslimmung fest, so wird leicht erhellen, dass allgemein

$$\pm\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = (1+a)^\alpha,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch in diesem Falle wieder

$$(1+a)^\alpha = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots$$

ist.

Wenn also α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a:

$$(1+a)^\alpha = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots$$

Wenn α keine positive ganze Zahl und a zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten ist, so muss man nach dem Vorhergehenden $\text{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen, woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle immer

$$\text{Arctang}\,\frac{b}{1+a} = 0$$

gesetzt werden muss, und daher nach 31)

$$(1+a)^\alpha = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots$$

ist, wenn man nur beachtet, dass im vorliegenden Falle nach dem Obigen offenbar $(1+a)^\alpha$ immer positiv zu nehmen ist.

Wenn α keine positive ganze Zahl ist und a ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist nach dem Obigen die Reihe

$$1,\ \alpha_1 a,\ \alpha_2 a^2,\ \alpha_3 a^3,\ \alpha_4 a^4,\ \ldots$$

offenbar divergent.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich Folgendes.

Es ist

$$32)\quad (1+a)^\alpha = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots$$

für jedes a, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und zwischen -1 und $+1$ liegende a, wenn α keine positi Zahl ist, unter der Bedingung, dass man in diesem letzte $(1+a)^\alpha$ immer positiv nimmt. Wenn α keine positive ga ist und a ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt, s Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichen obigen Gleichung divergent.

§. 5.

Im vorhergehenden Paragraphen sind in dem Falle keine positive ganze Zahl ist, bloss die beiden Fälle, w

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1 \text{ und } \sqrt{a^2+b^2} > 1$$

ist, betrachtet worden, so dass uns also jetzt noch die tung des Falls, wenn

$$\sqrt{a^2+b^2} = 1$$

ist, obliegt, wobei wir die drei folgenden Fälle unter werden:

$$-\infty < \alpha \leqq -1,$$
$$-1 < \alpha < 0,$$
$$0 < \alpha < +\infty.$$

1. Es sei

$$-\infty < \alpha \leqq -1.$$

In diesem Falle kann

$$\alpha = -1 - \delta,$$

wo $\delta \geqq 0$ ist, gesetzt werden.

Durch diese Substitution erhält man

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha - n}{n+1} = -\alpha_n \cdot \frac{\delta + n + 1}{n+1}.$$

Weil nun natürlich n nur eine positive ganze Zahl sei und folglich für jedes n

$$\frac{\delta + n + 1}{n+1} \geqq 1$$

ist, so ergiebt sich hieraus, dass der absolute Werth entweder für jedes n der Einheit gleich ist, oder fortu

mit n zugleich wächst, woraus unmittelbar hervorgeht, dass in diesem Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots.$$

divergent ist. Weil aber

$$(\alpha_n)^2 = (\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

ist, so ist auch der Werth von

$$(\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

entweder für jedes n der Einheit gleich, oder wächst fortwährend zugleich mit n. Sollten nun die Reihen

$$1,\ \alpha_1 \cos\Theta,\ \alpha_2 \cos 2\Theta,\ \alpha_3 \cos 3\Theta,\ \alpha_4 \cos 4\Theta, \ldots\ldots;$$
$$\alpha_1 \sin\Theta,\ \alpha_2 \sin 2\Theta,\ \alpha_3 \sin 3\Theta,\ \alpha_4 \sin 4\Theta,\ \ldots\ldots$$

beide convergent sein; so müsste sich jedenfalls, wenn n wächst, sowohl der absolute Werth von $\alpha_n \cos n\Theta$, als auch der absolute Werth von $\alpha_n \sin n\Theta$, der Null nähern, und müsste derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Also müsste sich offenbar auch

$$(\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

der Null nähern, wenn n wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Da dies mit dem Obigen in offenbarem Widerspruch steht, so können in diesem Falle die Reihen

$$1,\ \alpha_1 \cos\Theta,\ \alpha_2 \cos 2\Theta,\ \alpha_3 \cos 3\Theta,\ \alpha_4 \cos 4\Theta,\ \ldots\ldots$$
$$\alpha_1 \sin\Theta,\ \alpha_2 \sin 2\Theta,\ \alpha_3 \sin 3\Theta,\ \alpha_4 \sin 4\Theta,\ \ldots.$$

nie beide convergent sein, und es muss folglich immer mindestens eine derselben divergiren, woraus sich nach dem bekannten Begriffe der Divergenz imaginärer Reihen unmittelbar ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Reihe

$$\begin{array}{l}
1, \\
\alpha_1 (\cos\Theta + \sin\Theta \sqrt{-1}), \\
\alpha_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta \sqrt{-1}), \\
\alpha_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta \sqrt{-1}), \\
\alpha_4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta \sqrt{-1}), \\
\text{u. s. w.}
\end{array}$$

jederzeit divergent ist. Weil nun aber, wenn wir wie im vorhergehenden Paragraphen

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

setzen, wegen der gemachten Voraussetzung

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

ist, so kann die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

offenbar immer auf die Form der obigen Reihe gebracht werden, woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

jederzeit divergent ist.

II. Es sei

$$0 < \alpha < +\infty.$$

Man setze der Kürze wegen $\alpha + 1 = \varepsilon$, und nehme $n > \varepsilon$, so ist

$$n > 1,\ \frac{1}{n} < 1$$

und folglich nach 32)

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^{-\varepsilon} = 1 &- \frac{\varepsilon}{1} \cdot \frac{1}{n}\\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2}\\ &- \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{n^3}\\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{n^4}\\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^{-\varepsilon} = 1 &- \frac{\varepsilon}{n}\\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\left\{1-\frac{\varepsilon+2}{3n}\right\} \cdot \frac{1}{n^2}\\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\left\{1-\frac{\varepsilon+4}{5n}\right\} \cdot \frac{1}{n^4}\\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)(\varepsilon+4)(\varepsilon+5)}{1.2.3.4.5.6}\left\{1-\frac{\varepsilon+6}{7n}\right\} \cdot \frac{1}{n^6}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Weil nun, wenn k eine positive ganze Zahl bezeichnet, da nach der Voraussetzung $n > \varepsilon$ ist,

$$n + kn > \varepsilon + k, \text{ d. i. } (k+1)n > \varepsilon + k$$

ist, so ist

$$\frac{\varepsilon + k}{(k+1)n} < 1,$$

und folglich

$$1 - \frac{\varepsilon + k}{(k+1)n} > 0.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar

$$(1 + \frac{1}{n})^{-\varepsilon} > 1 - \frac{\varepsilon}{n},$$

d. i.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha-1} > \frac{n - \alpha - 1}{n},$$

und folglich

$$-\frac{\alpha - n + 1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Also ist, wenn die positive ganze Zahl $i > \varepsilon$ ist,

$$-\frac{\alpha - i - n + 1}{i + n} < \left(\frac{i + n}{i + n + 1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$ Setzt man nun nach und nach

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n;$$

so erhält man:

$$-\frac{\alpha - i}{i + 1} < \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha - i - 1}{i + 2} < \left(\frac{i+2}{i+3}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha - i - 2}{i + 3} < \left(\frac{i+3}{i+4}\right)^{\alpha+1},$$

u. s. w.

$$-\frac{\alpha - i - n + 2}{i + n - 1} < \left(\frac{i + n - 1}{i + n}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha - i - n + 1}{i + n} < \left(\frac{i + n}{i + n + 1}\right)^{\alpha+1};$$

und folglich durch Multiplication auf beiden Seiten der Zeich wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die Grössen auf linken Seite eben so wie die Grössen auf der rechten Seite säm lich positiv sind:

$$(-1)^n \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)\ldots(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n)} < \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Nach der Theorie der Binomial-Coefficienten ist nun, leicht erhellet:

$$\alpha_{i+n} = \alpha_i \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)\ldots(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n)},$$

und folglich, wenn überhaupt der absolute Werth von α_n (α_n) bezeichnet wird:

$$(\alpha_{i+n}) = (\alpha_i) \cdot (-1)^n \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)\ldots(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n)}.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n > 0$. Hieraus ergiebt sich:

$$(\alpha_i) = (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+1}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+1}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+2}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+3}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+3}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+4}\right)^{\alpha+1},$$

u. s. w.

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt und der wegen wieder ε für $\alpha+1$ schreibt:

$$33) \quad (\alpha_i) + (\alpha_{i+1}) + (\alpha_{i+2}) + (\alpha_{i+3}) + \ldots + (\alpha_{i+n})$$
$$< (\alpha_i) \cdot (i+1)^{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{(i+1)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+2)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+3)^{\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{(i+n+1)^{\varepsilon}} \right\}$$

Weil nach dem Obigen $i > 1$ ist, so ist

$$i+n+1 > 1, \quad \frac{1}{i+n+1} < 1$$

0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., und folglich nach 32):

$$(1-\frac{1}{i+n+1})^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{1}{i+n+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{(i+n+1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(i+n+1)^3} + \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{-\alpha} > 1+\frac{\alpha}{i+n+1}$$

$$\left(\frac{i+n+1}{i+n}\right)^{\alpha} > 1+\frac{\alpha}{i+n+1},$$

lich

$$\frac{1}{\alpha(i+n)^\alpha} > \frac{1}{\alpha(i+n+1)^\alpha} + \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n)^\alpha} - \frac{1}{(i+n+1)^\alpha}\right\}.$$

ist, wenn man

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$$

$$\frac{1}{(i+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{i^\alpha} - \frac{1}{(i+1)^\alpha}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+2)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+1)^\alpha} - \frac{1}{(i+2)^\alpha}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+3)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+2)^\alpha} - \frac{1}{(i+3)^\alpha}\right\},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(i+n)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n-1)^\alpha} - \frac{1}{(i+n)^\alpha}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n)^\alpha} - \frac{1}{(i+n+1)^\alpha}\right\};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt und der Kürze wegen wieder ε für $\alpha+1$ schreibt:

$$\frac{1}{(i+1)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+2)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+3)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon}$$
$$<\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{i^\alpha}-\frac{1}{(i+n+1)^\alpha}\right\},$$

also um so mehr:

$$34)\quad \frac{1}{(i+1)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+2)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+3)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon}<\frac{1}{\alpha i^\alpha}.$$

Hieraus und aus 33) ergiebt sich nun unmittelbar

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})<(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha},$$

so dass also, wie gross auch n werden mag, die Summe

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})$$

doch immer kleiner als die von n ganz unabhängige positive Grösse

$$(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha}$$

bleibt. Da nun die Summe

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})$$

fortwährend wächst, wenn n wächst, so muss es offenbar eine bestimmte Grösse geben, welcher sich diese Summe bei wachsendem n immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, und diese Grösse ist augenscheinlich entweder die Grösse

$$(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha}$$

selbst oder kleiner als diese letztere Grösse, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Reihe

$$(\alpha_i),\ (\alpha_{i+1}),\ (\alpha_{i+2}),\ (\alpha_{i+3}),\ \ldots.,$$

und folglich natürlich auch die Reihe

$$1,\ (\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_4),\ (\alpha_5),\ \ldots.$$

eine Summe hat, also convergirt. Folglich sind nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen auch die beiden Reihen

$$1, (\alpha_1)(\cos\Theta), (\alpha_2)(\cos 2\Theta), (\alpha_3)(\cos 3\Theta), (\alpha_4)(\cos 4\Theta), \ldots;$$
$$(\alpha_1)(\sin\Theta), (\alpha_2)(\sin 2\Theta), (\alpha_3)(\sin 3\Theta), (\alpha_4)(\sin 4\Theta), \ldots;$$

wo

$$(\cos\Theta), (\cos 2\Theta), (\cos 3\Theta), (\cos 4\Theta), \ldots;$$
$$(\sin\Theta), (\sin 2\Theta), (\sin 3\Theta), (\sin 4\Theta), \ldots$$

die absoluten Werthe von

$$\cos\Theta, \cos 2\Theta, \cos 3\Theta, \cos 4\Theta, \ldots;$$
$$\sin\Theta, \sin 2\Theta, \sin 3\Theta, \sin 4\Theta, \ldots$$

bezeichnen, convergent, woraus sich ferner gleichfalls nach bekannten Sätzen aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen ergiebt, dass auch die Reihen

$$1, \alpha_1\cos\Theta, \alpha_2\cos 2\Theta, \alpha_3\cos 3\Theta, \alpha_4\cos 4\Theta, \ldots.;$$
$$\alpha_1\sin\Theta, \alpha_2\sin 2\Theta, \alpha_3\sin 3\Theta, \alpha_4\sin 4\Theta, \ldots.;$$

und daher auch die Reihe

$$\begin{aligned}
&1,\\
&\alpha_1(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$1, \alpha_1(a+b\sqrt{-1}), \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2, \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3, \ldots.$$

convergent sind.

III. Es sei nun endlich

$$-1 < \alpha < 0.$$

Da $\alpha+1>0$ ist, so ist ganz wie im vorigen Falle, wenn $i > \alpha+1$ ist,

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i)\cdot\left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n>0$, woraus man sieht, dass (α_{i+n}) sich, wenn n wächst, der Null fortwährend nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$f(\alpha, n) = 1 + \alpha_1 (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) + \ldots + \alpha_n (\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}),$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten mit

$$1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}$$

multiplicirt, nach einem bekannten Satze von den imaginären Grössen

$$\begin{aligned}
&(1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) f(\alpha, n) \\
= &\ 1 \\
&+ (1 + \alpha_1)(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ (\alpha_1 + \alpha_2)(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ (\alpha_2 + \alpha_3)(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
&\ldots\ldots \\
&+ (\alpha_{n-1} + \alpha_n)(\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}) \\
&\qquad + \alpha_n (\cos (n+1)\Theta + \sin (n+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

d. i. nach einem sehr bekannten Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$\begin{aligned}
&(1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) f(\alpha, n) \\
= &\ 1 \\
&+ (\alpha + 1)_1 (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ (\alpha + 1)_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
&+ (\alpha + 1)_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
&\ldots\ldots \\
&+ (\alpha + 1)_n (\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}) \\
&\qquad + \alpha_n (\cos (n+1)\Theta + \sin (n+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&(1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) f(\alpha, n) \\
&= f(\alpha+1, n) + \alpha_n (\cos (n+1)\Theta + \sin (n+1)\Theta\sqrt{-1}).
\end{aligned}$$

Weil $\alpha+1>0$ ist, so nähert sich $f(\alpha+1, n)$ nach II., wenn n wächst, einer gewissen bestimmten Gränze, die wir durch S bezeichnen wollen, bis zu jedem beliebigen Grade. Ferner nähert sich nach dem Vorhergehenden offenbar α_n der Null, wenn n wächst, bis zu jedem beliebigen Grade. Folglich nähert sich offenbar auch

$$\alpha_n(\cos(n+1)\Theta+\sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),$$

wenn n wächst, der Null bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich

$$(1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})f(\alpha, n)$$

der Gränze S bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n wächst. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn nicht

$$1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}=0$$

ist, $f(\alpha, n)$ sich der Gränze

$$\frac{S}{1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n wächst, also die Reihe

$$\begin{gathered}1,\\ \alpha_1(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),\\ \alpha_2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),\\ \alpha_3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\ \alpha_4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\ \text{u. s. w.}\end{gathered}$$

convergent ist. Folglich convergirt, wenn nicht

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, auch die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3, \ldots$$

Wenn

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist $1+a=0$, also $a=-1$, und $b=0$. Daher geht in diesem Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3, \ldots$$

in die Reihe

$$1,\ -\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

über. Setzen wir nun, da α negativ ist, $\alpha = -\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ ist, so erhält die Reihe

$$1,\ -\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

die Form

$$1,\ \frac{\varepsilon}{1},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4},\ \ldots.$$

Da $\varepsilon > 0$ ist, so sind die Glieder der Reihe

$$\frac{\varepsilon+1}{1.2},\ \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3},\ \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4},\ \ldots.$$

grösser als die gleichstelligen Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2},\ \frac{1.2}{1.2.3},\ \frac{1.2.3}{1.2.3.4},\ \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4.5},\ \ldots.,$$

d. i. grösser als die gleichstelligen Glieder der Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots.;$$

und da nun diese Reihe bekanntlich eine divergente Reihe ist, so ist um so mehr die Reihe

$$\frac{\varepsilon+1}{1.2},\ \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3},\ \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4},\ \ldots.;$$

also auch die Reihe

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4},\ \ldots.;$$

und folglich auch die Reihe

$$1,\ \frac{\varepsilon}{1},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3},\ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4},\ \ldots.;$$

d. i. die Reihe

$$1,\ -\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

divergent. Wenn also

$$1 + a + b\sqrt{-1} = 0$$

ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

divergent.

Der vorhergehende Beweis zeigt, dass die Reihe

$$1,\ -\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

überhaupt jederzeit divergirt, wenn α negativ ist.

Für $-1<x<+1$ ist nun bekanntlich nach §. 3.

$$\begin{aligned}(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta})\sqrt{-1}\}\\ = 1\\ +\alpha_1 x\ (\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wo

$$\mathrm{Arc\ tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Also ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen

$$\begin{aligned}35)\quad \{2(1+\cos\Theta)\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta})\sqrt{-1}\}\\ = 1\\ +\alpha_1\ (\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_2\ (\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_3\ (\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_4\ (\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wo

$$\mathrm{Arc\ tang}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, in allen den Fällen, wo die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt.

Für $\varrho = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ ist $\cos\Theta = a$ und $\sin\Theta = b$; folglich nach 35):

$$36) \quad \{2(1+a)\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

$$\begin{aligned} = \; & 1 \\ & + \alpha_1 (a+b\sqrt{-1}) \\ & + \alpha_2 (a+b\sqrt{-1})^2 \\ & + \alpha_3 (a+b\sqrt{-1})^3 \\ & + \alpha_4 (a+b\sqrt{-1})^4 \\ & + \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo

$$\operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, in allen den Fällen, wo die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt.

§. 6.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich überhaupt das folgende für die gesammte Analysis in jeder Beziehung höchst wichtige Theorem.

Binomialtheorem.

A. **Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a und b**

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

$$\begin{aligned} = 1 & + \alpha_1 (a+b\sqrt{-1}) \\ & + \alpha_2 (a+b\sqrt{-1})^2 \\ & + \alpha_3 (a+b\sqrt{-1})^3 \\ & + \alpha_4 (a+b\sqrt{-1})^4 \\ & + \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo

$$\operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}$$

sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, jenachdem $1+a$ positiv und b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b negativ, $1+a$ positiv und b negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

beide verschwinden, so würde man die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

selbst als verschwindend zu betrachten haben, und hat auch zu bemerken, dass in diesem Falle $\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$ verschwindet.

B. Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so muss man die folgenden Fälle unterscheiden.

I. $\sqrt{a^2+b^2}<1.$

In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}\\ = 1 + \alpha_1(a+b\sqrt{-1})\\ + \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2\\ + \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3\\ + \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4\\ + \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

und der Bogen

$$\operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}$$

muss immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

II. $\sqrt{a^2+b^2}=1.$

1. Wenn $-\infty<\alpha\leqq-1$ ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $-1<\alpha<0$ und nicht

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

$$\begin{aligned}= 1 &+ \alpha_1(a+b\sqrt{-1})\\ &+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2\\ &+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3\\ &+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4\\ &+ \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

und der Bogen

$$\operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}$$

muss immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

Wenn $-1<\alpha<0$ und

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

3. Wenn $0<\alpha<\infty$ ist, so ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

$$\begin{aligned}= 1 &+ \alpha_1(a+b\sqrt{-1})\\ &+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2\\ &+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3\\ &+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4\\ &+ \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

und der Bogen

$$\operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a}$$

muss zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

beide verschwinden und also $\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}=0$ sein, so erhellet aus dem Obigen leicht, dass dann die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha \operatorname{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

selbst als verschwindend zu betrachten ist.

III. $\sqrt{a^2+b^2}>1$.

In diesem Falle ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

Auf diese Weise muss nach meiner Ansicht das Binomialtheorem oder der Binomische Lehrsatz im Geiste der neueren, vor der älteren sich jedenfalls durch wahre, an die in der Geometrie von den Griechen uns hinterlassenen trefflichen bis jetzt unübertroffenen Muster lebhaft erinnernde *) mathematische Strenge und Evidenz auf das vortheilhafteste auszeichnenden Analysis ausgesprochen werden, und nur innerhalb der durch das Obige von selbst gesteckten Gränzen darf man dieses wichtige Theorem an-

*) Weshalb ich denn auch fortwährend die feste Ueberzeugung habe, dass es namentlich auch für das Studium der neueren Analysis keine bessere Vorbereitung giebt, als das Studium der Geometrie ganz in der strengen Weise der Griechen, und es durchaus nicht billigen kann, wenn man bei dem geometrischen Unterrichte auf höheren Lehranstalten, die zunächst und vorzugsweise eine formelle geistige Bildung ihrer Schüler bezwecken, diesen Weg zuweilen auf ziemlich leichtsinnige Weise verlässt. Für das gesammte weitere mathematische Studium ist diese strenge Beschäftigung mit der Geometrie von einem ganz unberechenbarem Werthe, wie nur die gehörig zu beurtheilen und zu würdigen im Stande sind, welche die Mathematik in ihrem ganzen Umfange, und insbesondere auch die strenge Begründung kennen, welche der Analysis durch die Bemühungen einiger neueren Mathematiker zu Theil geworden ist, wodurch freilich sehr Vieles, was man früher für in grosser Allgemeinheit gültig hielt, über den Haufen geworfen und in seine gehörigen Schranken zurückgewiesen worden ist. Möchten nur erst alle Theile der Analysis sich einer so strengen und gesunden Ansichten über diese Dinge völlig entsprechenden Behandlungsweise erfreuen, wie sie jetzt vorzugsweise einigen zu Theil geworden ist! Denn dass noch Vieles zu thun übrig ist, werden die am wenigsten in Abrede zu stellen geneigt sein, welche sich vorzugsweise bei dieser neueren Bearbeitung der Analysis betheiligt haben. Ob es übrigens nicht einen gewissen Mittelweg zwischen der älteren und neueren Behandlungsweise giebt, der am besten zum Ziele führen dürfte, worauf schon bei einigen Gelegenheiten von mir hingewiesen worden ist: darüber lässt sich jetzt noch nichts mit nur einiger Bestimmtheit sagen, und die Acten über alle diese Dinge dürfen bis jetzt gewiss noch keineswegs als geschlossen betrachtet werden.

wenden, wenn man sich vor Fehlschlüssen sichern und nicht zu ungereimten Resultaten führen lassen will, was an Beispielen noch besonders nachzuweisen unnütze Weitläufigkeit sein würde, da sich dergleichen Beispiele einem Jeden leicht von selbst darbieten werden. Bemerken will ich nur ganz im Allgemeinen, dass es gar nicht schwer hält, durch die unerlaubte, d. h. nicht in den gehörigen Gränzen eingeschlossene Anwendung des Binomischen Lehrsatzes zu Gleichungen zu gelangen, in denen eine positive Grösse einer negativen Grösse, oder eine reelle einer imaginären Grösse gleich gesetzt ist, und dass es überhaupt ausserordentlich leicht ist, sich auf diesem Wege zu jeder nur denkbaren mathematischen Ungereimtheit führen zu lassen, deren Grund in etwas Anderem als in der unerlaubten Anwendung des Satzes zu suchen, oder wie man wohl hin und wieder sagen hört, auf andere Weise erklären zu wollen, völlig unnützes und fruchtloses Bemühen ist.

Den Fall, wenn $b=0$ ist, wollen wir nun noch besonders in Betrachtung ziehen.

A. Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a

$$(1+a)^\alpha = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

B. Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so muss man die folgenden Fälle unterscheiden.

I. $-1 < a < +1$.

In diesem Falle ist

$$(1+a)^\alpha = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots,$$

wenn man nur berücksichtigt, dass $(1+a)^\alpha$ immer positiv zu nehmen ist.

II. $a=-1$.

1. Wenn $-\infty < \alpha < 0$ ist, so ist die Reihe

$$1,\ -\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $\alpha > 0$ ist, so ist

$$0 = 1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\ldots.$$

III. $a=+1$.

1. Wenn $-\infty < \alpha \overline{\overline{<}} -1$ ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

divergent und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $\alpha > -1$ ist, so ist

$$2^a = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots,$$

wobei 2^a immer positiv zu nehmen ist.

IV. $a^2 > 1$.

In diesem Falle, wo der absolute Werth von a grösser als die Einheit ist, divergirt die Reihe

$$1,\ \alpha_1 a,\ \alpha_2 a^2,\ \alpha_3 a^3,\ \alpha_4 a^4,\ \ldots,$$

und hat folglich keine Summe.

Aus den im Obigen bewiesenen Sätzen lassen sich nun verschiedene wichtige Folgerungen herleiten, wie jetzt in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§. 7.

Zuerst wollen wir uns mit der Summirung der merkwürdigen und wichtigen Reihe

$$\begin{gathered}
1, \\
\frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}), \\
\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}), \\
\frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}), \\
\frac{x^4}{1\ldots 4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}), \\
\text{u. s. w.}
\end{gathered}$$

beschäftigen.

Aus 28) ergiebt sich, wenn $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ und εx für x gesetzt wird, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
37)\quad & (1 + 2\varepsilon x\cos\Theta + \varepsilon^2 x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon} + \sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1}) \\
= \quad & 1 \\
& + \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \frac{x^2}{2}(1-\varepsilon)(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \frac{x^3}{3}(1-\varepsilon)(\frac{1}{2}-\varepsilon)(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \frac{x^4}{4}(1-\varepsilon)(\frac{1}{2}-\varepsilon)(\frac{1}{3}-\varepsilon)(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

für jedes zwischen

$$-\frac{1}{\varepsilon} \text{ und } +\frac{1}{\varepsilon}$$

liegende x, wobei bekanntlich

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tang} \frac{\varepsilon x \sin\Theta}{1+\varepsilon x \cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss. Lässt man nun den absoluten Werth von ε sich der Null nähern, und bezeichnet die Gränze, welcher sich unter dieser Voraussetzung die Grösse

$$(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})$$

nähert, insofern es eine solche Gränze giebt, was nachher besonders untersucht werden wird, durch

$$\operatorname{Lim}\{(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})\},$$

so erhält man aus der Gleichung 37), wenn man auf beiden Seiten derselben die Gränzen nimmt, die Gleichung:

$$38) \quad \operatorname{Lim}\{(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})\}$$

$$\begin{aligned}
= \;& 1 \\
+ \;& \frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) \\
+ \;& \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
+ \;& \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
+ \;& \frac{x^4}{1\ldots4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\
+ \;& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

für jedes zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegende x, wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der Grösse

$$\operatorname{Lim}\{(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})\}$$

ankommt.

Zu dem Ende setze man

$$2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2=\Delta,$$

so ist

$$\frac{1}{2\varepsilon}=\frac{1}{\Delta}(x\cos\Theta+\frac{\varepsilon x^2}{2}),$$

und folglich

$$(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}=\{(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta+\frac{\varepsilon x^2}{2}}.$$

Weil ferner

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\varepsilon x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

ist, so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varepsilon}=\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta},\quad \frac{\varphi}{\varepsilon}=\frac{\varphi}{\operatorname{tang}\varphi}\cdot\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

oder

$$\frac{\varphi}{\varepsilon}=\frac{\cos\varphi}{\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}\cdot\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}.$$

Wenn nun ε sich der Null nähert, so nähern sich offenbar auch Δ und φ, welches letztere bekanntlich zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, der Null, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt. Also nähert sich $\cos\varphi$ der Einheit, wenn ε sich der Null nähert, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt, woraus sich nach dem Obigen

$$\operatorname{Lim}\frac{\varphi}{\varepsilon}=\frac{x\sin\Theta}{\operatorname{Lim}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}$$

ergiebt. Weil φ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so haben

$$\sin\varphi,\ \varphi,\ \operatorname{tang}\varphi$$

gleiche Vorzeichen, und rücksichtlich der absoluten Werthe ist

$$\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tang}\varphi.$$

Also ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}>\frac{\sin\varphi}{\varphi}>\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tang}\varphi},$$

d. i.

$$1>\frac{\sin\varphi}{\varphi}>\cos\varphi,$$

so dass also $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ zwischen 1 und $\cos\varphi$ liegt. Weil sich nun $\cos\varphi$ der Einheit nähert, wenn φ sich der Null nähert, und der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur φ nahe genug bei Null annimmt, so nähert sich offenbar um so mehr auch $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ der Einheit, wenn φ sich der Null nähert, und kann der Einheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur φ nahe genug bei Null annimmt. Also ist

$$\text{Lim}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = 1,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\text{Lim}\,\frac{\varphi}{\varepsilon} = x\sin\Theta.$$

Weil nun ferner nach dem Obigen offenbar

$$\text{Lim}.(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = \{\text{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta}$$

ist, so ergiebt sich aus der Gleichung 38) augenscheinlich die Gleichung

$$39)\quad \{\text{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta}\{\cos(x\sin\Theta)+\sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\}$$
$$\begin{aligned} = &\; 1 \\ &+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+\frac{x^2}{1.2}(\cos2\Theta+\sin2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+\frac{x^3}{1.2.3}(\cos3\Theta+\sin3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+\frac{x^4}{1\ldots4}(\cos4\Theta+\sin4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wobei man zu beachten hat, dass

$$\text{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

die Gränze bezeichnet, welcher

$$(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man Δ sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern lässt.

Setzt man in der vorstehenden Gleichung $\Theta=0$, so erhält man

$$\{\mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1...4}+\ldots,$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, und folglich für $x=1$:

$$40)\quad \mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1...4}+\ldots.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$41)\quad e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1...4}+\ldots,$$

so ist

$$42)\quad \mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e,$$

und folglich nach 39):

$$43)\quad e^{x\cos\Theta}\{\cos(x\sin\Theta)+\sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\}$$
$$= 1+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^4}{1...4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wodurch also die Summe der zu summirenden Reihe gefunden ist.

Für $\Theta=0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung:

$$44)\quad e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1...4}+\ldots.$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Vergleicht man die reellen und imaginären Theile der Gleichung 43) mit einander, so erhält man die beiden folgenden für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ geltenden Gleichungen:

$$45)\quad e^{x\cos\Theta}\cos(x\sin\Theta)$$
$$= 1+\frac{x}{1}\cos\Theta+\frac{x^2}{1.2}\cos 2\Theta+\frac{x^3}{1.2.3}\cos 3\Theta+\frac{x^4}{1...4}\cos 4\Theta+\ldots.$$

und

$$46)\quad e^{x\cos\Theta}\sin(x\sin\Theta)$$
$$=\frac{x}{1}\sin\Theta+\frac{x^2}{1.2}\sin 2\Theta+\frac{x^3}{1.2.3}\sin 3\Theta+\frac{x^4}{1...4}\sin 4\Theta+\ldots.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\Theta=\frac{1}{2}\pi$, so erl man, weil

$$\cos\frac{1}{2}\pi=\ \ 0,\ \sin\frac{1}{2}\pi=+1;$$
$$\cos\frac{2}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{2}{2}\pi=\ \ 0;$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi=\ \ 0,\ \sin\frac{3}{2}\pi=-1;$$
$$\cos\frac{4}{2}\pi=+1,\ \sin\frac{4}{2}\pi=\ \ 0;$$
$$\cos\frac{5}{2}\pi=\ \ 0,\ \sin\frac{5}{2}\pi=+1;$$
$$\cos\frac{6}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{6}{2}\pi=\ \ 0;$$

u. s. w.

ist, die beiden folgenden höchst wichtigen und merkwürdig für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, d. h. für jedes reelle x g tenden Gleichungen:

$$47)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1...4}-\frac{x^6}{1...6}+\frac{x^8}{1...8}-\ldots.$$

und

$$48)\quad \sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1...5}-\frac{x^7}{1...7}+\frac{x^9}{1...9}-\ldots.$$

Wenn man

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$

und folglich

$$\varrho\cos\Theta=a,\ \varrho\sin\Theta=b$$

setzt, so ergiebt sich aus 43) auch, wenn man in dieser Gleichu was nach dem Obigen verstattet ist, $x=\varrho$ setzt, die für je reelle a und b geltende Gleichung:

$$49)\quad e^a(\cos b+\sin b\sqrt{-1}) = 1+\frac{a+b\sqrt{-1}}{1}$$
$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1.2}$$
$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}$$
$$+\ldots\ldots$$

§. 8.

Ferner wollen wir uns jetzt mit der Summirung der wichtigen Reihe

$$\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^5}{5}(\cos 5\Theta+\sin 5\Theta\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

beschäftigen.

Bezeichnen wir die Logarithmen, deren Basis die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Grösse e ist *), durch den Buchstaben l, so ist nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{1}{2}a} = e^{\frac{1}{2}a l(1+2x\cos\Theta+x^2)},$$

und folglich nach 28) für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x:

---

*) Welche auch natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt werden.

$$50)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\frac{\alpha}{1}x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$51)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\varphi = \operatorname{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Also ist nach 49), wenn man in der dortigen Gleichung, was verstattet ist, weil dieselbe für jedes reelle a und b gilt,

$$a=\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2),\quad b=\alpha\varphi$$

setzt:

$$1$$
$$+\alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & 1 \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}\frac{\alpha}{1} \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2\frac{\alpha^2}{1.2} \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3\frac{\alpha^3}{1.2.3} \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4\frac{\alpha^4}{1\ldots4} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder, wenn man die Einheit auf beiden Seiten abzieht und dann durch α dividirt:

$$
\begin{aligned}
& x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& -\frac{1}{2}(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& +\frac{1}{3}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& -\frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1} \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2\frac{\alpha^2}{1.2} \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3\frac{\alpha^3}{1.2.3} \\
& + \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4\frac{\alpha^4}{1\ldots4} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x.

Lässt man nun α sich der Null nähern, geht auf beiden Seiten der obigen Gleichungen zu den Gränzen über, und setzt zugleich für φ seinen obigen Werth, so erhält man die folgende merkwürdige für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x geltende Gleichung:

$$50)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$\begin{aligned}
= \; & 1\\
& + \frac{\alpha}{1}x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\
& + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
& + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
& + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder

$$51)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$\begin{aligned}
= \; & 1\\
& + \alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\
& - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}).\\
& + \frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
& - \frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Also ist nach 49), wenn man in der dortigen Gleichung, was verstattet ist, weil dieselbe für jedes reelle a und b gilt,

$$a = \frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2),\quad b = \alpha\varphi$$

setzt:

$$\begin{aligned}
& 1\\
& + \alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\
& - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
& + \frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
& - \frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$= 1$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}\frac{\alpha}{1}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4\frac{\alpha^4}{1\ldots4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

der, wenn man die Einheit auf beiden Seiten abzieht und dann urch α dividirt:

$$x(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}(1-\alpha)x^2(\cos 2\theta+\sin 2\theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\theta+\sin 3\theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\theta+\sin 4\theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4\frac{\alpha^4}{1\ldots4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ir jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x.

Lässt man nun α sich der Null nähern, geht auf beiden eiten der obigen Gleichungen zu den Gränzen über, und setzt ugleich für φ seinen obigen Werth, so erhält man die folgende nerkwürdige für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x geltende Gleichung:

$$57)\quad \operatorname{Arc\,tang} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots$$

in welcher $\operatorname{Arc\,tang} x$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Weil aber die Reihen

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \ldots\ldots$$

und

$$\pm 1,\ \mp\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{5},\ \mp\frac{1}{7},\ \pm\frac{1}{9},\ \ldots\ldots,$$

da in denselben die absoluten Werthe der Glieder fortwährend abnehmen und die Zeichen wechseln, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen convergiren, und $l2$ und $\operatorname{Arc\,tang}(\pm 1)$ endliche völlig bestimmte Grössen sind, so ist man nach einem andern bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen zu schliessen berechtigt, dass die Gleichung 56) auch noch für $x=1$, die Gleichung 57) auch noch für $x=\pm 1$ gilt, wodurch wir in Verbindung mit dem Obigen unter Anwendung einer gewiss durch sich selbst sogleich verständlichen Bezeichnung zu den beiden folgenden Gleichungen geführt werden:

$$58)\quad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$$
$$\{-1 < x = +1\}$$

und

$$59)\quad \operatorname{Arc\,tang} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots\ldots$$
$$\{-1 = x = +1\}$$

wo $\operatorname{Arc\,tang} x$ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Für $x=-1$ geht die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 58) in die Reihe

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \ldots\ldots$$

über, und da dies nach einem bekannten auch schon oben in §. 5. III. angewandten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen eine divergente Reihe ist, so ist ersichtlich, dass für $x=-1$ die Gleichung 58) ihre Gültigkeit verliert, worauf man auch schon durch die sogleich zu machende Bemerkung, dass $l(1-1) = l0$ keinen endlichen völlig bestimmten Werth mehr hat, hätte geführt werden können.

Für $x = 1$ erhält man aus der Gleichung 58):

$$60) \quad l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

und für denselben Werth von x ergiebt sich aus der Gleichung 59), in welcher bekanntlich Arctang x immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist:

$$61) \quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Indem ich diese Abhandlung hiermit schliesse, wiederhole ich die schon im Eingange gemachte Bemerkung, dass ich in derselben durchaus nicht die Absicht gehabt habe, bloss Neues zu geben. Vielmehr schliesst sich dieselbe an frühere bekannte Muster an, die ich hier wohl nicht erst noch besonders namhaft zu machen brauche. Ich bezwecke mit derselben hauptsächlich nur, eine zusammenhängende im Geiste der neueren Analysis durchgeführte Entwickelung aller derjenigen Reihen zu geben, welche gewissermassen als Elementar-Reihen zu betrachten sind, weil von denselben die meisten übrigen Untersuchungen über die Reihen und die Functionen ihren Auslauf nehmen müssen, so wie denn auch auf denselben lediglich die Construction der Tafeln beruhet, welche in der gesammten Mathematik die häufigste und allgemeinste Anwendung finden. Namentlich habe ich aber in dieser Abhandlung auch eine vollständige Darstellung des Binomischen Lehrsatzes, insbesondere eine gehörige Unterscheidung aller der Fälle von einander, in welchem die betreffende Reihe convergirt oder divergirt, der Satz also gültig oder ungültig ist, zu geben versucht, da in der That die Darstellung dieses wichtigen Theorems, wie dieselbe seit der Zeit des Flors der combinatorischen Analysis ganz in der nämlichen veralteten Weise auch selbst in vielen neueren Lehrbüchern der sogenannten Analysis des Endlichen oder der algebraischen Analysis zum Ueberdruss immer wieder erscheint, den Ansprüchen, welche man nach den neueren Fortschritten der Analysis zu machen berechtigt ist, doch zu wenig genügt, wobei ich natürlich nur Lehrbücher, die sich als eine höhere wissenschaftliche Tendenz verfolgend ankündigen, nicht solche, die bloss für den Elementar-Unterricht in der allgemeinen Arithmetik bestimmt sind oder eine mehr praktische Richtung einschlagen, im Auge habe. Ich wünsche daher durch diese Abhandlung zur grösseren Verbreitung der neueren Ansichten in der Analysis beizutragen, welches dem Zwecke des Archivs durchaus nicht widerspricht, sondern demselben vielmehr völlig gemäss ist. Zugleich soll dieselbe einer anderen in ähnlicher Weise gehaltenen, nächstens folgenden Abhandlung über die imaginären Grössen zur Vorbereitung dienen.

XXVI.

Beitrag zu der Lehre von den Farben.

Von dem

Herrn Doctor Botzenhart,

Assistenten der Physik am k. k. polytechnischen Institut zu Wien.

(Durch Herrn Director v. Littrow dem Herausgeber gütigst zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt.)

Eine vollkommene allen Anforderungen entsprechende Theorie der Farben der Körper ist noch immer eine Aufgabe der Physik, zu deren Lösung eine von mir vor Kurzem gemachte Beobachtung Einiges beitragen dürfte.

Wenn man das von gefärbten Körpern durch Reflexion uns zugesendete Licht mittelst der in Poggendorff's Annalen Bd. LXV. S. 4. beschriebenen dichroscopischen Loupe analysirt, so sieht man bei einer gewissen Schiefe der Incidenz des auf den farbigen Körper fallenden Lichtes und wenn die Ebene des Hauptschnittes des Kalkspathrhomboids mit der Einfallsebene der zum Auge gelangenden Strahlen parallel ist, oder auf ihr senkrecht steht, zwei Bilder, von denen das eine nahe vollkommen weiss, das andere aber mit derselben Farbe wie der untersuchte Körper erscheint. Am deutlichsten zeigt sich die Erscheinung an ziemlich gut reflectirenden gefärbten Flächen, namentlich gefärbter Papiere, farbiger Gläser, Flüssigkeiten, Krystalle etc. Wenn die Fläche nur einigermassen spiegelt, und man unter dem gehörigen Winkel, den man durch den Versuch leicht ausmitteln kann, gegen die Fläche hinsieht, so ist die Sonderung des weissen und farbigen Bildes eine vollkommene.

Bei minder gut reflectirenden Flächen, wie auch bei farbigen Pulvern und unter andern Incidenzwinkeln der Strahlen ist die Sonderung minder vollkommen und geht bis zur völligen Gleichheit beider Bilder.

Wenn man auf die früher angegebene Weise die vollkommene Sonderung erhalten hat und hält zwischen den farbigen Körper und die Loupe eine parallel zur Axe geschnittene Turmalinplatte so, dass ihr Hauptschnitt dem des Kalkspathes parallel ist, oder auf ihm senkreht steht, so verschwindet das eine oder das andere

Bild vollkommen. Das weisse Bild charakterisirt sich als in der Einfallsebene der Strahlen polarisirt, das farbige ist senkrecht darauf polarisirt.

Da nun gewöhnliches Licht auf eine Fläche auffallend durch Reflexion immer nur in der Einfallsebene polarisirt wird, so kann das von der farbigen Fläche kommende auf der Einfallsebene senkrecht polarisirte Licht nicht durch Reflexion an der Oberfläche des Körpers entstehen, sondern ist durchgelassenes (daher senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes) und aus dem Innern des Körpers reflectirtes Licht.

Aus dieser von mir beobachteten Erscheinung gehen zunächst mit grosser Wahrscheinlichkeit folgende zwei Sätze hervor:

1) Das auf die Körper auffallende weisse Licht wird auch als solches reflectirt.

Der öfters aufgestellte Satz, dass farbige Körper von dem auf ihre Oberfläche auffallenden weissen Lichte einige farbige Strahlen zurücksenden, andere in sich eindringen lassen, scheint nach obiger Beobachtung unrichtig.

2) Das von den Körpern uns zugesendete farbige Licht kommt nicht von ihrer Oberfläche, sondern aus ihrem Innern durch Reflexion nach vorausgegangener Transmission.

Dies im Kurzen die von mir gemachte Beobachtung und die daraus zunächst sich ergebenden Folgerungen. Ich habe Versuche mit homogenem Lichte, eben so mit weissem polarisirten Lichte gemacht, welche mir obige zwei Sätze zu bestätigen scheinen.

Da ich über diesen Gegenstand, der mit vielen andern Er scheinungen, als z. B. mit den Farben glühender Körper, der elliptischen Polarisation durch Reflexion von Metalloberflächen etc. im innigsten Zusammenhange zu stehen scheint, noch eine ausgedehnte Reihe von Versuchen anstellen werde, und selbe noch viele Zeit in Anspruch nehmen dürften, so hielt ich es für zweckmässig, das Hauptergebniss meiner Untersuchung vorläufig im Archive mitzutheilen, und behalte mir vor, das Endresultat meiner Untersuchungen späterhin im Detail in dieser Zeitschrift bekannt zu machen.

XXVII.

Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

1. *Schwierigkeiten der Parallelentheorie.*

Die Lehre von den parallelen Geraden hat allbekanntlich d[illegible] hinderliche Eigenheit, dass man, wie man es auch immer anfangen mag, doch jedesmal auf einen Satz stösst, der sich nicht in der gewöhnlichen Weise aus seinen Vorläufern, oder aus der Natur der in ihm verbundenen geometrischen Begriffe erweisen lässt. Die Ursache dieser unangenehmen Unterbrechung des innigsten Zusammenhanges und der folgerechten Reihung aller Sätze der Geometrie liegt in der Unmöglichkeit, die einfachen Begriffe „Lage und Richtung“ weder erklären, noch auch nur durch zureichende Grundmerkmale charakterisiren zu können.

2. *Abhilfen.*

Als erste Abhilfe hat man nun vielerhand Erklärungen der Parallellinien versucht. Allein da es sich hier nicht um eine Sach-, sondern nur um eine Worterklärung, d. h. eigentlich um Angabe des Grundes für die Wahl einer Benennung einer bereits erkannten Eigenschaft zweier unbegrenzten geraden Linien handelt, und da naturgemäss derlei Benennungen aus den üblichen Namen der einzelnen Merkmale solcher Eigenschaften zusammengesetzt zu werden pflegen, so kann man die griechische Benennung παραλληλαι, weil sie aus παρα, bedeutend (mit dem Dativ auf die Frage wo?) bei, neben, längs, juxta, und ἀλληλαις einander zusammengesetzt, und daher durch nebeneinanderisch zu verdeutschen ist, nur dadurch erläutern — wie auch bereits Euklid gethan — dass die also benamseten Gegenstände in ihrer ganzen Ausdehnung entweder im Raume oder auf einer

läche, neben einander, d. i. jeder auf nur Einer Seite des an-
eren liegen, und (nicht wie manche sich berührende Raumdinge)
einen Punkt gemein haben, oder nirgends zusammentreffen, son-
ern überall *getrennt* (separat) bleiben. Sind diese räumlichen
egenstände insbesondere *gerade*, und zugleich *in einerlei
bene befindliche Linien*, so lässt sich von ihnen nach-
eisen: 1) dass jedwede *Richtung* der einen als einer Richtung
er anderen *gleich* angesehen werden dürfe, mithin insofern beide
eraden *gleichgerichtet* (äquidirect) oder *gleichlaufend*
leichläufig) heissen können, und 2) dass sämmtliche Punkte
iner jeden Geraden von der anderen gleiche (senkrechte) Abstände
aben, folglich beide Geraden von einander *gleichabständig*
quidistant) sind. Diese Gleichabständigkeit besteht auch, wenn
ine Gerade neben einer Ebene oder zwei Ebenen neben einander
iegen also nebeneinanderisch, oder im obigen Sinne parallel sind.
llein dies berechtiget keineswegs zu der, in vielen neueren Lehr-
üchern der Geometrie beliebten Erklärung: „*Parallel* (neben-
inanderisch) heisst ein räumlicher Gegenstand zu einem anderen
insbesondere zwei Geraden oder Ebenen zu einander, oder eine
erade zu einer Ebene) wenn jeder Punkt des ersteren gleichweit
on dem letzteren (Gegenstande) entfernt ist." Eine solche Er-
lärung klingt wie etwa folgende: „Ein *gleichseitiges* oder ein
leichwinkeliges *Dreieck* ist ein solches, dessen Spitzen
on den gegenüberliegenden Seiten gleichweit abstehen," oder
ie folgende: „Ein *gleichseitiges Viereck* ist ein solches, in
elchem die Diagonalen sich winkelrecht halbiren." Nichts ist
idernatürlicher, als solche, erst absonderlich zu erweisende,
ehrsätze in Erklärungen umzuformen.

3. Allein weder jenes Neben-einander-liegen oder Von-ein-
ander-geschieden-sein, noch diese Gleichabständigkeit erschöpft,
einzeln für sich genommen, den mit dem Worte „Parallel" nicht
etymologisch, sondern von den Geometern eigentlich verbundenen
Begriff. Denn — wie schon *Tacquet* gegen *Euklid* bemerkt —
gibt es Linien, von denen jede auf blos Einer Seite der anderen
liegt, die also in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends zusammen-
treffen, wie z. B. die Hyperbel oder die Conchois, und ihre gerade
Asymptote, zwei Parabeln mit einerlei Brennpunkt und Axe, u. m. a.;
und doch nennt sie der Geometer nicht parallel. Andererseits er-
hält man zu einer *krummen* Linie oder Fläche eine *gleichab-
ständige*, wenn man von jedem Punkte derselben auf seiner
Normale nach einerlei Seite oder Gegend hin gleichgrosse Strecken
nimmt und ihre Endpunkte stetig verbindet. (Klügel, Mathem.
Wörterb. 3. Bd. S. 738. Nro. 24.). Aber solche gleichabständige
Linien oder Flächen können dessenungeachtet mit einander zu-
sammentreffen, wie z. B. die Ellipse und Parabel mit mancher
ihrer inneren, die Cycloide mit jeder äusseren, und die Hyperbel
sowohl mit inneren als äusseren Aequidistanten, u. m. dgl. Dess-
wegen däucht es mir *der strengeren Wissenschaftlich-
keit der Geometrie angemessener* zu sein, von jeglichen
zwei solchen mit einander zu betrachtenden räumlichen Gegen-
ständen vorerst zu erweisen, dass ihr Getrenntsein und ihre Gleich-
abständigkeit sich gegenseitig bedingen, und nachher erst dess-
wegen sie *parallel* zu nennen.

4. Eine **zweite Abhilfe**, deren sich alle neueren kritischen und die gerügte schwache Seite der Parallelentheorie offenherzig eingestehenden Geometer bedienen, ist die zu Grundelegung eines möglichst einleuchtenden Lehrsatzes. Je mehr dieser in der That von selbst erhellet, je leichter er begriffen und zugestanden werden kann, oder je plausibler er ist; für desto gründlicher erkennt man die auf ihn gebaute Parallelentheorie an. Von diesen Theorien sind jedoch alle jene **wenigstens tadelnswerth**, wenn nicht schlechterdings verwerflich, welche sich auf die Lehre von den Dreiecken stützen, also das Einfache durch das Zusammengesetzte beweisen; da bei den Parallellinien eigentlich nur an einem Paar Geraden, ihre Winkel mit einer blos für die Forschung zu Hülfe genommenen dritten zu betrachten kommen, bei den Dreiecken aber ausser den Winkeln auch noch Seiten, begrenzte gerade Linien, betrachtet werden. Dann aber bleiben der anderen Parallelentheorien nur höchst wenige übrig, und selbst diese sind nicht unbedenklich.

Sehr gern legt man einen der beiden folgenden Sätze als evident zu Grunde:

„Zu einer Geraden gibt es durch jeden Punkt nur **eine einzige** parallele Gerade."

„Zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, müssen **auch zu einander** parallel sein."

Der Hauptgrund, den man für diese Sätze beibringt, ist ihre Analogie, ihr Gleichlauten mit vielen anderen. Allein ihnen stehen doch auch folgende analoge Sätze entgegen:

„Zu einer $\begin{matrix}\text{Ebene}\\\text{Geraden}\end{matrix}$ gibt es durch jeden Punkt **unzählig viele** parallele $\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebenen}\end{matrix}$."

„Zwei $\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebenen}\end{matrix}$, die zu einer $\begin{matrix}\text{Ebene}\\\text{Geraden}\end{matrix}$ parallel sind, müssen **keineswegs** parallel sein, sondern können sich manchmal auch schneiden."

Dadurch leiden obige Sätze sehr an ihrer Evidenz und unbedenklichen Zulassung.

5. Die **dritte Abhilfe**, welche meines Wissens noch Niemand vor mir vorgeschlagen hat, ist die Berücksichtigung des allgemein und streng erweisbaren nothwendigen Zusammenhanges zweier Paare unzertrennlich zusammen bestehender Beschaffenheiten oder Merkmale — wie deren so vielerlei in der Mathematik vorkommen — von denen die einen bestimmt, die anderen unbestimmt, insbesondere theils Gleichheiten theils Ungleichheiten sind; und die daraus folgende Aufstellung der vier, solchen Zusammenhang umständlich und vollständig ausprechenden Sätze, unter denen im vorliegenden Falle ein nach den gewöhnlichen Schlussarten nicht erweisbarer Lehrsatz vorkommt. — Nachdem ich den Beweis dieses Zusammenhanges vielmals und mit Beseitigung aller der Wissenschaft nachtheiligen Selbstliebe kritisch geprüft und ohne Fehler befunden habe, so glaube ich nicht weiter anstehen zu sollen, diese neue Begründungsweise der Parallelentheorie den Geometern zur Beachtung vorzulegen.

6. *Neuer Hauptlehrsatz der Logik.* **Hängen zwei Begriffe S und Σ dergestalt unzertrennlich zusammen, dass beide nur zugleich vorhanden sein können, keiner aber ohne den anderen bestehen kann; und ist der Begriff S nur entweder der eindeutige also bestimmte a, oder der zweideutige also unbestimmte b,** (namentlich entweder b' oder b''); **dessgleichen der Begriff Σ nur entweder der eindeutige also bestimmte α, oder der zweideutige also unbestimmte β,** (namentlich entweder β' oder β''): **so muss jedweder einzelne der ersteren zwei sich gegenseitig ausschliessenden Begriffe a und b** (welcher selbst entweder b' oder b'' ist) **mit einem der letzteren zwei einander gegenseitig ausschliessenden Begriffe α und β** (der selbst entweder β' oder β'' ist) **zusammen bestehen;**

und zwar müssen jederzeit und nothwendig

einerseits die beiden eindeutigen, bestimmten, a u. α,

andererseits die beiden zweideutigen, unbestimmten, b und β,

mit einander bestehen, jeder den andern bedingen: **nie aber kann ein eindeutiger,** bestimmter, **mit einem zweideutigen,** unbestimmten, **zusammen bestehen.**

Eigentlich ist hier nur der letztere verneinende Satz zu erweisen, nemlich, dass unter den gemachten Voraussetzungen nie ein eindeutiger und ein zweideutiger ein bestimmter und ein unbestimmter Begriff, d. i. weder a und β, noch α und b, mit einander bestehen können: denn dieser Satz zerfällt nothwendig in jene zwei ersteren bejahenden Sätze.

Richtig aber muss der Satz sein, weil an dem eindeutigen Begriffe a oder α kein Merkmal oder Kennzeichen sich auffinden lässt, welcher der beiden dem zweideutigen gleichgeltenden einander gegenseitig ausschliessenden Begriffe mit ihm (dem eindeutigen) zusammen bestehen soll, nemlich ob zu a der Begriff β' oder β'', zu α der Begriff b' oder b'' gehöre; und weil man daher durchaus keinerlei Grund hat, mit jenem eindeutigen eher den einen als den anderen der zwei disjunctiven Begriffe verbunden zu denken — mit a eher β' als β'', mit α eher b' als b'' —; oder auch, weil jeder Grund, aus welchem man den einen mit ihm verbunden ansehen will, auch unentbehrlich ist, um den andern mit ihm verbunden anzunehmen, so dass beide zugleich damit verbunden gedacht werden müssten — mit a sowohl β' als β'', mit α sowohl b' als b'' —: [illegible] wo doch diese zwei disjunctiven Begriffe β' und β'', so wie b' und b'' einander dermassen ausschliessen, dass sie nie mit einander zugleich vorkommen können.

7. *Fernere Erläuterung.* Wenn demnach die zwei disjunctiven Urtheile

1) S ist entweder a
oder b und im letzteren Falle entweder b' oder b''

2) Σ ist entweder α
oder β und im letzteren Falle entweder β' oder β''

unzertrennlich zusammenhängen, so dass mit einem jeden der Urtheile

$$S \text{ ist } a, \quad S \text{ ist } b,$$

eines der Urtheile

$$\Sigma \text{ ist } \alpha, \quad \Sigma \text{ ist } \beta,$$

nothwendig verbunden sein muss; so müssen jederzeit einerseits die beiden bestimmten Urtheile

$$S \text{ ist } a \text{ und } \Sigma \text{ ist } \alpha,$$

so wie andererseits die beiden unbestimmten zweideutigen Urtheile

$$S \text{ ist } b = b' \text{ oder } b'' \text{ und } \Sigma \text{ ist } \beta = \beta' \text{ oder } \beta''$$

gleichzeitig zusammen bestehen.

Folglich müssen zugleich mit einander vier hypothetische Urtheile gelten:

1) Wenn S, a ist; so ist Σ, α.
2) Wenn S, b ist; so ist Σ, β.
3) Wenn Σ, α ist; so ist S, a.
4) Wenn Σ, β ist; so ist S, b.

Von diesen sind 1) und 4) so wie 2) und 3) Contrapositionen von einander, mithin unmittelbare Folgerungen aus einander: dessgleichen sind 1) und 3) so wie 2) und 4) Umgekehrte von einander.

8. *Absonderliche Beweisführung in der Anwendung.*

Obwohl diese vier hypothetischen Urtheile, als eben so viel Lehrsätze der angewandten Logik, nach dem obigen Beweise ganz allgemein und in aller Strenge gelten müssen, und sonach in jedem besonderen Falle mit voller Ueberzeugung von ihrer Giltigkeit angewendet werden dürfen, so muss man sie dennoch in den einzelnen Zweigen der Grössenwissenschaft noch absonderlich beweisen, um darzulegen, dass die in ihnen verbundenen zweierlei Begriffe wirklich einander gegenseitig bedingen.

Gewöhnlich beweist man zwei solche aus ihnen, die nicht Contrapositionen, also nicht nothwendige unmittelbare Folgen aus einander sind, nemlich

entweder 1) und 2), oder 1) und 3);

wonach die beiden übrigen als ihre Contrapositionen, auch ihre nächsten nothwendigen Folgen sind. Der erstere Vorgang ist ein besonderer Fall des allgemeinen Umkehrungsgesetzes von Hauber *).

---

*) Vergl. meinen Aufsatz im Archiv. 6. Theil. 4. Heft. Nro. XLIV. Art. II., 1. S. 358.

Aber es genügt auch schon der Beweis eines einzigen dieser vier Sätze, um sie allesammt über jeden Zweifel zu erheben, oder vielmehr, da sie vermöge des obigen allgemeinen Beweises derselben keinem gegründeten Zweifel unterliegen können, um sie nur noch mehr zu bestätigen und zu bekräftigen. Beweist man z. B. den Satz 1) *), so folgt aus ihm seine Contraposition 4) und aus beiden jeder der zwei anderen.

Denn wollte man etwa den Satz:

3) Wenn Σ, α ist; so ist S, a;

nicht zugestehen, also nicht gelten lassen, dass mit dem Begriffe α der Begriff a zusammenhänge; so müsste man, weil mit dem Begriffe α doch nothwendig einer der Begriffe a und b verbunden sein muss, mit ihm den Begriff b verknüpfen, also den Satz:

Wenn Σ, α ist; so ist S, b;

einräumen. Aus diesen würde aber durch Contraposition sogleich folgen:

Wenn S nicht b ist; so ist auch Σ nicht α;

d. h.

Wenn S, a ist; so ist Σ, β.

Da jedoch diese Folgerung mit 1) im Widerspruche ist, so leidet die Giltigkeit von 3) keinen Zweifel. Dann aber gilt auch seine Contraposition 2).

9. *Gewöhnliche allgemeine Anwendung.*

Der obige logische Hauptlehrsatz kommt vornehmlich da in Anwendung, wo S und Σ Vergleichungen von Grössen oder Beschaffenheiten mancher Gegenstände sind; daher a und α die Gleichheit, das Gleichsein (=), dagegen b und β die Ungleichheit, Verschiedenheit, das Verschiedensein ($\gtrless$) solcher Eigenschaften bedeuten. Für diesen Fall gilt folgender

Allgemeiner logischer Lehrsatz. Wenn an irgend zweien, unzertrennlich mit einander bestehenden, sich gegenseitig bedingenden oder bestimmenden Gegenständen G und g zweierlei Merkmale (Beschaffenheiten, Eigenschaften oder Bestimmungsstücke), nemlich sowohl eines Theils A und a, als auch andern Theils B und b vorkommen; und wenn die beiden Merkmale derselben Art entweder gleich (=) oder ungleich (verschieden $\gtrless$) sein können, mithin nothwendig jede der beiden Vergleichungen

$$A = a \text{ und } A \gtrless a$$

mit einer der beiden anderartigen

$$B = b \text{ und } B \gtrless b$$

---

*) Wie in der unten folgenden Lehre vom Zusammentreffen der Geraden.

zusammen bestehen muss: so müssen jederzeit und nothwendig einerseits die Gleichheiten der beiderlei Merkmale, d. i.

$$A = a \text{ und } B = b,$$

mit einander und andererseits auch die Ungleichheiten dieser zweierlei Merkmale d. i.

$$A \gtrless a \text{ und } B \gtrless b$$

wieder mit einander bestehen; nie aber kann die Gleichheit der einen Merkmale mit der Ungleichheit der anderen

$$\text{weder } A = a \text{ mit } B \gtrless b,$$
$$\text{noch } B = b \text{ mit } A \gtrless a,$$

bestehen.

Sind nemlich die einen Merkmale gleich, so sind auch die anderen gleich;

sind dagegen die einen Merkmale ungleich, so sind auch die anderen ungleich;

niemals aber können die einen Merkmale gleich
und die andern ungleich sein.

Mithin müssen hier jedesmal zugleich folgende **vier** hypothetische Sätze gelten:

I. Wenn $A = a$ ist; so ist auch $B = b$.

II. Wenn $A \gtrless a$ ist; so ist auch $B \gtrless b$.

III. Wenn $B = b$ ist; so ist auch $A = a$.

IV. Wenn $B \gtrless b$ ist; so ist auch $A \gtrless a$.

10. *Beispiele.*

1) Sind die Zusätze (zweiten Summanden) zu einerlei Grö (erstem Summand) $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$, so sind auch die Beträge (Sum $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$.

Umgekehrt:

Sind nach geschehenem Zusatze zu einerlei Grösse (Subtra hend) die Beträge (Minuende) $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$, so müssen auch die ge brauchten Zusätze (Unterschiede, Differenzen) $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$ sein.

2) Sind bei einerlei Multiplikand (erstem Factor) die Mu plikatoren (zweiten Factoren) $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$, so sind auch die Produ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$.

Umgekehrt:

Sind bei einerlei Divisor (erstem Factor) die Dividende (Producte) $\frac{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$, so sind auch die Quotienten (zweiten Factoren) $\frac{\text{gleich}}{\text{ungleich}}$.

3) Im Dreiecke liegen

gleichen Seiten gleiche Winkel,
und ungleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüber;

also liegen auch umgekehrt:

gleichen Winkeln gleiche Seiten,
und ungleichen Winkeln ungleiche Seiten gegenüber.

II.

Verwendung des aufgestellten logischen Gesetzes in der Parallelentheorie.

11. *Zweckmässigere Benennung der Winkel zweier Geraden in einerlei Ebene mit einer sie beide in zwei Punkten schneidenden dritten.*

Werden (Taf. IV. Fig. 3.) zwei in einerlei Ebene befindliche Geraden LM und $\lambda\mu$ von einer dritten $N\nu$ in zwei Punkten P und π geschnitten, so heissen bekanntlich einem allgemeinen Gebrauche gemäss die Winkel a, b, α, β innere, und ihre Scheitelwinkel a', b', α', β' äussere Winkel;

ferner die Winkel a mit α, und b mit β Wechselwinkel,
so wie die Winkel a mit β, und b mit α Gegenwinkel.

Höchst zweckmässig behält man mit Knar diese letzteren Benennungen der Paare zusammengestellter Winkel der einen und anderen Geraden mit der dritten Schneidenden auch dann noch bei, wenn in obigen Paaren an die Stelle eines oder beider Winkel der (gleiche) Scheitelwinkel tritt. — Dann sind

(gleichlautend bezeichnete) Wechselwinkel:

$$a\alpha \;\; a\alpha' \;\; a'\alpha \;\; a'\alpha', \quad b\beta \;\; b\beta' \;\; b'\beta \;\; b'\beta';$$

(ungleichlautend bezeichnete) Gegenwinkel:

$$a\beta \;\; a\beta' \;\; a'\beta \;\; a'\beta', \quad b\alpha \;\; b\alpha' \;\; b'\alpha \;\; b'\alpha'.$$

12. Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Grössen der Wechsel- und Gegenwinkel.

(Neuer) *Hauptlehrsatz.* Werden zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten geschnitten, so ist sowohl der Unterschied jeder zwei Wechselwinkel, als auch der Unterschied eines gestreckten Winkels und der Summe jeder zwei Gegenwinkel überall gleich, wofern immer (arithmetisch) das Kleinere vom Grösseren abgezogen wird.

Denn behält man in Taf. IV. Fig. 4. die Bezeichnung aus Taf. IV. Fig. 3. mit der einzigen Abweichung bei, dass man die äusseren Winkel gerade so, wie die ihnen als Scheitelwinkel gleichen inneren bezeichnet, weil hier nur die Grösse der Winkel zu berücksichtigen kommt; so hat man, weil a und b so wie α und β Nebenwinkel sind, wenn der gestreckte Winkel mit G bezeichnet wird, die Gleichungen:

$$a+b=G,\quad \alpha+\beta=G.$$

Daraus folgt sogleich $a+b=\alpha+\beta$, und wenn man $a \geqq \alpha$ voraussetzt,

$$a-\alpha=\beta-b,$$

wonach $b \leqq \beta$ sein muss.

Schreibt man die erste Gleichung wie folgt:

$$G=(a+\beta)-(\beta-b)=(b+\alpha)+(a-\alpha),$$

so findet man hieraus und aus dem bereits Gefundenen die Gleichungen:

$$a-\alpha=\beta-b=G-(b+\alpha)=(a+\beta)-G,$$

welche den behaupteten Satz ausdrücken, und in denen $a+\beta \geqq G$, $b+\alpha \leqq G$ ist.

13. *Gefolgerte allgemeine Alternative.*

Verschwindet / Besteht demnach irgend einer dieser durchweg gleichen Unterschiede, so verschwindet / besteht auch schon jeder.

Vereinzelte Betrachtung.

Werden zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten dergestalt geschnitten, dass entweder irgend zwei Wechselwinkel gleich / ungleich sind, oder irgend zwei Gegenwinkel zusammen einen / keinen gestreckten Winkel ausmachen: so sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich / ungleich, und jede zwei Gegenwinkel machen zusammen einen / keinen gestreckten Winkel aus.

14. *Auf diese Vergleichung der Winkel gegründete Unterscheidung*

A. der Seiten der Schneidenden.

Wo die allesammt gleichen Unterschiede wirklich bestehen, da unterscheiden sich die beiden Seiten der schnei-

denden Geraden darin von einander, dass auf der $\substack{\text{einen}\\\text{anderen}}$ Seite je der äussere Winkel $\substack{\text{grösser}\\\text{kleiner}}$ als sein innerer Wechselwinkel, und die Summe der inneren Gegenwinkel $\substack{\text{kleiner}\\\text{grösser}}$, jene der äusseren Gegenwinkel aber um eben so viel $\substack{\text{grösser}\\\text{kleiner}}$ als ein gestreckter Winkel ist.

Wo aber die allesammt gleichen Unterschiede verschwinden, da besteht auch kein solcher Unterschied zwischen den Seiten der Schneidenden; sondern auf beiden Seiten derselben ist jeder äussere Winkel gleich seinem inneren Wechselwinkel, und sowohl die inneren als die äusseren Gegenwinkel betragen zusammen einen gestreckten Winkel.

All dieses erhellet aus Taf. IV. Fig. 4. und den in Art 12. aufgeführten gleichzeitigen Vergleichungen:

$$a \geqq \alpha,\ b \leqq \beta,\ a+\beta \leqq G,\ b+\alpha \leqq G.$$

B. der Arten des Schneidens.

Aus diesen Ergebnissen leuchtet ein, dass zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten nur auf zweierlei Weise geschnitten werden können, nemlich entweder

1) so, dass jede zwei Wechselwinkel *gleich* sind, und jede zwei Gegenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel betragen,

folglich, dass auf beiden Seiten der Schneidenden jeder äussere Winkel seinem inneren Wechselwinkel gleich ist, und jede zwei gleichnamige $\left(\substack{\text{innere}\\\text{äussere}}\right)$ Gegenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel ausmachen, also dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung der Winkel, *gleiche* Beschaffenheit zeigen; oder

2) so, dass jede zwei Wechselwinkel *ungleich* sind, und jede zwei Gegenwinkel zusammen keinen gestreckten Winkel betragen,

folglich, dass auf der $\substack{\text{einen}\\\text{anderen}}$ Seite der Schneidenden jeder äussere Winkel $\substack{\text{grösser}\\\text{kleiner}}$ als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen $\substack{\text{weniger}\\\text{mehr}}$ als einen gestreckten Winkel ausmachen, also

dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung der Winkel *ungleiche* Beschaffenheit zeigen.

Man kann das $\substack{\text{erstartige}\\\text{zweitartige}}$ Schneiden kurz mit Knar ein Schneiden unter $\substack{\text{gleichen}\\\text{ungleichen}}$ Wechselwinkeln nennen.

15. *Auf die gegenseitige Lage der beiden Geraden gegründete Unterscheidung*

A. *der Seiten der Schneidenden.*

Werden zwei Geraden von einer dritten in zwei Punkten geschnitten, so liegt, wenn die Geraden nirgends zusammentreffen, folglich durchweg getrennt sind, zu beiden Seiten der Schneidenden ein Paar getrennter Strahlen (halber Geraden), dagegen wenn die Geraden sich treffen, auf einer Seite ein Paar getrennter, und auf der anderen ein Paar sich schneidender Strahlen. Dort schneiden sich die Geraden weder diesseits noch jenseits der Schneidenden; hier dagegen schneiden sie sich auf nur einer, aber nicht auf der anderen Seite.

B. *der Arten des Schneidens.*

Zwei Geraden können demnach von einer dritten in zwei Punkten nur dermassen auf zweierlei Art geschnitten werden, dass entweder

1) zu beiden Seiten der Schneidenden jedes Paar halber Geraden getrennt ist, also die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich des Zusammentreffens der Hälften jener Geraden, *gleiche* Beschaffenheit haben; oder

2) so, dass auf der einen Seite der Schneidenden der Durchschnittspunkt der zwei Geraden liegt, also ein Paar halber Geraden zusammentreffen, auf der anderen Seite kein Durchschnittspunkt der Geraden liegt, also ein Paar halber Geraden getrennt sind, folglich so, dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich des Zusammentreffens der Hälften jener Geraden, *ungleiche* Beschaffenheit besitzen.

16. *Uebergangsbetrachtung.*

Die Seiten der Schneidenden zeigen daher rücksichtlich zweierlei Umstände, eines Theils gleiche andern Theils ungleiche Beschaffenheiten, nemlich sowohl rücksichtlich der Vergleichungen der Winkel als auch rücksichtlich der gegenseitigen Lagen der halben Geraden, welche auf diesen Seiten sich befinden. Nun entsteht die Frage, ob diese beiderlei Beschaffenheiten der Seiten der Schneidenden mit einander zusammenhängen oder nicht, namentlich also mit Bezug auf den obigen allgemeinen logischen Lehrsatz (in Art. 9.), ob einerseits beide gleichen und andererseits beide ungleichen Beschaffenheiten mit einander bestehen, d. h. ob einerseits das Getrenntsein der beiden Geraden mit dem Schneiden der dritten unter gleichen Wechselwinkeln,

und andererseits

das Zusammentreffen der zwei Geraden mit dem Schneiden der dritten unter ungleichen Wechselwinkeln zusammengehöre.

Diese Frage wird uns der erste von den bald folgenden vier zusammengehörigen Lehrsätzen in der That bejahen. Vorher aber erwägen wir noch nachstehende

17. *Wichtige Bemerkung für die Kritik.*

Die Nothwendigkeit des Beweises solchen Zusammenhanges der angeführten zweierlei Gleichheiten und Ungleichheiten der

seiten der Schneidenden wird um so mehr einleuchten, wenn man olgende Wahrheit bedenkt:

Obige drei Sätze in Art. 12. und 13. bleiben auch ann noch vollständig giltig, wenn man in ihnen überll die Wörter „*Wechsel-* und *Gegenwinkel*" mit einnder vertauscht.

Denn aus den Gleichheiten

$$G = a + b = \alpha + \beta$$
$$= (a+\alpha) - (\alpha - \beta) = (b+\beta) + (a-\beta)$$

findet man auch

$$a - \beta = \alpha - b = (a+\alpha) - G = G - (b+\beta);$$

wobei man bedingt

$$a \geqq \beta,\ b \leqq \alpha,\ a+\alpha \geqq G,\ b+\beta \leqq G.$$

Demnach können leicht auch die, auf die Vergleichungen der Winkel gestützten, Unterscheidungen der Seiten der Schneidenden und der Arten des Schneidens (in Art. 14.) passend abgeändert ausgesprochen werden, und man wird ersehen, dass hiebei nur entweder auf jeder Seite der Schneidenden jedweder Winkel seinem (gleichnamigen) Gegenwinkel gleich, oder von jeglichen zwei Nebenwinkeln der eine grösser, der andere aber kleiner als sein Gegenwinkel sein könne, also das Schneiden entweder **unter gleichen** oder **ungleichen** *Gegenwinkeln* geschehe.

Allein man wird ohne sonderliche Schwierigkeit erkennen, dass diese zweierlei Schneidungen auf das Zusammentreffen und Getrenntsein der Geraden ohne Einfluss sind. Denn je nachdem die **gleichen** Gegenwinkel schiefe oder rechte Winkel sind, schneiden sich die beiden Geraden oder treffen sich gar nicht; und bei **ungleichen** Gegenwinkeln können die Geraden eben sowohl einander schneiden als nirgends treffen.

18. *Gegenseitige Abhängigkeit des Zusammentreffens und Getrenntseins zweier in einer Ebene befindlichen Geraden und der zweierlei Schneidungen jeglicher dritten Geraden.*

I. *Hauptlehrsatz.* **Zwei gerade Linien, welche von einer dritten in zwei Punkten unter** *gleichen* **Wechselwinkeln geschnitten werden,** *treffen sich nirgends.*

Wenn nemlich die Geraden LM und $\lambda\mu$ (in Taf. IV. Fig. 4.) von der $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln, $a=\alpha$, $b=\beta$, geschnitten werden, so treffen sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends.

Beweis (nach de Veley). Die Gerade $N\nu$ zertheilt die Ebene, in der sich die Geraden LM und $\lambda\mu$ befinden, in zwei Abtheilungen. Diese lassen sich nun so auf einander legen, dass die Figur $LP\pi\lambda$ auf $\mu\pi PM$ dergestalt zu liegen kommt, dass $P\pi$ in verwendeter Lage sich selbst deckt, daher auch die Winkel

α und β die ihnen gleichen a und b decken; folglich PL auf $\pi\lambda$ und $\pi\lambda$ auf PM fällt. Könnte nun eines der zwei Paar halber Geraden $PL, \pi\lambda$ und $\pi\mu, PM$ sich schneiden; so müsste auch das andere Paar sich schneiden, weil beide Paare auf einander liegen. Die Geraden LM und $\lambda\mu$ träfen sich aber dann in zwei Punkten, was unmöglich ist. Mithin treffen sich diese Geraden weder diesseits noch jenseits der $N\nu$, also gar nirgends.

Anmerkung. Dieser Satz bewährt demnach den Zusammenhang zwischen den an den beiden Seiten der Schneidenden vorkommenden zweierlei Gleichheiten und Ungleichheiten; sodann gelten, vermöge des von uns aufgestellten logischen Gesetzes, nothwendig und ohne eines nochmaligen Beweises zu bedürfen, auch schon die theils als Contrapositionen theils als Umkehrungen zusammenhängenden drei ferneren Lehrsätze. Um jedoch darzulegen, dass und wie die auf jenes allgemeine Gesetz der Logik gegründeten Beweise dieser Sätze in Lehrbüchern zu geben wären, sollen dieselben hier ebenfalls vollständig dargelegt werden.

19. II. Gegentheilig folgt hieraus:

Zwei *zusammentreffende* Geraden werden von jeder dritten, die sie in zwei Punkten trifft, unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten;

und zwar so, dass auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher die beiden Geraden zusammentreffen, jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel, und die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als ein gestreckter Winkel ist.

Beweis des Anhangs. Durch den Punkt P (Taf. IV. Fig. 5.) in welchem die erstere der zwei im Punkte O sich schneidenden Geraden LM und $\lambda\mu$ von der dritten $N\nu$ geschnitten wird, führt man die Gerade JK dergestalt, dass sie mit der Schneidenden den mit dem Durchschnittspunkte O auf einerlei Seite liegenden Winkel NPK oder $\alpha' = \alpha$ macht; folglich JK und $\lambda\mu$ von der $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, und also (vermöge I.) nirgends zusammentreffen. — Nun muss aber jede Gerade, welche in den beiden Scheitelwinkeln b der Geraden LM und $N\nu$ durch ihren Durchschnittspunkt P geführt wird, in die gerade Verbindungslinie $O\pi$ der Schenkel eines solchen Winkels einschneiden *), also auch in die Gerade $\lambda\mu$. Mithin kann die JK, weil sie die $\lambda\mu$ nirgends trifft, keineswegs in den zwei Scheitelwinkeln b der Geraden LM und $N\nu$, sondern nur in den zwei anderen, a, liegen, und daher insbesondere ihre Richtung PK in dem Winkel $NPM = a$; wesswegen $NPM > NPK$ oder $a > \alpha'$ ist. — Weil aber $\alpha' = \alpha$ construirt worden, muss auch $a > \alpha$ sein.

20. III. Umkehrung des ersten Lehrsatzes:

Zwei gerade Linien, welche *nirgends zusammentreffen*, werden von jeder dritten Geraden, die sie beide trifft, unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten.

---

*) Weil diese Gerade in das Innere der geschlossenen Figur $P\pi OP$ eindringt, und also den Umfang dieser Figur wenigstens noch einmal schneiden muss, was nur in der Strecke $O\pi$ möglich ist.

Beweis. Könnten zwei gerade Linien, die sich nirgends treffen, wie LM und $\lambda\mu$ in Taf. IV. Fig. 4., von einer dritten $N\nu$ unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten werden; so müssten die beiden Seiten der Schneidenden $N\nu$ (vermöge Art. 14.) darin von einander sich *unterscheiden*, dass auf der *einen* Seite jeder äussere Winkel *grösser*, auf der *anderen* aber *kleiner* als sein innerer Wechselwinkel ist. Allein die zwei Geraden LM und $\lambda\mu$ treffen einander nirgends, also weder auf der einen, noch auf der anderen Seite der Schneidenden $N\nu$; folglich sind in dieser Hinsicht die beiden Seiten der Schneidenden nicht von einander verschieden, sondern *gleich* beschaffen. Sonach gibt es durchaus kein *Merkzeichen* von den zwei Geraden, mittels dessen die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich jener Vergleichungen der Wechselwinkel, von einander unterschieden werden können; d. h. es gibt *keinen Grund* eher auf der einen als auf der anderen Seite der Schneidenden die äusseren Winkel *grösser* als ihre inneren Wechselwinkel zu denken; oder vielmehr, jeder Grund, aus welchem man eine solche Eigenschaft der einen Seite der Schneidenden zuschreiben will, berechtigt auch, dieselbe Eigenschaft ihrer anderen Seite beizulegen, so dass auf einer jeden Seite der Schneidenden der äussere Winkel *nicht nur grösser*, *sondern auch zugleich kleiner* als sein innerer Wechselwinkel sein müsste; was doch in sich selbst schon ungereimt wäre. Mithin können die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung ihrer Wechselwinkel, *nur gleich beschaffen*, folglich auf jeder Seite jedweder äussere Winkel seinem inneren Wechselwinkel *nur gleich* sein. Dann aber sind auch *jede* zwei Wechselwinkel gleich, und die beiden Geraden LM und $\lambda\mu$ werden von der dritten $N\nu$ unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten.

Anderer Beweis. Gesetzt der behauptete hypothetische Satz würde nicht gelten, so müsste mit seiner Bedingung das *Gegentheil* seiner Folge verbunden sein, also der Satz gelten:

> „Wenn zwei Geraden nicht zusammentreffen, so werden sie von einer dritten unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten."

Aus diesem aber würde mit logischer Strenge in aufhebender Weise gefolgert werden:

> „Wenn zwei Geraden von einer dritten unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten werden, so müssen sie zusammentreffen."

Allein dieser Satz ist mit dem ersten genau begründeten Lehrsatze, dem zufolge die Geraden nicht zusammentreffen, im entschiedenen Widerspruche. Mithin hat der behauptete Satz volle Giltigkeit.

21. IV. *Gegensätzlich* folgt hieraus und aus dem Anhange zum IIten Satze:

Zwei gerade Linien, die von einer dritten in zwei Punkten unter ***ungleichen*** *Wechselwinkeln geschnitten werden,* ***treffen sich***;

und zwar auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen weniger als einen gestreckten Winkel ausmachen.

22. Schlussbemerkung. Nunmehr unterliegt es keinem weiteren Anstande, vor aller Kenntniss der Lehre vom Dreiecke, bloss durch Deckung von ebenen Figuren nachzuweisen, dass durchaus getrennte Geraden, auch durchweg gleichabständig von einander sind. Dann ist man berechtigt, solchen Geraden die Benennung parallel zu geben.

XXVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Dr. A. Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

1) Wenn man durch die Winkelspitzen eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in der Spitze des Dreiecks hat, so ist jedes Loth von der Parabel auf die Hypotenuse das harmonische Mittel zwischen den darauf gebildeten Abschnitten. (Bemerkenswerth wegen der analogen Lösung der entsprechenden Aufgabe vom geometrischen Mittel.)

2) Wenn man durch den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel Parallelen mit den Asymptoten zieht und diese als Achsen betrachtet, so ist die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, welches die Halbachse der Hyperbel zum Schenkel hat, das harmonische Mittel zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes der Hyperbel.

3) Wenn man eine gleichseitige Hyperbel auf dieselben Achsen wie vorher bezieht, so ist die Ordinate irgend eines Punktes derselben das harmonische Mittel zwischen der zugehörigen Abscisse und der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, welches die Achse der Hyperbel zur Höhe hat.

4) Frage, worauf die Antwort verlangt wird:

Wenn man vier harmonische Strahlen durch zwei Transversalen schneidet und auf jedem Strahle zu den beiden Durchschnitts-

punkten und dem Convergenzpunkte den vierten harmonischen Punkt sucht, liegen dann die vier gefundenen Punkte ebenfalls in einer Geraden?

5) In einem Quadrate wird die eine Seite über einen ihrer Endpunkte verlängert, es soll aus der diesem Endpunkte gegenüber liegenden Winkelspitze an die Verlängerung eine Gerade gezogen werden, so dass das zwischen der Verlängerung und der daranstossenden Quadratseite liegende Stück eine gegebene Länge hat.

6. Wenn man um Vielecke gleich breite Streifen mit Begrenzungslinien legt, die den Seiten parallel sind, so ist der Inhalt dieser Streifen bei solchen Vielecken, in die sich Kreise beschreiben lassen, jederzeit durch den Inhalt und Umfang der Vielecke und die gegebene Breite des Streifens bestimmt, d. h. also bei Vielecken von gleichem Inhalt und Umfang bei vorgeschriebener Breite derselben.

XXIX.

Miscellen.

Zu Archiv. Thl. V. S. 430.

Von dem Herrn Director Nizze am Gymnasium zu Stralsund.

Die zweite Gleichung ist in so fern unrichtig, als das Minuszeichen entweder vor beiden Gliedern der Gleichung oder vor keinem stehen muss *). Die letzte Gleichung heisst daher:

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+(\varphi-\psi))$$
$$=\cot\tfrac{1}{2}(A+(\alpha+\beta))\cot\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta))\tan\tfrac{1}{2}(A-(\alpha-\beta)).$$

Soll nun untersucht werden, unter welcher Bedingung die Diagonale CD (Taf. IV. Fig. 6.) senkrecht geschnitten wird, so setze man $\varphi=90^0-\alpha$ und $\psi=90^0-\beta$, also $\varphi-\psi=-(\alpha-\beta)$, wodurch man erhält:

$$1=\cot\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\cot\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)),$$

*) In der zweiten Gleichung auf S. 430. Z. 5. muss man das Minuszeichen streichen. M. s. auch die Thl. VI. S. 224. angezeigten Berichtigungen.
Gr.

$$\text{oder } 0 = \cos \tfrac{1}{2}(A + (\alpha - \beta)) \cos \tfrac{1}{2}(A - (\alpha + \beta)) - \sin \tfrac{1}{2}(A + (\alpha - \beta)) \sin \tfrac{1}{2}(A - (\alpha + \beta)),$$

$$0 = \cos A, \text{ mithin } A = \begin{cases} +90^0 \\ +270^0 \end{cases} B = \begin{cases} +90^0 \\ +270^0 \end{cases}$$

Die Bedeutung des ersten Werths von A und B erhellt sof... aus der Figur. Zur Erklärung des zweiten ist eine neue erford... lich, in welcher die beiden Winkel CAD und CBD an einer... Seite des Durchmessers CD liegen.

Setzt man pag. 429. in der letzten Gleichung $A = 90^0$, ... folgt $\sin \frac{1}{2}((\alpha - \beta) + (\varphi - \psi)) = 0$, also entweder $\beta - \alpha = \varphi - ...$ oder $\frac{1}{2}((\alpha - \beta) + (\varphi - \psi)) = 180^0$, $\alpha - \beta + \varphi - \psi = 360^0$, $\varphi - ... = 360^0 + \beta - \alpha = \beta - \alpha$. Dasselbe ergiebt sich für $A = 270^0$.

Den geometrischen Lehrsatz, welcher hierin liegt, formuli...t Herr Dr. Arndt, wie mich dünkt, sehr angemessen so:

Wenn man die Durchschnittspunkte zweier Gegenseitenpa...re eines Kreisvierecks durch eine Gerade verbindet, so steht di...se stets auf der Seite des dritten Paares senkrecht, welche ...in Durchmesser des Kreises ist; wobei auch die Diagonalen zu d...en Gegenseiten gerechnet sind.

Ich bemerke dabei, dass der geometrische Beweis des Le...hr-satzes sich sofort aus der Eigenschaft der drei Höhenperpendi...el eines Dreiecks, sich in einem Punkte zu treffen, ergiebt.

Eine Diagonale oder Seite, welche nicht Durchmesser ... wird wegen des oben ermittelten Werthes von A und B nie... senkrecht von der verbindenden Geraden getroffen.

XXX.

Näherungswerth der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff

an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Die genaue Berechnung der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms führt zu einer sehr komplicirten für den Praktiker unbrauchbaren Formel. Ueberdies ist die ganz allgemeine Behandlung dieser Aufgabe schon desshalb ohne Nutzen, weil die Unbrauchbarkeit von Verhältnissen, welche gewisse Gränzen bedeutend überschreiten, von selbst in die Augen fällt. Diese Gründe veranlassten mich zu der Untersuchung, ob sich nicht die Beziehung der Abweichung zu den gegebenen Abmessungen für die praktischen Fälle durch eine einfache Näherungsformel ausdrücken lasse. Der Erfolg hat meine Erwartung übertroffen, und scheint mir der Mittheilung werth.

Die wesentliche Einrichtung des Watt'schen Parallelogramms setze ich als bekannt voraus.

Bei der gewöhnlichen Einrichtung, auf welche ich mich hier beschränke, weil sie in jeder Hinsicht die zweckmässigste zu sein scheint, hat der Balancier sd (Taf. V. Fig. 1.) beim mittleren Kolbenstande eine horizontale Lage, die Cylinder- oder Kolbenaxe MN halbirt die Höhe δQ des vom Endpunkte d beschriebenen Bogens, die Länge $ad(=r)$ des Parallelogramms ist gleich der Hälfte der Entfernung sd des Endpunktes d von der Axe s des Balanciers, und die Abweichung der Ecke c (des Parallelogramms), welche die Kolbenstange trägt, von der Cylinderaxe MN ist beim höchsten, tiefsten und mittleren Kolbenstande gleich Null.

Es sei nun $ABCD$ das Parallelogramm beim höchsten, $\alpha\beta\gamma\delta$ beim mittleren und $abcd$ bei einem beliebigen Kolbenstande, so folgt aus den Voraussetzungen, dass bei horizontaler Lage des Balanciers die Entfernung $\beta\gamma$ des Endpunktes β des Gegenlenkers von der Cylinderaxe MN

$$= \delta\alpha = PE (= r)$$

ist.

Die Abweichung A der Ecke c gegen die Balancieraxe s hin ist nun allgemein

$$A = \gamma n = \gamma\beta - n\beta = PE - nf - f\beta$$
$$= as - es - f\beta = \alpha e - f\beta.$$

Daher ist $A = 0$ für $\alpha e = f\beta$; folglich ist $\alpha E = \beta F$, und für $\alpha e = 0$ ist auch $f\beta = 0$, d. h. bei horizontaler Lage des Balanciers hat der Gegenlenker die horizontale Lage βm.

Nun ist $AE\beta$ Eine Gerade (wegen $\beta\gamma = PE$), daher auch αBF Eine Gerade, weil $\alpha E = F\beta$. Da $AB = \alpha\beta$, $Bg = \alpha E$, $\angle AgB = \angle \alpha F\beta$, so ist $\triangle ABg \cong \triangle \alpha\beta F$, $Ag = \alpha F$, $AE = BF$. Ferner ist $\alpha s = \beta\gamma$, $\alpha E = F\beta$, also $Es = F\gamma$, und $\angle AEs = \angle BF\gamma$; daher $\triangle AEs \cong BF\gamma$, und $B\gamma = As = \gamma\beta$. Hieraus folgt, dass γ die Axe des Gegenlenkers und dass die Länge desselben $= r$ ist.

Da $A = \alpha e - \beta f$, so ist wahrscheinlich nahe

$$A = \frac{ae^2}{2r} - \frac{bf^2}{2r};$$

um uns aber zu überzeugen, ob der Fehler dieses Werthes im Verhältniss zu A klein sei, suchen wir den genauen Werth von $\frac{ae^2 - bf^2}{2r}$. Wir haben

$$\frac{ae^2 - bf^2}{2r} = \frac{\alpha e\,(2r - \alpha e) - \beta f\,(2r - \beta f)}{2r}$$
$$= \alpha e - \frac{\alpha e^2}{2r} - \beta f + \frac{\beta f^2}{2r}$$
$$= (\alpha e - \beta f)\left(1 - \frac{\alpha e + \beta f}{2r}\right),$$

also genau

$$A = \alpha e - \beta f = \frac{ae^2 - bf^2}{2r.\left(1 - \frac{\alpha e + \beta f}{2r}\right)} = \frac{ae^2 - bf^2}{2r - (\alpha e + \beta f)},$$

und in der Praxis immer sehr nahe

$$A = \frac{ae^2 - bf^2}{2r - 2\alpha e},$$

und da $ae^2 - bf^2 = (ae + bf).(ae - bf)$, noch sehr nahe

$$A = ae.\frac{ae - bf}{r - \alpha e}.$$

Bei der Ausführung pflegt man aber AE höchstens $= \frac{As}{3} = \frac{r}{3}$

zu nehmen, und für das Maximum von A (worauf es hier ankommt) ist ae sehr nahe $=\frac{3}{5}\,\alpha E$ (siehe unten), also höchstens $=\frac{3}{5}\cdot\frac{AE^2}{2r}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\left(\frac{r^2}{9}\right)}{2r}=\frac{r}{30}$. Daher ist höchstens

$$A = ae\,.\frac{ae-bf}{r-\frac{r}{30}} = \frac{1{,}034}{r}\,.\,ae\,.(ae-bf).$$

Für den geringsten Werth, welchen AE in der Ausübung zu erhalten pflegt, nämlich für $AE=\frac{r}{4}$, erhält man den grössten Werth von $A=\frac{1{,}02}{r}\,.\,ae\,.(ae-bf)$. Wir setzen daher

$$A = \frac{1{,}03}{r}\,.\,ae\,.(ae-bf).$$

Für die obere Hälfte des Hubes (Taf. V. Fig. 1.) ist demnach die Abweichung

$$A = \frac{1{,}03}{r}\,.\,ae\,.(ax-\alpha F),$$

also positiv (d. h. sie findet nach der Axe s hin Statt), weil $ab=\alpha\beta$, und $\angle bax < \angle \beta\alpha F$, $ax > \alpha F$. Dagegen ist in der unteren Hälfte (Taf. V. Fig. 2.)

$$A = \frac{1{,}03}{r}\,.\,a'e'\,.(a'e'-b'f') = \frac{1{,}03}{r}\,.\,a'e'\,.(\alpha F-a'x')$$
$$= -\frac{1{,}03}{r}\,.\,a'e'\,.(a'x'-\alpha F),$$

also für denselben Werth von ae (oder $a'e'$) eben so gross wie in der oberen Hälfte, aber negativ (d. h. in der Richtung von s nach a), weil $a'x' > \alpha F$ ist.

Es ist also allgemein sehr nahe

$$A = \pm\frac{1{,}03}{r}\,.\,ae\,.(ax-\alpha F).$$

Bezeichnet l die Länge AB eines Hängeeisens, so ist

$$ax = \sqrt{l^2-bx^2}.$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
bx &= F\beta - ae - f\beta = F\beta - ae - (ae - A) \\
&= F\beta - 2ae + A, \\
bx^2 &= F\beta^2 - 4.ae.F\beta + 4.ae^2 + 2.(F\beta - 2ae).A + A^2,
\end{aligned}
$$

daher

$$
\begin{aligned}
ax &= \surd(l^2 - F\beta^2 + 4.\alpha e.F\beta - 4.\alpha e^2 - 2(F\beta - 2\alpha e).A - A^2) \\
&= \surd(\alpha F^2 + 4.\alpha e.(F\beta - \alpha e) + 2(2\alpha e - F\beta).A - A^2)
\end{aligned}
$$

Da aber, wie man sich leicht überzeugt, das erste Glied αF^2 mehr als das Hundertfache der Summe der übrigen Glieder ist, so hat man sehr nahe

$$
ax = \alpha F + \frac{4.\alpha e.(F\beta - \alpha e) + 2(2.\alpha e - F\beta)A - A^2}{2.\alpha F},
$$

daher

$$
A = \frac{1{,}03}{r}.ae.\frac{4.\alpha e.(F\beta - \alpha e) + 2(2.\alpha e - F\beta)A - A^2}{2.\alpha F},
$$

$$
\left(\frac{2.\alpha F.r}{1{,}03.ae} - 2(2.\alpha e - F\beta) + A\right).A = 4.\alpha e.(F\beta - \alpha e).
$$

Es ist aber in der Ausführung $\frac{\alpha F}{ae}$ wenigstens $= 2$, also $\frac{2.\alpha F.r}{1{,}03.ae}$ wenigstens $= 4r$, so dass die übrigen Glieder in der Klammer verschwinden, und man sehr nahe

$$
A = \frac{1{,}03.ae}{\alpha F.r}.2.\alpha e.(F\beta - \alpha e)
$$

erhält. Nun ist $ae = \sqrt{\alpha e.(2r - \alpha e)}$, und wenn wir wie oben für αe seinen grössten Werth $= \frac{r}{30}$ setzen, $ae = \sqrt{\alpha e.2r(1 - \frac{1}{60})}$ oder näherungsweise $ae = (1 - \frac{1}{120}).\sqrt{\alpha e.2r}$. Daher ist hinlänglich genau

$$
A = \frac{1{,}02}{r}.\sqrt{\alpha e.2r}.\frac{2.\alpha e.(F\beta - \alpha e)}{\alpha F}.
$$

Der Ausdruck $x^{\frac{3}{2}}(a - x)$ wird ein Maximum für $x = \frac{3}{5}a$. Daher ist die grösste Abweichung sehr nahe

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1{,}02.2^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.F\beta^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{5}.F\beta}{\alpha F.r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{0{,}536}{\alpha F}.\sqrt{\frac{F\beta^5}{r}}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir den Kolbenhub durch h, so ist

$$F\beta = \frac{FB^2}{2r - F\beta},$$

also sehr nahe

$$F\beta = \frac{FB^2}{2r - \frac{FB^2}{2r}} = \frac{2r\left(\frac{h}{4}\right)^2}{4r^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2} = \frac{2rh^2}{64r^2 - h^2},$$

wofür wir, weil immer nahe $r = \frac{3}{4}h$ genommen wird,

$$F\beta = \frac{2rh^2}{62r^2} = \frac{2h^2}{62r}$$

setzen können. Diess giebt

$$\sqrt{\frac{F\beta^5}{r}} = \sqrt{\frac{2^5 . h^{10}}{62^5 . r^6}} = 0{,}000187 . \frac{h^5}{r^3},$$

und, wenn wir αF näherungsweise $= l$ setzen,

$$A = \frac{0{,}536}{l} . 0{,}000187 . \frac{h^5}{r^3} = 0{,}000105 . \frac{h^5}{lr^3}.$$

Wird in dem Werthe von $F\beta$ der Hub $h = r$ gesetzt, was gleichfalls gebräuchlich ist, so erhält man $A = 0{,}000095 . \frac{h^5}{lr^3}$. Wir können also ohne Bedenken den Mittelwerth für A nehmen, nämlich

$$A = 0{,}0001 . \frac{h^5}{lr^3}$$

setzen, indem ein Unterschied von $\frac{1}{20}$ des Ganzen hierbei auf die Wahl der Abmessungen keinen Einfluss haben kann.

Nimmt man, wie gewöhnlich, der Watt'schen Vorschrift gemäss, $r = \frac{3}{4}h$ und $l = \frac{h}{2}$, so ist die grösste Abweichung $A = 0{,}00048 . h$, also für $h = 1$ Meter nahe $A = 0{,}5$ Millimeter, und für $h = 2{,}44$ Meter (den grössten gebräuchlichen Hub) $A = 1\frac{1}{6}$ Millimeter. Sollte, für $r = \frac{3}{4}k$ und $h = 2$ Meter, A nur $= 0{,}5$ Millimeter sein, so müsste l beinahe gleich h sein; $h = 2{,}44$ Meter, $l = \frac{h}{2}$ und $A = 0{,}5$ Millimeter fordert r beinahe $= h$.

XXXI.

Analytische Behandlung einiger die Linien zweiten Grades betreffenden Gegenstände.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

I. Die Grundeigenschaft von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt als Directrix *).

Gewöhnlich (m. s. z. B. Magnus Sammlung etc. Thl. I. pag. 161. seqq.) pflegt man von der allgemeinen Theorie der Reciprocitätsverwandtschaft auszugehen, und die Resultate dann auf den Kegelschnitt zu übertragen; des Folgenden wegen werde ich das Haupttheorem der Polarität unmittelbar für den Kegelschnitt als Directrix erweisen, und für die allgemeinste Gleichung des letztern die Polare und den Pol zu bestimmen suchen.

§. 1.

Der Berührungspunkt einer von dem ausserhalb des Kegelschnitts $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$ liegenden Punkte p, q an den Kegelschnitt gezogenen Tangente werde mit x, y bezeichnet. Die Gleichung dieser Tangente ist bekanntlich

$$(q-y)(Ay+Bx+D)+(p-x)(By+Cx+E)=0,$$

oder

$$q(Ay+Bx+D)+p(By+Cx+E)-y(Ay+Bx+D)-x(By+Cx+E)=0,$$

indem p, q die laufenden Coordinaten sind. Da nun

$$y(Ay+Bx+D)+x(By+Cx+E)=Ay^2+2Bxy+Cx^2+Dy+Ex$$
$$=-(Dy+Ex+F),$$

---

*) Eine rein geometrische Behandlung dieses Gegenstandes s. m. im Archiv. Thl. V. pag. 135. seqq.

so ist die Gleichung der Tangente:

$$q(Ay+Bx+D)+p(By+Cx+E)+Dy+Ex+F=0,$$

oder der Berührungspunkt x, y genügt folgender Gleichung:

$$1.\quad (Aq+Bp+D)y+(Bq+Cp+E)x+Dq+Ep+F=0.$$

Die letztere drückt eine Gerade aus, in welcher die beiden stets existirenden Berührungspunkte liegen, und welche **Berührungssehne** genannt wird.

§. 2.

Lehrsatz.

Liegen mehrere Punkte ausserhalb eines Kegelschnitts in gerader Linie, so treffen die den einzelnen Punkten entsprechenden Berührungssehnen in demselben Punkte zusammen, einen besondern Fall ausgenommen, in welchem die Berührungssehnen parallel sind.

Beweis.

Die Gerade, in welcher die in Rede stehenden Punkte liegen, sei $q=mp+n$ (p, q laufende Coordinaten), und p, q; p_1, q_1 seien die Coordinaten von zwei beliebigen Punkten derselben. Die den letztern entsprechenden Berührungssehnen werden nach 1. ausgedrückt durch

$$a)\quad \left.\begin{array}{l}[(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E]p\\ +(An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F\end{array}\right\}=0,$$

$$b)\quad \left.\begin{array}{l}[(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E]p_1\\ +(An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F\end{array}\right\}=0;$$

nachdem $mp+n$ für q, mp_1+n für q_1 gesetzt worden *).

α) Es kann nun der Fall vorkommen, dass die Geraden $a)$ und $b)$ parallel sind; er tritt nämlich dann ein, wenn der Werth des Bruchs

$$\frac{(Bm+C)p+Bn+E}{(Am+B)p+An+D}$$

von der Grösse p ganz unabhängig ist. Die dazu erforderliche und ausreichende Bedingungsgleichung ergiebt sich, wenn man obigen Bruch der Constanten γ gleich setzt, und die Gleichung dann auf Null bringt, nämlich

---

*) Jede dieser Gleichungen, z. B. a), lässt sich auch unter folgender Form schreiben:

$$[(Am+B)p+(An+D)]y+[(Bm+C)p+(Bn+E)]x+(Dm+E)p+Dn+F=0.$$

$$[Bm+C-\gamma(Am+B)]p+Bn+E-\gamma(An+D)=0;$$

und diese Gleichung wird für jedes p gelten, wenn zugleich

$$Bm+C-\gamma(Am+B)=0,$$
$$Bn+E-\gamma(An+D)=0$$

ist. Eliminirt man γ, so entsteht

$$c)\quad (BD-AE)m-(B^2-AC)n+CD-BE=0.$$

Diese Gleichung zeigt dann, dass die gegebene Gerade $q=mp+n$ ein Durchmesser des Kegelschnitts ist. Denn was die Ellipse und Hyperbel betrifft, so sind die Coordinaten des Mittelpunkts bekanntlich

$$t=\frac{AE-BD}{B^2-AC},\quad u=\frac{CD-BE}{B^2-AC},$$

und nach c) also $u=mt+n$, weshalb der Mittelpunkt in der Geraden $q=mp+n$ liegt. — Mit Rücksicht auf die Parabel ist $B^2-AC=0$, und die Gleichung c) also $m=\frac{CD-BE}{AE-BD}$. Setzt man $CD-BE=H_1$, $AE-BD=H$, und eliminirt D zwischen beiden Gleichungen, so kommt $BH_1+CH=0$, oder $m=\frac{H_1}{H}=-\frac{C}{B}$, folglich die Gerade $q=mp+n$ ein Durchmesser, da die Durchmesser der Parabel bekanntlich in der Gleichung enthalten sind $Bu+Ct+E=0$.

Wenn also die gegebene Gerade ein Durchmesser des Kegelschnitts ist, so sind alle Berührungssehnen einander parallel, und werden durch die Gleichung ausgedrückt:

$$y=-\gamma x-\frac{(Dm+E)p+Dn+F}{(Am+B)p+An+D},$$

wo

$$\gamma=\frac{Bm+C}{Am+B}=\frac{Bn+E}{An+D},$$

und zwar sind alle Sehnen demjenigen Durchmesser parallel, welcher dem gegebenen conjugirt ist.

β) Ist die gegebene Gerade kein Durchmesser, so wird das Sehnenpaar a) und b) sich schneiden; zieht man b) von a) ab, so sieht man, dass der Coefficient von p oder p_1 verschwindet, folglich muss auch das zweite Glied der Gleichung a) oder b) verschwinden, und es schneiden sich die sämmtlichen Berührungssehnen in demselben Punkte, dessen Coordinaten durch die beiden Gleichungen bestimmt werden:

$$2.\quad \begin{cases}(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E=0,\\ (An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F=0.\end{cases}$$

Die erste Gleichung drückt (x, y veränderlich gedacht) den der gegebenen Richtung conjugirten Durchmesser, die zweite diejenige Berührungssehne aus, welche dem Durchschnitt der gegebenen Geraden mit der Ordinatenaxe entspricht, welches letztere leicht aus Gleichung 1. geschlossen wird.

§. 3.

Lehrsatz.

Schneiden sich beliebig viele Secanten eines Kegelschnitts in einem einzigen Punkte, oder sind einander parallel, so liegen die Durchschnitte aller Tangentenpaare, welche man in den beiden Durchschnittspunkten einer Secante mit dem Kegelschnitt an den letztern jedesmal ziehen kann, in einer geraden Linie.

Beweis.

α) Der gegebene Durchschnittspunkt sei p, q; und $y-q = m(x-p)$ die Gleichung einer durch ihn gezogenen, den Kegelschnitt in zwei Punkten treffenden Geraden. Wird diese als Berührungssehne des Punktes t, u angesehen, so ist nach 1.

$$(Au+Bt+D)y+(Bu+Ct+E)x+Du+Et+F=0.$$

Identificiren wir diese Gleichung mit $y-q=m(x-p)$, so ergiebt sich

$$m=-\frac{Bu+Ct+E}{Au+Bt+D},\quad q-mp=-\frac{Du+Et+F}{Au+Bt+D},$$

und wird m aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so entsteht

$$3.\quad (Aq+Bp+D)u+(Bq+Cp+E)t+Dq+Ep+F=0,$$

oder diejenige Gerade, in welcher die sämmtlichen Durchschnitte der Tangentenpaare liegen. Nach 1. ist sie die dem Punkte p, q entsprechende Berührungssehne, wenn der letztere ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

β) Die Geraden seien sämmtlich parallel, und durch $y=mx+n$ ausgedrückt, indem m als constant, n als veränderlich angesehen wird. Wird jede dieser Geraden wieder als Berührungssehne des Punktes t, u angesehen, so hat man wie in α)

$$m=-\frac{Bu+Ct+E}{Au+Bt+D},\quad n=-\frac{Du+Et+F}{Au+Bt+D}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$4.\quad (Am+B)u+(Bm+C)t+Dm+E=0,$$

und dies ist die Gleichung des der gegebenen Richtung conjugirten Durchmessers.

§. 4.

Anmerkung.

Der Durchschnittspunkt sämmtlicher Berührungssehnen, welche den einzelnen in einer Geraden liegenden Punkten entsprechen, wird der Pol dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt als Directrix, und die Gerade selbst die Polare genannt.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Durchschnitts der diesen Punkten entsprechenden Polaren.

Beweis.

Sind $p, q; p_1, q_1$ die gegebenen Punkte, so sind die Gleichungen ihrer Polaren (t, u laufende Coordinaten):

$$(Au+Bt+D)\,q+(Bu+Ct+E)\,p+Du+Et+F=0,$$
$$(Au+Bt+D)\,q_1+(Bu+Ct+E)\,p_1+Du+Et+F=0.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so kommt

$$\left(A\frac{q-q_1}{p-p_1}+B\right)u+\left(B\frac{q-q_1}{p-p_1}+C\right)t+D\frac{q-q_1}{p-p_1}+E=0;$$

multiplicirt man aber die erste Gleichung mit p_1, die andere mit p, und zieht sie dann von einander ab, so kommt

$$(Au+Bt+D)(p_1q-pq_1)+(Du+Et+F)(p_1-p)=0.$$

Diese beiden Gleichungen stimmen mit der Gleichung 2. in §. 2. überein, wenn man $\frac{q-q_1}{p-p_1}$ statt m, $\frac{p_1q-pq_1}{p_1-p}$ statt n setzt, und das Theorem ist somit erwiesen, da die Gleichung der die Punkte $p, q; p_1, q_1$ verbindenden Geraden $y-q=\frac{q-q_1}{p-p_1}(x-p)$, oder $y=\frac{q-q_1}{p-p_1}x+\frac{p_1q-pq_1}{p_1-p}$ ist.

§. 6.

Lehrsatz

Die Polare eines Punktes ist dem conjugirten Durchmesser desjenigen Durchmessers parallel, welcher durch diesen Punkt gezogen wird.

Beweis.

Für den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten ist nach 1. die Gleichung der Polaren $Dq + Ep + F = 0$.

α) Für die Ellipse und Hyperbel seien nun t, u die Coordinaten des Mittelpunkts, also $Y = \frac{u}{t}X$ die Gleichung des durch den Anfang gezogenen Durchmessers, somit die Gleichung des conjugirten Durchmessers $Y = -\frac{Bu+Ct}{Au+Bt}X + n$, oder, weil bekanntlich $Au+Bt+D=0$, $Bu+Ct+E=0$ ist: $Y = -\frac{E}{D}X + n'$, folglich dieser conjugirte Durchmesser mit der Polare parallel.

β) Mit Rücksicht auf die Parabel, welche keinen Mittelpunkt hat, ist die Gleichung des durch den Anfang gezogenen Durchmessers $By + Cx = 0$ (oder $Ay + Bx = 0$), und für seinen Durchschnitt mit der Curve ist zugleich $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$, oder (wegen $B^2-AC=0$, und $By+Cx=0$) $2Dy+2Ex+F=0$; also $y = \frac{CF}{2(BE-CD)}$, $x = -\frac{BF}{2(BE-CD)}$. Die Tangente in diesem Durchschnitt entspricht hier dem conjugirten Durchmesser; ihre Gleichung ist $Y = -\frac{E}{Ay+Bx+D}X + n$, aber $Ay + Bx = 0$, also $Y = -\frac{E}{D}X + n$, und somit auch für diese Curve der Satz erwiesen.

II. Drei Hauptsätze für das in und um einen Kegelschnitt beschriebene Viereck, wobei die Berührungspunkte des letztern die Ecken des erstern sind.

1) Der Durchschnitt zweier Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks liegt mit einem Paare der Gegenecken des umschriebenen in gerader Linie.

2) Die beiden Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare des eingeschriebenen Vierecks liegen mit den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseitenpaare des umschriebenen in gerader Linie.

3) Die vier Diagonalen des eingeschriebenen und umschriebenen Vierecks treffen in demselben Punkte zusammen.

§. 7.

Wenn die gerade Linie $y = mx + n$ mit dem Kegelschnitt $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ nur einen Punkt gemein hat, oder eine Tangente desselben ist, so findet man leicht die Bedingungsgleichung:

$$(B^2-AC)n^2 + 2(AE-BD)mn + (D^2-AF)m^2 + 2(DE-BF)m + 2(BE-CD)n + E^2-CF = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\alpha)\ \begin{cases} B^2-AC=G, & BE-CD=K, \\ BD-AE=H, & BF-ED=L, \\ D^2-AF=J, & E^2-CF=M; \end{cases}$$

so verwandelt sich obige Gleichung in

$$Gn^2-2Hmn+Jm^2+2Kn-2Lm+M=0.$$

Zweckmässig ist es, die Gerade $y=mx+n$ unter der Form

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

darzustellen; die vorhergehende Gleichung wird dann

$$5.\quad G\alpha^2\beta^2+2H\alpha\beta^2+J\beta^2+2K\alpha^2\beta+2L\alpha\beta+M\alpha^2=0.$$

§. 8.

Nimmt man nun die beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks als Axen der x und y, ihren Durchschnitt also als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnet die Coordinaten der Endpunkte dieses Vierecks durch α, 0; α_1, 0; 0, β; 0, β_1; so sind die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten:

$$6.\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta}=1, \\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta_1}=1, \\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta_1}=1; \end{cases}$$

und weil sie den Kegelschnitt berühren, so hat man nach 5. die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} 7.\quad G\alpha^2\beta^2+2H\alpha\beta^2+J\beta^2+2K\alpha^2\beta+2L\alpha\beta+M\alpha^2=0, \\ 8.\quad G\alpha_1{}^2\beta^2+2H\alpha_1\beta^2+J\beta^2+2K\alpha_1{}^2\beta+2L\alpha_1\beta+M\alpha_1{}^2=0, \\ 9.\quad G\alpha_1{}^2\beta_1{}^2+2H\alpha_1\beta_1{}^2+J\beta_1{}^2+2K\alpha_1{}^2\beta_1+2L\alpha_1\beta_1+M\alpha_1{}^2=0, \\ 10.\quad G\alpha^2\beta_1{}^2+2H\alpha\beta_1{}^2+J\beta_1{}^2+2K\alpha^2\beta_1+2L\alpha\beta_1+M\alpha^2=0. \end{cases}$$

Mittelst dieser vier Gleichungen können vier Coefficienten des Kegelschnitts bestimmt werden, einer bleibt unbestimmt (der sechste ist willkührlich), und es können also unendlich viele Linien zweiten Grades vier Gerade berühren. Versuchen wir jene vier Coefficienten zu bestimmen.

Eliminirt man M aus den beiden ersten Gleichungen, dann aus den beiden letzten, so kommt:

$$[2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1)]\beta + 2L\alpha\alpha_1 = 0,$$
$$[2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1)]\beta_1 + 2L\alpha\alpha_1 = 0;$$

zieht man diese Gleichungen von einander ab, so findet sich:

$$11. \quad \begin{cases} L = 0, \\ 2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man G aus 7. und 10., so wird wegen $L = 0$:

$$12. \quad 2K\beta\beta_1 + M(\beta+\beta_1) = 0.$$

Subtrahirt man endlich 10. von 7., so kommt wegen $L = 0$:

$$(G\alpha^2 + 2H\alpha + J)(\beta+\beta_1) + 2K\alpha^2 = 0;$$

führt man in diese Gleichung für $2H\alpha + J$ seinen Werth aus 11. ein, für $\beta+\beta_1$ seinen Werth aus 12., so wird:

$$13. \quad G\alpha\alpha_1\beta\beta_1 - J\beta\beta_1 - M\alpha\alpha_1 = 0.$$

Setzt man $\frac{H}{G} = H_1$, $\frac{J}{G} = J_1$, etc., und drückt mittelst der vier Gleichungen 11., 12., 13. durch M_1 die vier übrigen Grössen aus, so erhält man:

$$14. \quad \begin{cases} L_1 = 0, \\ 2K_1 = -\frac{\beta+\beta_1}{\beta\beta_1} M_1, \\ 2H_1 = +\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1), \\ J_1 = -\frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1). \end{cases}$$

Noch sind Relationen zwischen den Grössen G, H, J etc. und den ursprünglichen Coefficienten A, B, C, etc. von Wichtigkeit. Man braucht nur auf die Relationen a) zurückzugehen.

15.
Aus der 4ten u. 5ten (B eliminirt) folgt $DM - FK = 0$.
„ „ „ „ „ (D „) „ $BM - EK = 0$.
Aus der 2ten u. 4ten (E eliminirt) folgt $BJ - DH = 0$.
„ „ „ „ „ (B „) „ $EJ - FH = 0$.
Aus der 2ten u. 4ten (E eliminirt) folgt $DG - BH - AK = 0$.
„ „ „ „ „ (D „) „ $EG - CH - BK = 0$.

§. 9.

Aus den Betrachtungen im vorigen Paragraphen ergiebt sich leicht die Auflösung der Aufgabe: den Ort des Mittelpunkts aller Linien zweiten Grades zu bestimmen, welche vier Gerade berühren. Denn sind x, y die Coordinaten dieses Mittelpunktes, so ist bekanntlich

$$x = -\frac{H}{G},\ y = -\frac{K}{G},\ \text{oder}\ x = -H_1,\ y = -K_1;$$

also nach 14.:

$$2x = -\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1),$$
$$2y = +\frac{\beta+\beta_1}{\beta\beta_1}M_1.$$

Eliminirt man jetzt aus diesen beiden Gleichungen die Veränderliche M_1, so kommt als Gleichung des gesuchten Orts:

$$2y(\alpha+\alpha_1) + 2x(\beta+\beta_1) = (\alpha+\alpha_1)(\beta+\beta_1).$$

Bei der Discussion dieser Geraden halte ich mich nicht auf, da dieser Gegenstand schon oft abgehandelt ist.

§. 10.

Da die Seiten des eingeschriebenen Vierecks Berührungssehnen sind, so ist nach 1. die Gleichung

16. der dem Punkte α, 0 entsprechenden:
$$(B\alpha + D)y + (C\alpha + E)x + E\alpha + F = 0;$$
der dem Punkte α_1, 0 entsprechenden:
$$(B\alpha_1 + D)y + (C\alpha_1 + E)x + E\alpha_1 + F = 0;$$
der dem Punkte 0, β entsprechenden:
$$(A\beta + D)y + (B\beta + E)x + D\beta + F = 0;$$
der dem Punkte 0, β_1 entsprechenden:
$$(A\beta_1 + D)y + (B\beta_1 + E)x + D\beta_1 + F = 0.$$

Die Coordinaten des Durchschnitts der beiden ersten Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks sind also wegen $L = 0$ (vergl. 15.):

$$17.\quad x = 0,\ y = -\frac{M}{K} = -\frac{E}{B} = -\frac{F}{D} = \frac{2\beta\beta_1}{\beta+\beta_1}.$$

Die Coordinaten des Durchschnitts der beiden andern Gegenseiten sind:

$$18.\quad y=0,\ x=-\frac{J}{H}=-\frac{D}{B}=-\frac{F}{E}=\frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}.$$

Da also der erste Durchschnitt auf der Axe der y, der andere auf der Axe der x liegt, so haben wir das Theorem 1) erwiesen.

Betrachtet man ferner zwei Gegenecken des äussern Vierecks als zugeordnete Punkte, den Durchschnitt der Diagonalen als den dritten Punkt, so ist der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks (welcher mit den erwähnten Gegenecken und dem Durchschnitt der Diagonalen in gerader Linie liegt) der dem 3ten Punkte zugeordnete 4te harmonische Punkt, wie sich aus der Definition der 4 harmonischen Punkte, aus dem Werthe von y aus 17., oder von x aus 18. sehr leicht ergiebt.

§. 11.

Die Gleichung der Geraden, welche die Durchschnitte der Gegenseitenpaare des eingeschriebenen Vierecks verbindet, ist

$$Y=-\frac{\beta\beta_1(\alpha+\alpha_1)}{\alpha\alpha_1(\beta+\beta_1)}\left(X-\frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}\right),$$

oder, wie man leicht findet:

$$19.\quad \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)Y+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)X=2.$$

Nun genügt der Durchschnitt zweier Gegenseiten des um schriebenen Vierecks den beiden Gleichungen $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}=1$, $\frac{X}{\alpha_1}+\frac{Y}{\beta_1}=1$; der Durchschnitt der beiden andern Gegenseiten den beiden Gleichungen $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta_1}=1$, $\frac{X}{\alpha_1}+\frac{Y}{\beta}=1$. Durch Addition ergiebt sich, dass der Durchschnitt irgend zweier Gegenseiten der Gleichung $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)Y+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)X=2$, d. i. der Gleichung 19. genügt, und somit haben wir auch das Theorem 2) erwiesen.

§. 12.

Die Grössen α, α_1, β, β_1 lassen sich auch durch die Coefficienten des Kegelschnitts A, B, C, etc. ausdrücken. Denn nach 14. ist:

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}=-\frac{2K_1}{M_1}=-\frac{2D}{F} \text{ (cf. 15.)}, \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}=-\frac{2H_1}{J_1}=-\frac{2E}{F};$$

folglich wird die Gleichung 19.:

$$20. \quad DY+EX+F=0.$$

Dies ist aber die Gleichung der Polaren des Anfangs der Coordinaten, und somit ist die Gerade, in welcher die vier Durchschnitte der Gegenseiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vierecks liegen, die Polare des Durchschnitts der beiden Diagonalen.

§. 13.

Das Theorem 3) endlich kann durch die Theorie der Polarität am einfachsten erwiesen werden.

Es sei Taf. V. Fig. 3 $ABCD$ das eingeschriebene, $KLMN$ das umschriebene Viereck. Weil K der Pol von AB, M der Pol von CD, so ist KM die Polare des Durchschnitts von AB und CD (cf. §. 5.), ebenso ist die Diagonale LN die Polare des Durchschnitts von BC und AD. Ferner ist B der Pol von KL, D der Pol von MN, also BD die Polare des Durchschnitts von KL und MN, ebenso AC die Polare des Durchschnitts von LM und KN. Da nun die 4 Durchschnitte der Gegenseiten des innern und äussern Vierecks in einer Geraden liegen, so werden ihre Polaren, nämlich die vier Diagonalen, sich in einem Punkte, dem Pole jener Geraden, schneiden.

XXXII.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte.

Von
dem Herausgeber.

Das sogenannte Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte ist eine für die Praxis so wichtige Aufgabe, dass jede neue Auflösung derselben, welche einigen Nutzen für die praktische Anwendung verspricht, nicht ganz unbeachtet bleiben wird. Die Auflösungen, welche ich in diesem Aufsatze geben werde, gründen sich auf einen sehr leicht zu beweisenden geometrischen Lehrsatz, der auf folgende Art ausgesprochen werden kann, wobei man Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 2. zu vergleichen hat.

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise sich in den Punkten C und D schneiden, von einem dieser beiden Durchschnittspunkte, etwa von dem Punkte C aus, zwei beliebige, die beiden Kreise zum zweiten Male in den Punkten A und B schneidende gerade Linien AC und BC gezogen, und an diese beiden geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die einander gleichen Winkel CAA' und CBB' gelegt werden, deren nöthigenfalls über die Punkte A und B hinaus verlängerte Schenkel AA' und BB' die beiden Kreise zum zweiten Male in den Punkten A_1 und B_1 schneiden; so geht die durch die Punkte A_1 und B_1 der Lage nach bestimmte gerade Linie jederzeit durch den zweiten Durchschnittspunkt D der beiden Kreise, und ist gegen die Linie DC unter demselben Winkel geneigt wie die Linien AA' und BB' gegen die Linien AC und BC, wenn man nur alle diese Winkel von den Linien AC, BC, DC an nach den Linien AA', BB', A_1B_1 hin ganz in demselben Sinne durchläuft.

Beweis.

In dem in Taf. VI. Fig. 1. dargestellten Falle ist

$$\angle CDA_1 = \angle CAA_1 = \angle CAA',$$

und in dem Vierecke $BCDB_1$ ist

$$\angle CBB' + \angle CDB_1 = 2R.$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$\angle CAA' = \angle CBB',$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\angle CDA_1 = \angle CBB'$$

ist, so ist

$$\angle CDA_1 + \angle CDB_1 = 2R.$$

Hiermit ist der Satz offenbar vollständig bewiesen.

In dem in Taf. VI. Fig. 2. dargestellten, und überhaupt in jedem andern Falle, kann der Satz ganz auf ähnliche Art bewiesen werden, was Alles zu einfach ist, als dass es hier noch einer weiteren Erläuterung bedürfen sollte.

Wenn man nun nur noch überlegt, dass in beiden Fällen was sehr leicht zu beweisen ist, sowohl die Winkel CDA und CA_1A', als auch die Winkel CDB und CB_1B, einander gleich sind, so wird man leicht die folgende Auflösung des Problems der drei Punkte verstehen, wobei man Taf. VI. Fig. 3. zu vergleichen hat.

Erste Methode des Rückwärtseinschneidens.

Wenn die den drei Punkten 𝔄, 𝔅, ℭ auf dem Felde entsprechenden Punkte A, B, C auf dem Messtische gegeben sind, und der dem vierten Punkte 𝔇 auf dem Felde entsprechende Punkt D auf dem Messtische gesucht wird, so lege man an die Linien AC und BC auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die beliebigen einander gleichen Winkel CAA' und CBB', und die beliebigen einander gleichen Winkel CAA'' und CBB'' an. Hierauf lege man die Kippregel an AA', orientire den Tisch nach 𝔄, lege die Kippregel an C, visire nach ℭ, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an $A''A$, orientire den Tisch wieder nach 𝔄, lege die Kippregel an C, visire nach ℭ, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_2 der Kippregel mit der Linie AA''. Nun lege man die Kippregel an $B'B$, orientire den Tisch nach 𝔅, lege die Kippregel an C, visire nach ℭ, und bestimme

in dieser Lage den Durchschnittspunkt B_1 der Kippregel mit der Linie BB'. Endlich lege man die Kippregel an BB'', orientire den Tisch wieder nach 𝔅, lege die Kippregel an C, visire nach ℭ, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt B_2 der Kippregel mit der Linie BB''. Zieht man nun die Linien A_1B_1 und A_2B_2, so ist deren Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt D.

Dass man die Linien auf dem Messtische nie ganz, sondern immer nur so weit ausziehen muss, als zur Bestimmung ihrer Durchschnittspunkte unumgänglich erforderlich ist, weiss Jeder, der mit der Messtischpraxis nur einigermassen vertraut ist.

Aus dem oben bewiesenen Lehrsatze ergiebt sich aber unter denselben Voraussetzungen wie vorher, wobei man Taf. VI. Fig. 4. zu vergleichen hat, unmittelbar auch die folgende

Zweite Methode des Rückwärtseinschneidens.

An die Linien AC und BC lege man auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die beliebigen einander gleichen Winkel CAA' und CBB'. Hierauf lege man die Kippregel an $A'A$, orientire den Tisch nach 𝔄, lege die Kippregel an C, visire nach ℭ, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an BB', orientire den Tisch nach 𝔅, lege die Kippregel an C, visire nach ℭ, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt B_1 der Kippregel mit der Linie BB'. Endlich ziehe man die Linie A_1B_1 und lege durch den Punkt C eine Linie CD, welche mit der Linie A_1B_1 den, den Winkeln CAA' und CBB' gleichen Winkel CDB_1 einschliesst, so ist der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Linie A_1B_1 der gesuchte Punkt D.

Das Anlegen der gleichen Winkel an die Linien AC, BC und A_1B_1 nach den im Vorhergehenden gegebenen näheren Bestimmungen kann man, wie es mir scheint, mit aller erforderlichen Genauigkeit mittelst eines ungleichseitigen hölzernen Dreiecks und eines hölzernen Lineals auf bekannte Weise ausführen, worüber hier nichts weiter zu sagen ist. Will man aber auch diese ganz einfachen Instrumente, welche für andere Operationen doch unentbehrlich sind, ausschliessen, und sich nur den Gebrauch der Kippregel gestatten, so kann man sich zu dem Antragen der Winkel nach den aus dem Obigen bekannten Bestimmungen auch sehr zweckmässig beliebiger, nur möglichst scharf begränzter Objecte auf dem Felde, welche sich gewiss in allen Fällen leicht werden finden lassen, bedienen, wozu eine weitere Anleitung hier ebenfalls nicht erforderlich ist, weil ein Jeder, der nur mit der Einrichtung und dem Gebrauche des Messtisches hinreichend bekannt ist, die sämmtlichen hierzu erforderlichen Operationen leicht in Ausführung zu bringen im Stande sein wird.

Noch eine Auflösung unserer Aufgabe, die aber eigentlich nur als eine Modification der vorhergehenden allgemeineren Methoden anzusehen ist, ergiebt sich aus den folgenden Betrachtungen.

In Taf. VI. Fig. 5. sei $\angle CAA' = \angle CDB$, und die Linie AA' schneide den um das Dreieck ACD beschriebenen Kreis zum zweiten Male in dem Punkte A_1. Zieht man dann die Linie A_1D, so ist in dem Vierecke $ACDA_1$ nach einem bekannten Satze

$$\angle CDA_1 + \angle CAA' = 2R,$$

also nach der Voraussetzung

$$\angle CDA_1 + \angle CDB = 2R,$$

und A_1DB ist folglich eine gerade Linie. Nimmt man nun hierzu noch, dass $\angle CDA = \angle CA_1A$ ist, so ergiebt sich unmittelbar die folgende

Dritte Methode des Rückwärtseinschneidens.

Man lege die Kippregel an AC, orientire den Tisch nach 𝔈, drehe die Kippregel um A, visire nach 𝔅, und ziehe an der Kippregel die Linie AA'. Hierauf lege man die Kippregel in umgekehrter Lage an $A'A$, orientire den Tisch nach 𝔄, lege die Kippregel an C, visire nach 𝔈, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an A_1B und orientire den Tisch nach 𝔅, worauf derselbe richtig orientirt sein wird, so dass, wenn man die Kippregel an A oder C legt und respective nach 𝔄 oder 𝔈 visirt, der Durchschnittspunkt der Kippregel in dieser Lage mit der Linie A_1B den gesuchten Punkt D geben wird.

Dass man ein ganz ähnliches Verfahren wie so eben auf den Punkt A auch auf den Punkt B anwenden, und dadurch eine zweite der Linie A_1B analoge Linie AB_1 erhalten könnte, wo dann der gesuchte Punkt D der Durchschnittspunkt der beiden Linien A_1B und AB_1 sein würde, versteht sich von selbst. Das vorhergehende Verfahren ist aber einfacher und verdient daher den Vorzug.

Ich hoffe späterhin noch auf diesen Gegenstand in anderer Beziehung zurückzukommen, und bemerke nur noch, dass bei einigen wirklich angestellten Versuchen die drei vorhergehenden Methoden mir den zu bestimmenden Punkt immer sogleich mit aller nur zu wünschenden Sicherheit geliefert haben, möchte aber freilich gern auch die von Anderen und in grösserer Anzahl als mir dies bis jetzt möglich gewesen ist, zu machenden Erfahrungen kennen lernen, da sich nur erst dann ein ganz sicheres Urtheil über die praktische Brauchbarkeit dieser neuen Methoden für eine der wichtigsten geodätischen Operationen wird fällen lassen.

XXXIII.

Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks $(x^2 + ax + b)^{-(\mu+1)}$.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Wir wollen uns vorerst die Aufgabe stellen, die höheren Differenzialquozienten von

$$(z^2 + k^2)^{-\mu}$$

zu entwickeln, weil sich aus ihrer Lösung leicht die des oben angedeuteten Problems ableiten lässt. Was nun aber die successiven Differenziationen des vorliegenden einfacheren Ausdrucks anbelangt, so findet hier der günstige Umstand statt, dass sich dieselben auf zwei ganz verschiedenen Wegen ohne die mindeste Schwierigkeit ausführen lassen, wodurch es nachher auch möglich wird, durch Vergleichung der beiden Resultate, welche man auf ihnen findet, einen sehr allgemeinen gar nicht mehr in die Differenzialrechnung gehörigen Satz als blosses Corollar aufzustellen.

I.

Zerlegen wir den obigen Ausdruck folgendermassen:

$$(z^2 + k^2)^{-\mu} = \frac{1}{(z + k\sqrt{-1})^\mu} \cdot \frac{1}{(z - k\sqrt{-1})^\mu},$$

so erhellt auf der Stelle, dass wir hier den bekannten Satz

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^n (u.v)}{\partial z^n} \\ &= n_0 u \frac{\partial^n v}{\partial z^n} + n_1 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^{n-1} v}{\partial z^{n-1}} + n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} v}{\partial z^{n-2}} + \ldots + n_n \frac{\partial^n u}{\partial z^n} v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

für

$$u = \frac{1}{(z + k\sqrt{-1})^{\mu}}, \quad v = \frac{1}{(z - k\sqrt{-1})^{\mu}} \tag{2}$$

in Anwendung bringen können. Bezeichnen wir der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ mit i und $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)$ mit $\overset{m}{[\mu]}$, so ist

$$\frac{\partial^m (z \pm ki)^{-\mu}}{\partial z^m} = (-1)^m \overset{m}{[\mu]} \frac{1}{(z \pm ki)^{\mu+m}},$$

also

$$\frac{\partial^m u}{\partial z^m} = (-1)^m \overset{m}{[\mu]} \frac{1}{(z+ki)^{\mu+m}}, \quad \frac{\partial^m v}{\partial z^m} = (-1)^m \overset{m}{[\mu]} \frac{1}{(z-ki)^{\mu+m}},$$

und wenn wir diese Gleichungen für die Formel (1) benutzen, ergiebt sich leicht

$$\frac{\partial^n (z^2 + k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= (-1)^n \Big\{ n_0 \frac{1}{(z+ki)^{\mu}} \cdot \frac{\overset{n}{[\mu]}}{(z-ki)^{\mu+n}} + n_1 \frac{\overset{1}{[\mu]}}{(z+ki)^{\mu+1}} \cdot \frac{\overset{n-1}{[\mu]}}{(z-ki)^{\mu+n-1}}$$

$$+ n_2 \frac{\overset{2}{[\mu]}}{(z+ki)^{\mu+2}} \cdot \frac{\overset{n-2}{[\mu]}}{(z-ki)^{\mu+n-2}} + \ldots\ldots \Big\}$$

Um nun hier die reellen und imaginären Partieen zu sondern, setzen wir

$$z \pm ki = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

woraus folgt

$$r\cos\varphi = z, \quad r\sin\varphi = k;$$

$$r = (z^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tan\varphi = \frac{k}{z} \text{ oder } \varphi = \operatorname{Arc}\tan\frac{k}{z}. \tag{3}$$

Es wird dann

$$\frac{1}{z+ki} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r}, \quad \frac{1}{z-ki} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{r},$$

und wenn wir noch die Gleichungen

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi \pm i \sin m\varphi,$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi) = \cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)$$

in Anwendung bringen, so nimmt unser Differenzialquotient folgende Form an:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{r^{2\mu+n}}\Big\{n_0[\mu]^{n}[\cos n\varphi+i\sin n\varphi]+n_1[\mu]^{1}[\mu]^{n-1}[\cos(n-2)\varphi+i\sin(n-2)\varphi]$$

$$+n_2[\mu]^{2}[\mu]^{n-2}[\cos(n-4)\varphi+i\sin(n-4)\varphi]+\ldots\Big\}.$$

Da nun aber der fragliche Differenzialquotient doch nur eine reelle Grösse sein kann, weil es $(z^2+k^2)^{-\mu}$ ist, so folgt, dass die imaginäre Partie der vorstehenden Gleichung sich von selbst annulliren muss *), so dass wir vermöge des Werthes von r erhalten:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}}}\Big\{n_0[\mu]^{n}\cos n\varphi+n_1[\mu]^{1}[\mu]^{n-1}\cos(n-2)\varphi$$

$$+n_2[\mu]^{2}[\mu]^{n-2}\cos(n-4)\varphi+\ldots\Big\}.$$

Dividiren wir beiderseits mit $1.2..n$ und bemerken, dass für ein ganzes positives p

$$\frac{n_p[\mu]^{p}[\mu]^{n-p}}{1.2..n}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)\cdot\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-p+1)}{1.2\ldots n}$$

$$=\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-p+1)}{1.2\ldots(n-p)}$$

$$=(\mu+p-1)_p\,(\mu+n-p+1)_{n-p}$$

ist, so gelangen wir zu dem Resultate:

$$\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}}}\{(\mu-1)_0(\mu+n-1)_n\cos n\varphi+\mu_1(\mu+n-2)_{n-1}\cos(n-2)\varphi$$

$$+(\mu+1)_2(\mu+n-3)_{n-2}\cos(n-4)\varphi+\ldots\},$$

oder $\mu+1$ für μ gesetzt:

---

*) Schreibt man die Reihe, welche den Koeffizienten von i bildet, wirklich hin, so sieht man diess auch a posteriori daran, dass sich diejenigen Glieder gegen einander heben, welche von Anfang und Ende gleichweit entfernt sind.

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n(z^2+k^2)^{-(\mu+1)}}{\partial z^n}$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}+1}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi\\&\qquad+(\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi\\&\qquad+(\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi+\ldots\}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

wobei rechts $n+1$ Glieder stehen und φ die unter Nro. (3) angegebene Bedeutung hat!

Nehmen wir endlich

$$z=x+\tfrac{1}{2}a,\quad k=\sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2},$$

so wird nach Nro. (3)

$$\varphi=\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}{x+\frac{1}{2}a}=\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2x+a},\quad(5)$$

ferner

$$z^2+k^2=x^2+ax+b,$$
$$\partial z=\partial x;$$

und mithin erhalten wir jetzt die folgende Lösung unseres Problemes:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}}{\partial x^n}\\&=\frac{(-1)^n}{(x^2+ax+b)^{\mu+\frac{n}{2}+1}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi\\&\qquad+(\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi\\&\qquad+(\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi+\ldots\}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Man wird leicht bemerken, dass in dieser $(n+1)$gliedrigen Reihe diejenigen Glieder gleich sind, die von Anfang und Ende gleichweit abstehen, und man könnte daher dieselben zusammennehmen, wobei jedoch gerade und ungerade n unterschieden werden müssen, weil im ersten Falle ein Mittelglied existirt, während es im zweiten fehlt.

II.

Eine von der obigen ganz verschiedene Lösung unseres Problemes ergiebt sich aus dem allgemeinen Satze

$$\frac{\partial^n f(z^2)}{\partial z^n}=(2z)^n f^{(n)}(z^2)+2.n_2(2z)^{n-2}f^{(n-1)}(z^2)$$
$$+3.4.n_4(2z)^{n-4}f^{(n-2)}(z^2)+\ldots.$$

von dessen Richtigkeit man sich u. A. mittelst der Bernoullischen Induktion überzeugen kann. Nimmt man hier

$$f(y) = (y + k^2)^{-\mu},$$

so wird für ein ganzes positives n:

$$f^{(n)}(y) = (-1)^n [\mu]^n \frac{1}{(y+k^2)^{\mu+n}},$$

$$f^{(n)}(z^2) = (-1)^n [\mu]^n \frac{1}{(z^2+k^2)^{\mu+n}};$$

und folglich

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^\mu} \left\{ [\mu]^n \frac{(2z)^n}{(z^2+k^2)^n} - 2 . n_2 [\mu]^{n-1} \frac{(2z)^{n-2}}{(z^2+k^2)^{n-1}} + 3 . 4 . n_4 [\mu]^{n-2} \frac{(2z)^{n-4}}{(z^2+k^2)^{n-2}} + \ldots \right\},$$

oder, wenn man mit $(2z)^n$ in die Parenthese multiplizirt und

$$2 n_2 = \frac{n(n-1)}{1}, \quad 3 . 4 . n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2},$$

$$4 . 5 . 6 . n_6 = \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1 . 2 . 3}, \text{ etc.}$$

setzt:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2z)^n (z^2+k^2)^\mu} \left\{ [\mu]^n \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n - \frac{n(n-1)}{1} [\mu]^{n-1} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{1 . 2} [\mu]^{n-2} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2} - \ldots \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich nun leicht durch Division mit $1 . 2 \ldots n$:

$$\frac{1}{1 . 2 \ldots n} \cdot \frac{\partial^n (z^2+k^2)^{\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2z)^n (z^2+k^2)^\mu} \left\{ (\mu+n-1)_n \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n - \frac{n-1}{1} (\mu+n-2)_{n-1} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2} (\mu+n-3)_{n-2} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2} - \ldots \right\}$$

oder $\mu+1$ für μ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(z^2+k^2)^{-(\mu+1)}}{\partial z^n}\\
&=\frac{(-1)^n}{(2z)^n(z^2+k^2)^{\mu+1}}\left\{n_0(\mu+n)_n\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n\right.\\
&\qquad -(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}\\
&\qquad \left.+(n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2}-\ldots\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Nehmen wir auch in dieser Gleichung die Substitutionen

$$z=x+\tfrac{1}{2}a,\quad k=\sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2}$$

vor und setzen zur Abkürzung

$$\frac{(2x+a)^2}{x^2+ax+b}=X,$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}}{\partial x^n}\\
&=\frac{(-1)^n}{(2x+a)^n(x^2+ax+b)^{\mu+1}}\left\{n_0(\mu+n)_nX^n\right.\\
&\qquad -(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}X^{n-1}\\
&\qquad \left.+(n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}X^{n-2}-\ldots\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

wobei die Reihe nicht weiter fortgesetzt wird, als bis sich eines ihrer Glieder annullirt.

III.

Wir wollen nun die beiden verschiedenen Lösungen unseres Problemes mit einander vergleichen, wobei es am einfachsten ist, die Gleichungen (4) und (7) zusammenzuhalten. Es ergiebt sich so die Relation

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(z^2+k^2)^{\frac{n}{2}}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi+(\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi+\ldots\}\\
&=\frac{1}{(2z)^n}\left\{n_0(\mu+n)_n\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}+\ldots\right\}
\end{aligned}$$

wobei noch für φ der Werth $\operatorname{Arctan}\frac{k}{z}$ zu setzen wäre, wodurch φ aus der Gleichung verschwände. Man kann aber eben so leicht

auch z herausschaffen, indem man es durch φ ausdrückt, weil nach dem Früheren $\tan\varphi = \frac{k}{z}$, folglich $z = k\cot\varphi$ ist. Hierdurch wird dann

$$\frac{1}{z^2+k^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{\cot^2\varphi+1} = \frac{\sin^2\varphi}{k^2},$$

$$\frac{4z^2}{z^2+k^2} = \frac{4\cot^2\varphi}{\cot^2\varphi+1} = (2\cos\varphi)^2;$$

und nun verwandelt sich die vorhergehende Relation in den folgenden goniometrischen Satz:

$$\sin^n\varphi\,\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi + \ldots\}$$
$$= \frac{\tan^n\varphi}{2^n}\{n_0(\mu+n)_n(2\cos\varphi)^{2n} - (n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{2n-2} + \ldots\},$$

der sich noch besser so gestaltet:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi \\ &\qquad + (\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi + \ldots \\ &= n_0(\mu+n)_n(2\cos\varphi)^n - (n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{n-2} \\ &\qquad + (n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots; \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

wobei links $n+1$ Glieder stehen und rechts nur so viele, dass keine negativen Exponenten von $2\cos\varphi$ vorkommen können.

Das vorliegende Theorem ist wegen der beiden völlig willkührlichen Grössen μ und n, die es enthält, von grosser Allgemeinheit und umfasst viele Sätze, die man auf anderen Wegen gefunden hat. Für $\mu = 0$ z. B. ergiebt sich

$$\cos n\varphi + \cos(n-2)\varphi + \cos(n-4)\varphi + \ldots + \cos(n-2n)\varphi$$
$$= n_0(2\cos\varphi)^n - (n-1)_1(2\cos\varphi)^{n-2} + (n-2)_2(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots.$$

Hierbei ist die linke Seite

$$= \cos n\varphi\,\{1 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \ldots + \cos 2n\varphi\}$$
$$+ \sin n\varphi\,\{\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \ldots + \sin 2n\varphi\}$$
$$= \cos n\varphi\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right\} + \sin n\varphi\left\{\frac{\cot\varphi}{2} - \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right\}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

wie man leicht durch eine kleine Reduktion findet. So kommen wir auf den Satz:

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^n - \frac{n-1}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots,$$

der auch sonst schon bekannt ist. — Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ergiebt sich aus der Gleichung (9) eine Relation, aus welcher sich sämmtliche von Herrn Dr. Björling im VIIten Theile S. 266. mitgetheilten Formeln ableiten lassen, wenn man sich auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n einlässt und einige Transformationen vornimmt.

Eine kritische Bemerkung möge diesen Aufsatz beschliessen. Man leitet oft arithmetische Sätze dadurch ab, dass man eine Funktion auf zwei verschiedene Weisen in eine nach steigenden Potenzen der Veränderlichen fortgehende Reihe verwandelt und dann eine Coeffizientenvergleichung vornimmt. Ich halte diese Methode für wissenschaftlich höchst unbedeutend, wenn ich auch ihre Brauchbarkeit bei Schülern von bloss elementaren Kenntnissen gern zugebe. Denn welchen Weg man auch zur Reihenentwickelung der Funktion einschlagen möge, so ist vermöge des Maclaurin'schen Theorems der Coeffizient von x^n nichts Anderes als $\frac{F^{(n)}(0)}{1.2..n}$; man findet also mittelst jener Methode nichts mehr und nichts weniger, als zwei bloss der Form nach verschiedene Ausdrücke für einen höheren Differenzialquotienten, aber nur in dem ganz speziellen Falle, dass man für jenen sich auf den Werth $x=0$ beschränkt. Es ist daher wissenschaftlich bei weitem richtiger, gleich direkt zwei verschiedene Formen für $F^{(n)}(x)$ aufzusuchen, wobei man den Vortheil hat, dass man in der Relation, welche sich aus der Vergleichung dieser Formen ergiebt, die Variable in ihrer ganzen Willkührlichkeit figuriren sieht und also zu einem Theoreme gelangt, welches schon an sich allgemeiner ist und wegen der darin vorkommenden Variablen auch für andere Zwecke, z. B. für die Integralrechnung, von Nutzen sein kann.



XXXIV.

Ueber geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Einkleidung.

§. 1. So wie der Kreis entschieden die einfachste krummlinige Raumgestalt ist, eben so hat man seit Euklid das Dreieck für die vermeintlich einfachste geradlinige Raumgestalt angesehen, und auf dessen Lehre alle weiteren Forschungen der Geometrie aufgebaut. Untersucht man jedoch die möglichen noch einfacheren geradlinigen Raumgebilde, so findet man deren zwei, die bisher der Aufmerksamkeit der Geometer entgangen zu sein scheinen, und die dennoch zu einer natürlichen Grundlage der Geometrie geeigneter sein dürften, als das Dreieck, nemlich:

1. Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte ausser ihr, und
2. Das System zweier paralleler ganzer Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.

§. 2. Dass diese zwei Gestalten wirklich einfacher als das Dreieck, ja sogar die einfachsten möglichen sind, leuchtet daraus ein, dass

a) an ihnen, so wie sie vorliegen, nur zwei Raumdinge, dort eine ganze Gerade und ein Punkt, hier 2 ganze Geraden, bei dem Dreiecke aber 3 Strecken und 3 Winkel als Bestandstücke vorkommen, und

b) dass zwei Systeme jener beiden Arten schon congruiren, wenn sie bloss je zwei Elemente, namentlich je eine Strecke und

je einen Winkel gleich haben, wogegen Dreiecke erst dann congruiren, wenn sie je 3 Elemente, namentlich je $n (= 1, 2, 3)$ Seiten und $3-n$ Winkel gleich haben; oder dass jedes jener Systeme durch die 2, jedes Dreieck aber durch die 3 genannten Elemente bestimmt wird; endlich

c) daraus, dass ein geradliniges Raumding, das nicht selbst ein Element — eine Strecke oder ein Winkel — sein soll, nicht durch weniger als 2 Elemente bestimmt werden kann.

§. 3. Von den angeführten zwei einfachsten Raumgestalten kann, wie man leicht einsieht, jegliche auf die andere zurückgeführt, daher auch nur die letztere als Grundlage beibehalten werden. Namentlich scheint es besser zu sein, das Parallelenpaar zu Grunde zu legen, indem es, wenn eine dieser Geraden in ihre Gesammtschaft von Punkten aufgelöst gedacht wird, aus lauter congruenten, stetig an einander hangenden Systemen einer Geraden und eines auswärtigen Punktes besteht.

§. 4. Dass endlich diese einfachsten Raumgestalten, vorzüglich die letztere, zur Aufstellung einer einleitenden Fundamentallehre der Geometrie geeigneter sind, als das Dreieck, erhellet aus folgender Betrachtung. Als, wenngleich unwissenschaftlichen so doch unabweisbaren, Grund der Haupteintheilung der Geometrie erkennt man allgemein an das Liegen der zu erforschenden räumlichen Gegenstände in einerlei Ebene oder nicht; wonach die gesammte Wissenschaft in ihre zwei Hauptabtheilungen, Geometrie der Ebene und des Raumes, Planimetrie und Stereometrie, zerfällt. Als Grund der ersten Untertheilung kann man jedoch nicht — wie neuerdings viel beliebt — die Congruenz, Aehnlichkeit und Messung (Metrik), sondern nur die Gattung der räumlichen Gegenstände gelten lassen, weil jene drei genannten Eigenschaften an jedem Raumdinge erforscht werden können, und also auch müssen.

Der Eintheilungsgrund der Gattungen planimetrischer Gegenstände kann aber nur die Beschaffenheit der sie ausmachenden Linien sein, und ihre Reihenfolge wird durch die grössere oder geringere Einfachheit und Zusammengesetztheit dieser Linien bedingt. Mithin ist zu allererst die gerade Linie — zumeist in ihrer Ganzheit — zu untersuchen, nachher kommen die gebrochenen Linien, und von ihnen vorzugsweise die geschlossenen — je nachdem sie ebene Figuren allseitig eingrenzen oder nicht, Vielecke oder Vielseite genannt —, endlich die krummen Linien zu erforschen. Mithin gehört das Parallelenpaar in die erste, das Dreieck aber in die zweite dieser drei naturgemäss gereihten Gattungen der planimetrischen Gegenstände.

§. 5. Die Fundamentallehre der Geometrie kann daher bloss die gerade Linie, und an ihr zuvörderst die Länge und Richtung, mithin die einfachsten Bestandstücke oder die Elemente aller Raumgebilde, nemlich die Strecken und Winkel erforschen. Hierauf hat sie zu untersuchen: die einfachsten Verbindungen, d. i. Paare ganzer Geraden, rücksichtlich ihres Zusamentreffens oder Getrenntseins, was die sogenannte Parallentheorie ausmacht.

An diese reiht sich nun ganz naturgemäss die Erforschung des Parallelenpaares, und (als einer Besonderheit) des Systems einer Geraden mit einem auswärtigen Punkte, vornehmlich rücksichtlich der gegenseitigen Einwirkung oder wechselseitigen Bestimmung der geometrischen Elemente — der Strecken und Winkel. Diese Wechselbeziehung verfolgt sie dann umständlich in der Lehre von der (orthogonalen) Projection auf gerade Linien und vorzugsweise in der von ihr eingeleiteten Goniometrie. Auf dieser Höhe ihrer Forschungen angelangt, vermag sie nunmehr die möglichen und üblichen Methoden der Untersuchung aller weitern verwickelteren Raumgebilde nach ihren Grundzügen darzulegen, und vorzugsweise für eine oder einige, dem Lehrzwecke angemessene Methoden sich zu entscheiden. Die Hauptgattungen dieser Methoden sind:

I. Die synthetische (anschauliche) der Alten, besonders der Griechen, und

II. Die rechnende der Späteren.

Zur letzteren zählt man als Arten:

1. die algebraische;
2. die goniometrische;
3. die Coordinatenmethode (s. g. analytische Geometrie), und zwar
   a) die der Parallel-Coordinaten,
   b) die der Polar-Coordinaten;
4. die Methode der harmonischen Proportionen — meist Neuere Geometrie genannt.

§. 6. Auf die genannten einfacheren Raumgebilde und auf die nach ihnen sich gestaltende Fundamentallehre der Geometrie war ich bereits im Frühling des Jahres 1839 verfallen, wollte sie jedoch erst in dem nach und nach von mir vorbereiteten Lehrbuche der reinen Mathematik bekannt geben. Allein da die gegenwärtig herrschende Fluth der elementar-mathematischen Lehrbücher die Kenntniss des in ihnen enthaltenen Guten und Neuen zumeist lediglich auf den engen Kreis der Schüler ihrer Verfasser beschränkt, so habe ich mich entschlossen, die Grundlinien der gewiss nicht unwichtigen Lehre von den Parallelenpaaren und jene der geometrischen Fundamentallehre in einem, nach Verdienst beliebten, mathematischen Journale den Geometern vor Augen zu legen.

II.

Grundlinien der Lehre von den Parallelenpaaren.

§. 7. Erklärungen. Jedes System zweier unbegrenzten parallelen Geraden g und h heisse, ohne Rücksicht auf die sie enthaltende Ebene, ein Parallenpaar, manchmal zur Abwechselung ein Paar Parallellinien, oder (zwar bildlich und kurz, jedoch nicht wissenschaftlich) ein Geleise (Gleis, franz. l'ornière); die von ihnen, aus der sie enthaltenden Ebene ausgeschnittene

und zum Theil begrenzte Ebenen-Abtheilung der *Streifen* (Streif franz. la bande) des Parallelenpaars, und jede von einem Punkte der einen Parallellinie zu einem Punkte der anderen gehende Strecke a eine *Zwischenlinie* (Zwischenstrecke).

Bezeichnet werde ein Parallelenpaar oder sein Streifen dadurch, dass man den üblichen Ansatz des Parallelismus der beiden Geraden g und h in Klammern fasst; als $(g \parallel h)$.

§. 8. Auf die Parallelentheorie gestützte einfache Sätze.

1) *Jede Zwischenlinie a ist gegen beide Parallellinien $g \parallel h$, gleich geneigt,*

d. h. sie bildet mit ihr gleiche spitze, und gleiche stumpfe oder lauter rechte Winkel als Wechselwinkel, also auch gleiche kleinste hohle Winkel — *Neigungswinkel* genannt, und durch ag oder ah bezeichnet.

2) *Ist daher eine Zwischenlinie auf einer der beiden Parallelen senkrecht, so ist sie auch auf der anderen senkrecht.*

3) Eine Zwischenlinie in einem Paar Parallellinien kann, je nachdem sie auf diesen senkrecht oder schief (schräg) steht, entweder eine *Querlinie* oder eine *Schräglinie* genannt werden.

4) *Alle Querlinien eines Parallelenpaares oder Streifens sind unter sich gleich.*

5) Darum kann eine jede von ihnen die *Weite* (Zwischenweite) des Parallelenpaares, die *Breite* oder *Höhe des Streifens heissen.*

§. 9. Congruenz der Parallelenpaare oder Streifen.

1) *Hauptlehrsatz.* *Zwei Parallenpaare oder Streifen*, $(g \parallel h)$ und $(g' \parallel h')$, *sind congruent, wenn sie je eine Zwischenlinie gleichlang*, $a = a'$, *und gleichgeneigt*, $ag = a'g'$ *haben.*

Wird einfach durch Deckung bewiesen.

2) *Insbesondere:* *Gleich* $\left\{\begin{matrix}\text{weite}\\ \text{hohe}\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}\text{Parallelenpaare}\\ \text{Streifen}\end{matrix}$ *sind congruent.*

§. 10. Vergleichung der Zwischenlinien congruenter Parallelenpaare oder Streifen.

1) *Congruente* $\begin{matrix}\text{Parallelenpaare}\\ \text{Streifen}\end{matrix}$ *sind gleich* $\begin{matrix}\text{weit}\\ \text{hoch}\end{matrix}$.

2) *In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren*, $(g \parallel h) \cong (g' \parallel h')$, *sind gleichgeneigte Zwischenlinien*, $ag = a'g'$, *gleichlang*; $a = a'$.

Beide durch Deckung zu erweisen.

3) *Besonderer Fall:* *In jedem Parallelenpaare sind parallele Zwischenlinien gleichlang;*

Oder: *Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.*

In $(g \| h)$ ist, wenn $a \| a'$, auch $a = a'$.

4) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren sind ungleichgeneigte Zwischenlinien ungleichlang, und zwar gehört zu einem grösseren Neigungswinkel eine kürzere Zwischenlinie;

Oder: Bei wachsendem Neigungswinkel verkürzt sich die Zwischenlinie.

Ist in $(g \| h)$, oder in $(g \| h) \cong (g' \| h')$ der Winkel $ag > bg$, so ist $a < b$.

Wird durch geeignete Construction auf 2) zurückgeleitet.

Aus diesen Sätzen folgt somit gegentheilig:

5) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren sind gleichlange Zwischenlinien gleichgeneigt, und

6) eine jede grössere Zwischenlinie bildet einen kleineren Neigungswinkel,

oder: bei wachsender Zwischenlinie nimmt ihr Neigungswinkel ab.

7) Unter allen Zwischenlinien eines Parallelenpaares ist die senkrechte, die Querlinie oder Weite, die kürzeste.

8) Jede Gerade, welche nicht kürzer als die Weite eines Parallelenpaares ist, kann in selbes als eine Zwischenlinie eingetragen gedacht werden.

9) In einem Parallelenpaare können aus jedem Punkte einer Parallellinie zwei, aber auch nicht mehr, gleiche Schräglinien gezogen werden.

§. 11. Vergleichung von zwei Paar Zwischenlinien in zwei Parallelenpaaren.

1) Ist eine Zwischenlinie a eines Parallelenpaares $(g \| h)$ einer gleichgeneigten a' eines andern Parallelenpaares $(g' \| h')$ gleich, so ist auch jede andere Zwischenlinie b des ersten Parallelenpaares jeder gleichgeneigten b' des anderen gleich.

Wenn $ag = a'g'$ und $a = a'$, zugleich aber auch $bg = b'g'$ ist: so ist auch noch $b = b'$.

Folgt aus §. 9. 1) und §. 10. 2).

2) *Besonderer Fall.* Werden zwei gerade Linien, A und B, von zwei Paar insgesammt unter sich parallelen Geraden, $g \| h \| i \| k$, dergestalt geschnitten, dass die Stücke a und a' der einen Geraden A gleichlang, $a = a'$, sind; so müssen auch die zwischen denselben Parallelen liegenden Stücke b und b' der andern Geraden B gleichlang, $b = b'$ sein.

§. 12. Proportionalität der Zwischenlinien in Parallelenpaaren.

1) **In den Parallelenpaaren sind jede unter sich gleichgeneigte Zwischenlinien jeden anderen unter sich wieder gleichgeneigten Zwischenlinien** (direct) **proportional;**

das heisst:

In jeglichen zwei Parallelenpaaren ($g \| h$) und ($g' \| h'$) verhalten sich jede zwei gleichgeneigte Zwischenlinien, a und a', zu einander, wie jede zwei andere wieder unter sich gleichgeneigte Zwischenlinien, b und b';

nemlich, wenn $ag = a'g'$ und $bg = b'g'$
so $a:a' = b:b'$.

Oder: **Das Verhältniss zweier Zwischenlinien bleibt sich in allen Parallelenpaaren gleich, so lange ihre Neigungswinkel sich gleich bleiben;**

d. i. $a:b = a':b'$.

2) **Sind die Zwischenlinien nicht bloss gegen die Parallellinien, sondern auch gegen einander gleichgeneigt, so sind sie nicht nur zu einander, sondern auch zu den Summen oder Unterschieden der sie einschliessenden Parallelstrecken proportional, je nachdem sie sich zwischen diesen schneiden oder nicht.**

Ist $ag = a'g'$, $bg = b'g'$ und $ab = a'b'$, so ist

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g \pm h}{g' \pm h'}.$$

3) *Besonderer Fall.* **Werden zwei gerade Linien** A und B **von mehreren unter sich insgesammt parallelen Geraden geschnitten; so sind die dazwischen enthaltenen Stücke** a, a' und b, b' **jener geraden Linien einander und den Summen oder Unterschieden der von ihnen eingeschlossenen Parallelstrecken,** g, h und g', h', **proportional, je nachdem die betreffenden Stücke zwischen diesen Parallelenstrecken sich schneiden oder nicht;**

nemlich $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g \pm h}{g' \pm h'}$.

4) *Ganz besonderer Fall.* **Werden zwei sich durchscheidende gerade Linien,** A und B, **von zwei parallelen Geraden geschnitten, so sind die vom Durchschnittspunkte aus genommenen Stücke** a, a' und b, b' **der geraden Linien einander und den sie abschneidenden Parallelstrecken,** g und g', **proportional;**

nemlich $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g}{g'}$.

5) **Das Verhältniss zweier Zwischenlinien in Parallelenpaaren wächst, entweder**

a) wenn der Neigungswinkel der ersten abnimmt, oder
b) „ „ „ zweiten zunimmt;
c) wenn beides zugleich eintritt.

III.

Hauptsätze in der Lehre vom (orthogonalen) Projiciren in einerlei Ebene auf gerade Linien.

§. 13. Hauptsätze aus dem Projiciren von Strecken.

1) Bei gleichen Neigungswinkeln sind die projicirten Strecken ihren Projectionen proportional;

Oder: Bleibt sich der Neigungswinkel gleich, so bleibt sich auch das Verhältniss der projicirten Strecke zu ihrer Projection gleich.

Specieller Fall von §. 12. 1).

2) Je grösser der Neigungswinkel, desto kleiner ist das Verhältniss der Projection zur projicirten Strecke.

Einzelner Fall von §. 12. 5).

§. 14. Das Rückprojiciren der Strecken und das Projiciren derselben auf ein Paar winkelrechter Axen.

1) Projicirt man eine Strecke a auf eine Axe und ihre Projection a' wieder zurück auf die Projicirte (oder auf eine Parallele zu dieser); so ist die erste Projection a' die mittlere Proportionale zwischen der projicirten Strecke und ihrer zweiten oder Rückprojection a''.

Denn beide Projicirungen geschehen unter gleichem Neigungswinkel, daher ist (nach §. 13. 1)):

$$a : a' = a' : a'' \text{ und } a'^2 = aa''.$$

2) Projicirt man eine Strecke r auf zwei winkelrechte Axen, oder allgemeiner auf zwei Axen, deren Neigungswinkel gegen die projicirte Strecke zusammengenommen einen rechten Winkel betragen, und ihre Projectionen a und b wieder zurück auf die Projicirte, oder auf eine Parallele derselben; so sind diese zweiten oder Rückprojectionen, a' und b', zusammengenommen der projicirten Strecke gleich;

$$\text{nemlich } a' + b' = r.$$

3) *Hauptlehrsatz.* (Nachbildung des Pythagoräischen Lehrsatzes). Die zweite Potenz (des Zahlwerths) jeder Strecke r gleicht der Summe der zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) ihrer Projectionen a und b auf jegliche zwei winkelrechte Axen, oder auf solche zwei Axen, deren Neigungswinkel gegen die projicirte Strecke zusammen genommen einen rechten Winkel betragen.

Denn bei den so eben betrachteten zweimaligen Projection a, b und a', b' der Geraden r bestehen ausser der Gleichung

$$a' + b' = r$$

vermöge 1) auch noch die Gleichungen

$$a^2 = a'r, \quad b^2 = b'r,$$

woraus durch Elimination der a' und b' gefunden wird:

$$r^2 = a^2 + b^2.$$

4). (Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes). Verhalten sich drei Grössen R, A, B irgend einer, jedoch der nemlichen Art (z. B. Längen, Winkel, Flächen, Körperräume, Zeiten, u. s. f.) wie die zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) einer Strecke r und ihrer Projectionen a, b auf zwei winkelrechte Axen; so ist die erste auf die projicirte Strecke bezügliche Grösse R so gross, wie die beiden übrigen auf die Projectionen derselben bezüglichen, A und B, zusammen genommen:

$$R = A + B.$$

Denn aus $\frac{R}{r^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$ folgt weiter

$$\frac{R}{r^2} = \frac{A + B}{a^2 + b^2 = r^2}.$$

IV.

Grundlage zur Goniometrie.

§. 15. Erklärung der goniometrischen Functionen.

0) Vorbereitung. Angemessen der bereits aufgestellten Lehre von der (orthogonalen) Projection leiten wir die Erklärung der goniometrischen oder Winkelfunctionen (Hilfszahlen) folgendermassen ein. Zuvörderst unterscheiden wir bei jedem Winkel seine Schenkel insofern von einander, dass wir den Winkel als Ablenkung einer bezeichneten Richtung von einer anderen, des einen Schenkels vom anderen betrachten. Diesen letzteren, als ursprünglich vorhanden gedachte Richtung, nennen wir den Anfangs- oder Ausgangsschenkel; jenen ersteren ablenkenden oder abgelenkten aber den End- oder Schlussschenkel des Winkels. Von diesem abgelenkten Endschenkel wird ein Stück r projicirt, welches das projicirte Schenkelstück, die projicirte Strecke, oder kurz die Projicirte heissen möge. Zu winkelrechten Projectionsaxen nimmt man einerseits die volle Gerade des Anfangsschenkels und andererseits eine darauf senkrechte ganze Gerade, gleichviel ob sie durch des Winkels Scheitel geht oder nicht. Jene nun nennen wir die Haupt- diese die Neben-

Projectionsaxe, daher auch die Projection *a* des Schenkelstücks auf die erstere die Haupt-, und jene *b* auf die letztere die Nebenprojection. — Dabei nehmen wir die Winkel da, wo nur ihre Functionen in Rechnung kommen, vorerst nur eben so, wie sie sind, d. i. ungemessen.

1) Cosinus, Secante, Sinusversus.

Das Verhältniss der Hauptprojection a zur Projicirten r heisst

des Winkels Cosinus,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Projicirten zur Hauptprojection

des Winkels Secante,

und das Verhältniss des Ueberschusses der Projicirten über ihre Hauptprojection zur Projicirten selbst

des Winkels Sinusversus;

geschrieben: $\frac{a}{r} = \cos\alpha$, $\frac{r}{a} = \sec\alpha$, $\frac{r-a}{r} = \operatorname{sinv}\alpha$.

2) Sinus, Cosecante, Cosinusversus.

Das Verhältniss der Nebenprojection b zur Projicirten r heisst

des Winkels Sinus,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Projicirten zur Nebenprojection

des Winkels Cosecante,

und das Verhältniss des Ueberschusses des Projicirten über ihre Nebenprojection zur Projicirten

des Winkels Cosinusversus;

geschrieben: $\frac{b}{r} = \sin\alpha$, $\frac{r}{b} = \operatorname{cosec}\alpha$, $\frac{r-b}{r} = \operatorname{cosv}\alpha$.

3) Tangente, Cotangente.

Das Verhältniss der Nebenprojection b zur Hauptprojection a heisst

des Winkels Tangente,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Hauptprojection zur Nebenprojection

des Winkels Cotangente;

geschrieben: $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\alpha$, $\frac{a}{b} = \operatorname{cotang}\alpha$.

§. 16. Andere Aufzählung der Winkelfunctionen nach dem Grade ihrer Abstammung und Bedeutsamkeit.

1) Stammfunctionen: Cosinus und Sinus.

Aus der projicirten Strecke entspringen zunächst gleichzeitig ihre Haupt- und Nebenprojection, daher auch deren Verhältnisse zur Projicirten, genannt Cosinus und Sinus des

Winkels, die goniometrischen Stammfunctionen, alle weiteren aber Spross- abgeleitete Functionen heissen können.

Zugleich geht in der natürlichen Abfolge der Erzeugung die Hauptprojection der Nebenprojection, also auch der Cosinus dem Sinus voran; wesswegen der Cosinus die Haupt-, der Sinus die Neben-Stammfunction genannt werden kann. Daher sind:

Goniometrische Stammfunctionen:

und zwar:

a) Haupt-Stammfunction: der Cosinus, — b) Neben-Stammfunction: der Sinus,

d. i. das Verhältniss der Hauptprojection a — der Nebenprojection b zur Projicirten r:

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha, \qquad \frac{b}{r} = \sin\alpha.$$

2) Sprossfunctionen.

Von diesen ist

a) die vornehmste und darum auch gewöhnlich gebrauchte:

die Tangente, d. i. das Verhältniss der Neben- zur Hauptprojection; geschrieben: $\frac{b}{a} = \tang\alpha$.

An diese drei gewöhnlich vorkommenden Functionen Cosinus, Sinus, Tangente, schliessen sich noch

b) fünf seltener vorkommende, minder wichtige Sprossfunctionen an; namentlich:

α) die drei umgekehrten jener drei gewöhnlichen Verhältnisse, als:

das umgekehrte des Cosinus, genannt die Secante,
" " " Sinus, " " Cosecante,
" " der Tangente, " " Cotangente,

d. i. $\frac{r}{a} = \sec\alpha$, $\frac{r}{b} = \mathrm{cosec}\,\alpha$, $\frac{a}{b} = \mathrm{cotang}\,\alpha$;

β) die zwei Verhältnisse der Ueberschüsse der Projicirten über ihre Haupt- und Nebenprojection zu ihr, der Projicirten selbst, genannt der Sinusversus und Cosinusversus,

d. i. $\frac{r-a}{r} = \mathrm{sinv}\,\alpha$, $\frac{r-b}{r} = \mathrm{cosv}\,\alpha$.

XXXV.

Ueber die Toroide.

Nach einigen Aufsätzen der Herren **Breton** (**De Champ**), **Terquem**, **Catalan** in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. **Terquem** et **Gerono**. T. III. Paris. 1844. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Der Name **Toroide** scheint von **Breton** (**De Champ**) für eine sonst übrigens ihrer Entstehung nach schon bekannte Curve a. a. O. S. 446. eingeführt worden, und von dem Gebrauche, welcher von dieser Curve in der Baukunst gemacht wird, entlehnt zu sein. Nach einer Angabe von **Terquem** a. a. O. S. 454. soll **Cauchy** in den **Comptes rendus de l'Académie des sciences. 2. série.** 1841 T. XIII. p. 1062. eine analytische Theorie geliefert haben, die mir leider bis jetzt noch nicht zu Gesicht gekommen ist; ich habe aber Grund zu vermuthen, dass dieser Aufsatz von **Cauchy** nur allgemeine Andeutungen enthält. In der vorliegenden kurzen Abhandlung will ich den Begriff der Toroide angeben und zeigen, wie man zu ihrer Gleichung gelangen kann, wo es sich herausstellen wird, dass es dabei zuletzt hauptsächlich auf eine nicht ganz leichte Elimination einer Grösse aus zwei Gleichungen ankommt, welche von **Catalan** a. a. O. S. 553. auf eine elegante Weise auszuführen gelehrt worden ist, weshalb ich die Mittheilung dieses Eliminationsverfahrens und der völlig entwickelten Gleichung der Toroide, zu welcher dasselbe führt, als den Hauptzweck dieses Aufsatzes betrachte. Vielleicht wird dadurch einem der geehrten Leser des Archivs Veranlassung gegeben, den Eigenschaften der Toroide und anderer Curven von ähnlicher Entstehung weiter nachzuforschen.

Wenn man sich aus allen Punkten einer gegebenen Ellipse als Mittelpunkten mit demselben gegebenen Halbmesser eine stetige Folge von Kreisen beschrieben denkt, so heisst die, alle diese Kreise berührende oder einhüllende Curve eine ***Toroide.***

Die Gleichung der gegebenen Ellipse sei

$$1)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

und k sei der gemeinschaftliche Halbmesser der Kreise, welche man sich aus allen Punkten der Ellipse als Mittelpunkten in stetiger Folge beschrieben denkt.

Fassen wir nun irgend einen bestimmten Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten x_1, y_1 sein mögen, in's Auge, so haben wir nach 1) die Gleichung

$$2)\quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2=1.$$

Die Gleichung des aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser k beschriebenen Kreises ist aber

$$3)\quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=k^2.$$

Sind nun X, Y die Coordinaten des Punktes, in welchem dieser Kreis von der Toroide berührt wird, den wir den dem Punkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse entsprechenden Punkt der Toroide nennen wollen, so ist zuvörderst nach 3):

$$4)\quad (X-x_1)^2+(Y-y_1)^2=k^2;$$

die Bedingung aber, dass nach der Erklärung unserer Curve der Kreis und die Toroide in dem Punkte (XY) eine gemeinschaftliche Berührende haben sollen, führt uns zu den folgenden Gleichungen.

Die Gleichung des durch den Punkt (XY) des Kreises gehenden Halbmessers desselben ist

$$5)\quad y-Y=\frac{Y-y_1}{X-x_1}(x-X),$$

oder auch

$$6)\quad y-y_1=\frac{Y-y_1}{X-x_1}(x-x_1).$$

Also ist, da die Berührende des Kreises in dem Punkte (XY) auf dem diesem Punkte entsprechenden Halbmesser des Kreises senkrecht steht, nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung dieser Berührenden:

$$7)\quad y-Y=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}(x-X).$$

Die Gleichung der die Toroide in dem Punkte (XY) berührenden Geraden ist dagegen nach den Principien der höheren Geometrie:

$$8)\quad y-Y=\frac{\partial Y}{\partial X}(x-X);$$

nd da nun nach dem Obigen die beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselben Geraden angehören müssen, so ist:

$$9)\quad \frac{\partial Y}{\partial X}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}.$$

Betrachten wir jetzt, was offenbar verstattet ist, alle veränderlichen Grössen als von der unabhängigen Variablen x_1 abhängig, so folgt aus der Gleichung 4) durch Differentiation nach x_1:

$$(X-x_1)(\frac{\partial X}{\partial x_1}-1)+(Y-y_1)(\frac{\partial Y}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1})=0$$

der

$$10)\quad (X-x_1)\frac{\partial X}{\partial x_1}+(Y-y_1)\frac{\partial Y}{\partial x_1}$$

$$=X-x_1+(Y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}.$$

Weil aber nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{\partial Y}{\partial x_1}:\frac{\partial X}{\partial x_1}$$

t, so ist nach 9):

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1}:\frac{\partial X}{\partial x_1}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1},$$

nd folglich

$$(X-x_1)\frac{\partial X}{\partial x_1}+(Y-y_1)\frac{\partial Y}{\partial x_1}=0;$$

so nach 10):

$$X-x_1+(Y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0,$$

der

$$11)\quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}.$$

Nun ist nach 2):

$$\frac{x_1}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0,\ \text{d. i.}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1};$$

folglich nach 11):

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}=\frac{X-x_1}{Y-y_1}$$

oder

$$12)\quad a^2\frac{X-x_1}{x_1}=b^2\frac{Y-y_1}{y_1}.$$

Setzen wir jetzt

$$13)\quad \Theta=a^2\frac{X-x_1}{x_1}=b^2\frac{Y-y_1}{y_1},$$

so erhalten wir:

$$14)\quad x_1=\frac{a^2X}{a^2+\Theta},\quad y_1=\frac{b^2Y}{b^2+\Theta};$$

und daher nach den Gleichungen 2) und 3):

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{a^2X^2}{(a^2+\Theta)^2}+\dfrac{b^2Y^2}{(b^2+\Theta)^2}=1, \\ \dfrac{\Theta^2X^2}{(a^2+\Theta)^2}+\dfrac{\Theta^2Y^2}{(b^2+\Theta)^2}=k^2. \end{cases}$$

Bedient man sich polarer Coordinaten, und setzt demzufolge

$$X=r\cos\varphi,\quad Y=r\sin\varphi;$$

so werden diese beiden Gleichungen:

$$\left\{\left(\frac{a\cos\varphi}{a^2+\Theta}\right)^2+\left(\frac{b\sin\varphi}{b^2+\Theta}\right)^2\right\}r^2=1,$$

$$\left\{\left(\frac{\cos\varphi}{a^2+\Theta}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi}{b^2+\Theta}\right)^2\right\}\Theta^2r^2=k^2;$$

oder, wenn man r^2 eliminirt und in der dadurch sich ergebenden Gleichung $k^2(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2)$ für k^2 setzt, nach einigen leichten Reductionen:

$$15^*)\quad \begin{cases} r^2=\left\{\dfrac{a^2}{(a^2+\Theta)^2}\cos\varphi^2+\dfrac{b^2}{(a^2+\Theta)^2}\sin\varphi^2\right\}^{-1}, \\ (a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2\cos\varphi^2+(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2\sin\varphi^2=0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen 15) die Grösse Θ, so erhält man die gesuchte völlig entwickelte Gleichung der Toroide zwischen den Coordinaten X, Y.

Bevor wir die Ausführung dieser Elimination nach Catalan zeigen, wollen wir noch die folgenden Bemerkungen vorausschicken.

Zuerst machen wir darauf aufmerksam, dass sich zu jedem Punkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse leicht der entsprechende Punkt (XY) der Toroide finden lässt. Aus der Gleichung 12) folgt nämlich:

$$a^4 \frac{(X-x_1)^2}{x_1^2} = b^4 \frac{(Y-y_1)^2}{y_1^2}.$$

Nun ist aber nach 4):

$$(Y-y_1)^2 = k^2 - (X-x_1)^2;$$

also

$$a^4 \frac{(X-x_1)^2}{x_1^2} = \frac{k^2 b^4 - b^4 (X-x_1)^2}{y_1^2}$$

oder

$$\left(\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}\right)(X-x_1)^2 = \frac{k^2 b^4}{y_1^2},$$

und folglich

$$X-x_1 = \pm \frac{k b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} x_1.$$

Führt man dies in die aus 12) sich ergebende Gleichung

$$Y-y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(X-x_1)$$

ein, so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$Y-y_1 = \pm \frac{k a^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} y_1,$$

und wir haben daher die beiden folgenden Gleichungen, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$16)\quad \begin{cases} X - x_1 = \pm \dfrac{k b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} x_1, \\[2ex] Y - y_1 = \pm \dfrac{k a^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} y_1; \end{cases}$$

oder

$$17)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} \pm k b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} x_1, \\[2ex] Y = \dfrac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} \pm k a^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} y_1. \end{cases}$$

Hieraus ersieht man, dass einem jeden Punkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse zwei Punkte (XY) der Toroide entsprechen, oder vielmehr dass es für jede stetige Folge aus den Punkten einer Ellipse als Mittelpunkten beschriebener Kreise iederzeit zwei Toroiden giebt, was auch aus dem Begriffe der Toroide ohne weitere Erläuterung unmittelbar von selbst erhellet.

Weil nach 12)

$$Y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(X - x_1)$$

und diese Gleichung bekanntlich die Gleichung der dem Punkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse entsprechenden Normale derselben ist, so ist klar, dass alle Punkte der beiden Toroiden auf den Normalen der ihnen entsprechenden Punkte der Ellipse liegen, und von der Ellipse die constante Entfernung k haben, so dass also die Toroide zu der Klasse von Curven gehört, welche wohl zuerst von Kästner *curvae aequidistantes* genannt worden sind *). Uebrigens wird Leibnitz**) zuerst diese Entstehung einer Curve erdacht haben, scheint sich aber, wie ich, wenn mir auch die Acta Eruditorum jetzt gerade nicht zur Hand sind, doch aus einem Aufsatze von Johann Bernoulli (Opera omnia. T. I. p. 153.) zu schliessen berechtigt zu sein glaube, der Benennung *curvae parallelae* bedient zu haben. Noch gehört hierher eine Abhandlung von v. Prasse: De ellipseos evoluta et aequidistantibus et earum evolutione. Lipsiae. 1798. und De lineis et superficiebus aequidistantibus. Dissertatio inauguralis Michaelis Reiss. Gottingae. 1826. Auch findet sich eine hierher gehörende Untersuchung über die Parabel in dem Lehrbuch der höheren Geometrie in analytischer Darstellung von H. W. Brandes. Theil I. Leipzig. 1822. S. 230., wo aber die Gleichung der betreffenden Curve nicht in völlig entwickelter Gestalt dargestellt ist, indem der Verfasser die wirkliche Ausführung der erforderlichen, etwas weitläufigen Elimination unterlassen hat.

Die Elimination der Grösse Θ aus den beiden Gleichungen 15) hat nun Catalan auf folgende Art auszuführen gelehrt.

Multiplicirt man jede der beiden Gleichungen mit dem Producte $(a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2$, so erhält man:

$$18)\quad \begin{cases} a^2(b^2+\Theta)^2X^2 + b^2(a^2+\Theta)^2Y^2 = (a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2, \\ \Theta^2(b^2+\Theta)^2X^2 + \Theta^2(a^2+\Theta)^2Y^2 = k^2(a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun die erste dieser beiden Gleichungen mit Θ^2, die zweite mit a^2, zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab, und dividirt hierauf auf beiden Seiten durch $(a^2+\Theta)^2$, so erhält man:

*) Comment. Soc. Gotting. T. XI.

**) Acta Erud. 1695. Nov. pag. 93.

$$19)\quad (a^2-b^2)\Theta^2 Y^2 = (a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2.$$

Multiplicirt man dagegen die erste der beiden in Rede stehenden Gleichungen mit Θ^2, die zweite mit b^2, zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab, und dividirt hierauf auf beiden Seiten durch $(b^2+\Theta)^2$, so erhält man:

$$20)\quad (a^2-b^2)\Theta^2 X^2 = -(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2.$$

Durch Addition der Gleichungen 19) und 20) ergiebt sich:

$$(a^2-b^2)\Theta^2(X^2+Y^2) = \Theta^2\{(a^2+\Theta)^2-(b^2+\Theta)^2\} + k^2\{a^2(b^2+\Theta)^2-b^2(a^2+\Theta)^2\};$$

aber nach bekannten Sätzen:

$$(a^2+\Theta)^2-(b^2+\Theta)^2 = (a^2-b^2)(a^2+b^2+2\Theta),$$

$$a^2(b^2+\Theta)^2-b^2(a^2+\Theta)^2 = -(a^2-b^2)(a^2b^2-\Theta^2);$$

folglich

$$21)\quad \Theta^2(X^2+Y^2) = \Theta^2(a^2+b^2+2\Theta)-k^2(a^2b^2-\Theta^2).$$

Multiplicirt man die Gleichung 19) mit a^2, die Gleichung 20) mit b^2, und addirt dann die beiden Gleichungen zu einander, so erhält man:

$$(a^2-b^2)\Theta^2(a^2Y^2+b^2X^2) = a^2(a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2 - b^2(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2;$$

aber

$$\begin{aligned} a^2(a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2 &- b^2(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2 \\ &= \Theta^2\{b^2(a^2+\Theta)^2-a^2(b^2+\Theta)^2\} \\ &\quad + k^2\{a^4(b^2+\Theta)^2-b^4(a^2+\Theta)^2\} \\ &= (a^2-b^2)\Theta^2(a^2b^2-\Theta^2) \\ &\quad + k^2\Theta\{2(a^2-b^2)a^2b^2+(a^4-b^4)\Theta\} \\ &= (a^2-b^2)\Theta\{\Theta(a^2b^2-\Theta^2)+k^2\Theta(a^2+b^2)+2k^2a^2b^2\}; \end{aligned}$$

folglich

$$22)\quad \Theta(a^2Y^2+b^2X^2) = \Theta(a^2b^2-\Theta^2)+k^2\Theta(a^2+b^2)+2k^2a^2b^2.$$

Ordnet man die Gleichungen 21) und 22) nach den Potenzen von Θ, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$23)\quad \begin{cases} 2\Theta^3-(X^2+Y^2-a^2-b^2-k^2)\Theta^2-a^2b^2k^2=0, \\ \Theta^3+(a^2Y^2+b^2X^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\Theta-2a^2b^2k^2=0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen einmal Θ^3 und dann $a^2b^2k^2$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$24)\quad \begin{cases} A = x^2+y^2-a^2-b^2-k^2, \\ B = a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2, \\ C = a^2b^2k^2 \end{cases}$$

gesetzt wird, die beiden folgenden Gleichungen:

$$25)\quad \begin{cases} A\Theta^2+2B\Theta-3C=0, \\ 3\Theta^2-2A\Theta-B=0. \end{cases}$$

Behandelt man diese beiden Gleichungen auf ähnliche Art, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$26)\quad \begin{cases} 2(A^2+3B)\Theta+AB-9C=0, \\ (AB-9C)\Theta+2(B^2+3AC)=0; \end{cases}$$

und wenn man nun aus diesen beiden Gleichungen Θ eliminirt, so erhält man:

$$27)\quad (AB-9C)^2-4(A^2+3B)(B^2+3AC)=0.$$

Daher ist die Gleichung der Toroide:

$$28)\quad \left.\begin{array}{l} (x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2 \\ +18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2) \\ +4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3 \\ +4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3 \\ -27a^4b^4k^4 \end{array}\right\} = 0.$$

Die weitere Entwickelung dieser Gleichung überlasse ich den Lesern, werde aber die vielleicht mir zugehenden Resultate gern in dem Archive mittheilen.

XXXVI.

Bemerkungen zu den im Archiv Thl. 3. Heft 2. p. 213—214. von Herrn Dr. Dienger aufgestellten Theoremen I—V.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

In Ermangelung einer allgemeinen Summationsmethode, d. h. einer solchen, die sich auf alle Reihen ohne Ausnahme erstreckt, ist es immer am besten, Methoden zur Summirung möglichst allgemeiner Reihen aufzusuchen, damit man auf die eigentlichen Quellen aufmerksam werde, von welchen die zahllosen Resultate der Summirung vereinzelt dastehender Reihen, mit denen die Analysis überschwemmt ist, ihren gemeinsamen Ursprung haben. So z. B. fiel mir, als ich einen oberflächlichen Blick auf die in der Ueberschrift bezeichneten Lehrsätze warf, bei Nro. II., III. und V. sogleich ein, dass die Summation alsbald durch eine Methode gelingen müsse, welche ich in Crelle's Journal. Bd. 31. p. 235—45. für die allgemeinen Reihen

$$(a)\quad \gamma_0 - n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 - \text{etc.} + (-1)^n\gamma_n,$$

$$(b)\quad \gamma_0 + n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \text{etc.} + \gamma_n$$

in Anwendung gebracht habe. Die Grössen γ sind willkührlich, und n ist eine positive ganze Zahl. Alle unter diesen Klassen begriffenen endlichen Reihen sind durch einen einfachen Ausdruck summirbar, wenn ein solcher für die $n$te Differenz, oder für die $n$te Summe angegeben werden kann *). Auf diese Weise habe

---

*) Zieht man von jedem Gliede der Grundreihe $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ das nächst folgende ab, nennt die dadurch entstehende Reihe von Gliedern erste Differenzenreihe, verfährt mit dieser ebenso, u. s. f., so wird, wie bekannt, das erste Glied der $n$ten Differenzenreihe (das ich $n$te Differenz genannt habe) durch den Ausdruck (a) dargestellt. Addirt man zu jedem Gliede das nächste, oder bildet Summenreihen, so stellt der Ausdruck (b) das erste Glied der $n$ten Summenreihe (die $n$te Summe) dar.

ich a. a. O. bekannte Resultate erwiesen, und viele Theoreme über die Grössenform q_p^k, (d. i. $\frac{q(q+k)(q+2k)\dots(q+(p-1)k)}{1.2.3\dots p}$), aufgestellt.

Was nun zuerst die Sätze II. und III. betrifft, so sind beide in der allgemeinern Gleichung ($f(p)=1+\lambda p$, λ eine beliebige Grösse, gesetzt)

$$1+\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k n_k \cdot \frac{1}{f(p-k)}=(-1)^n \cdot \frac{\lambda . 2\lambda . 3\lambda \dots n\lambda}{f(p).f(p-1)\dots f(p-n)}$$

enthalten, wo p eine beliebige Grösse ist. Denn man sieht leicht, dass diese Gleichung das Theorem II. giebt für $\lambda=2$, $p=n$; das Theorem III. für $\lambda=2$, $n=2p+1$ (im letzteren Falle sind einige Transformationen nöthig, die ich hier übergehen kann). Man erhält die Gleichung I., wenn man von der Grundreihe ausgeht:

$$\frac{1}{f(p)}, \; \frac{1}{f(p-1)}, \; \frac{1}{f(p-2)}, \text{ etc.}$$

und die $n$te Differenz bildet. Denn da allgemein $f(p)-f(p-\mu)=\lambda\mu$, so wird nach und nach

$$\Delta(y_0)=\frac{1}{f(p)}-\frac{1}{f(p-1)}=-\frac{\lambda}{f(p).f(p-1)},$$

$$\Delta^2(y_0)=-\lambda\left[\frac{1}{f(p).f(p-1)}-\frac{1}{f(p-1).f(p-2)}\right]$$

$$=-\lambda.\frac{f(p-2)-f(p)}{f(p).f(p-1).f(p-2)}=\frac{\lambda.2\lambda}{f(p).f(p-1).f(p-2)}$$

u. s. w.

$$\Delta^n(y_0)=(-1)^n\frac{\lambda.2\lambda.3\lambda\dots n\lambda}{f(p).f(p-1)\dots f(p-n)}.$$

Der Satz V. kann auf folgende Form gebracht werden:

$$2. \quad 1-\frac{2}{3}m_1+\frac{2.4}{3.5}m_2-\frac{2.4.6}{3.5.7}m_3+\dots\pm\frac{2.4.6\dots 2m}{3.5.7\dots(2m+1)}=\frac{1}{2m+1},$$

oder

$$2^*). \quad \frac{2.4.6\dots 2m}{3.5.7\dots(2m+1)}-m_1.\frac{2.4.6\dots(2m-2)}{3.5.7\dots(2m-1)}+\dots\pm 1=(-1)^m.\frac{1}{2m+1}.$$

Man hat nun nach der so eben angewandten Methode

$$\Delta(\gamma_0) = \frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)} - \frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m-1)} = -\frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m+1)},$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = -\left[\frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m+1)} - \frac{2.4.6\ldots(2m-4)}{3.5.7\ldots(2m-1)}\right] = 3.\frac{2.4.6\ldots(2m-4)}{3.5.7\ldots(2m+1)},$$

$$\Delta^3(\gamma_0) = 3\left[\frac{2.4.6\ldots(2m-4)}{3.5.7\ldots(2m+1)} - \frac{2.4.6\ldots(2m-6)}{3.5.7\ldots(2m-1)}\right] = -3.5.\frac{2.4.6\ldots(2m-6)}{3.5.7\ldots(2m+1)},$$

u. s. w.

$$\Delta^n(\gamma_0) = (-1)^n.3.5.7\ldots(2n-1).\frac{2.4.6\ldots(2m-2n)}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

Also ist nach (a), wenn $\frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)} = f(m)$ gesetzt wird:

$$3.\quad f(m) - n_1 f(m-1) + n_2 f(m-2) - \ldots \pm f(m-n)$$
$$= (-1)^n.\frac{2.4.6\ldots(2m-2n)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2m+1)}.$$

Diese Gleichung enthält den Satz V. als speciellen Fall, denn für $n=m$, wobei der Zähler $2.4.6\ldots(2m-2n)$, wie man übersehen wird, der Einheit gleich zu setzen, resultirt die Relation 2*).

Die beiden noch übrigen Theoreme I. und IV. haben eine andere Quelle. Mit Rücksicht auf das letztere ist das allgemeine Glied $\frac{1}{n-p}(n-p)_{m-p} = \frac{(n-p-1)_{m-p}}{n-m}$, und die Summe der Reihe ist folglich $\frac{1}{n-m}\sum_{p=0}^{p=m}(n-p-1)_{m-p}$. Die aufgestellte Gleichung enthält also weiter nichts als den bekannten Satz von den Binomialcoefficienten:

$$(n-1)_m + (n-2)_{m-1} + (n-3)_{m-2} + \ldots + (n-m-1)_0 = n_m$$

nur in etwas veränderter Form, und dieser Satz ist nur eine Wiederholung der Formel

$$n_m = (n-1)_m + (n-1)_{m-1}.$$

Das Theorem I. endlich nimmt, wenn man mit dem ersten Factor auf der Linken der zweiten multiplicirt, und Binomialcoefficienten einführt, die Gestalt an:

$$4.\quad \frac{m+1}{m+2}\left[\frac{1}{(m+r)_{r-2}} + \frac{1}{(m+r-1)_{r-3}} + \frac{1}{(m+r-2)_{r-4}} + \ldots + \frac{1}{(m+2)_0}\right]$$
$$= 1 - \frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)},$$

oder

$$\frac{m+1}{m+2} \cdot \sum_{k=0}^{k=r-2} \frac{1}{(m+r-k)_{r-k-2}} = 1 - \frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

Diese Formel ist keine andere als diejenige, welche ich in einer andern Abhandlung des Crelle'schen Journals: „Ueber die Bernoullische Methode summirbare Reihen zu finden." (Band 31. p. 253–58. Formel 21.) aufgestellt habe, und welche

Setzt man nämlich hier $p = m+2$, $m = r-k-2$, $n = r-2$, so kommt

$$\sum_{k=r-2}^{k=0} \frac{1}{(m+r-k)_{m+2}} = \frac{m+2}{m+1}\left[1 - \frac{1}{(m+r)_{m+1}}\right],$$

und diese Relation stimmt mit 4. überein, da $(m+r-k)_{m+2} = (m+r-k)_{r-k-2}$, und $(m+r)_{m+1} = (m+r)_{r-1}$ ist.

Uebrigens habe ich die Formel 21. aus der viel allgemeinern 20. erhalten, nämlich

$$\sum_{m=0}^{m=n} \frac{1}{\overset{k}{(q+mk)_p}} = \frac{p}{(p-1)k}\left[\frac{1}{\overset{k}{q_{p-1}}} - \frac{1}{\overset{k}{[q+(n+1)k]_{p-1}}}\right].$$

XXXVII.

Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände. Versuch einer gene-ischen Erklärung der analytischen Reihe.

Von dem

Herrn Dr. Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

Fragt man nach der Summe einer Reihe

$$\text{I.}\quad f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x),$$

welcher jedes Glied als einerlei Function des Stellenzeigers n
nd einer willkührlichen Grösse x zu denken ist, so verlangt man
kanntlich einen, der Summe aller Glieder gleichen Ausdruck,
r zwar auch eine Summe mehrerer Glieder sein kann, in wel-
em aber die Anzahl der Glieder sich gleich bleibt, welches
ch der Stellenzeiger n des letzten Gliedes in der Reihe I. sein
ag. Wir kennen nur eine Reihe, welche sich in Folge unserer
ithmetischen Theorien unmittelbar summiren lässt, nämlich die
umme gleicher Glieder $a+a+a+\ldots$, für welche wir na schrei-
en. Jede andere Reihe muss also auf diese zurückgeführt wer-
en können, wenn wir nur noch dazu bemerken, dass a auch 0
ein kann; ausserdem wäre die Summation gar nicht ausführbar.
s ergiebt sich hieraus leicht der Grundgedanke für alle Reihen-
ummirung; man muss mit der Gleichung:

$$\text{II.}\quad \Sigma(n,x)=f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x)$$

rgend eine Rechnung anstellen, wodurch sich die Reihe auf eine,
on n abhängige Anzahl gleicher Glieder reducirt, sei es auch,
ass ausserdem noch einige andere Glieder, deren Anzahl durch
 nicht bedingt ist, stehen bleiben. Man erhält dadurch eine
leichung für $\Sigma(n,x)$, aus welcher dieses in der verlangten Form
ervorgeht. Dabei machen wir den wesentlichen Unterschied, ob
nan nach der Reduction eine Reihe $a+a+a+\ldots$ erhält, in
elcher $a=$ einer bestimmten Grösse ist, oder ob $a=0$ gefunden

wird. So wie man Reihen der ersten Art arithmetische nennt, so will ich die der anderen Art geometrische nennen. Die einfache arithmetische Reihe

$$0.x + 1.x + 2.x + \ldots + nx$$

und die geometrische

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

geben das Beispiel.

§. 2.

Welchen Weg man einschlagen muss, um die Summe einer Reihe zu finden, hängt lediglich vom Bildungsgesetz ihrer Glieder ab, aber so wie dieses Bildungsgesetz in vielerlei Formen, die alle analytisch gleichgeltend sind, ausgesprochen werden kann, so lässt sich auch die Summirung auf mancherlei Weise gestalten. Bei der geometrischen Reihe lässt die Reduction etwas am Anfange stehen, was eine vom Stellenzeiger n des letzten Gliedes unabhängige Grösse ist und in manchen Fällen auch 0 sein kann, dann verschwinden sämmtliche Glieder bis zur Stelle $n-\mu$, wobei μ bei allen Werthen von n constant bleibt, und nun behält man noch einige von n abhängige Glieder, die sich also ändern, wenn n verschiedene Werthe annimmt. Die Anzahl derselben bleibt sich entweder bei jedem Werthe von n gleich, und dann ist das Summirungsgeschäft vollständig gelungen, oder aber es ist ihre Anzahl mit n veränderlich, und dann ist die Summe in der oben geforderten Weise nicht gefunden, vielmehr ist die beabsichtigte Summation nur auf eine andere, vielleicht noch verwickeltere zurückgeführt. Bezeichnet man die mit der Reihe angestellte Rechnung mit F, so ist die durch $F.\Sigma(n,x)$ dargestellte Grösse nur in so fern von n abhängig, als $\Sigma(n,x)$ davon abhängt.

Damit man die Glieder, welche bei der Reduction am Anfange und am Ende der Reihe noch stehen bleiben, gehörig von einander sichten könne, sagt man, die Glieder am Ende seien diejenigen, welche dadurch in die Rechnung kommen, dass man die Reihe mit dem Gliede $f(n,x)$ abbricht. Denkt man sich nämlich die Reihe ins Unbestimmte fortgesetzt, so verliert man bei der Reduction die Endglieder und man findet die Anfangsglieder ohne Zweideutigkeit. Aber klarer noch wird der Ausdruck, wenn man die Reihe

$$\text{III.}\quad \Sigma(n,v,x) = v^0 f(0,x) + v^1 f(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots + v^n f(n,x)$$

zu Grunde legt, aus welcher die in II. entsteht, wenn $v=1$ wird. Hier haben die Glieder am Ende wenigstens den Factor $v^{n-\mu}$ und die Rechnung giebt überhaupt einen Ausdruck von der Form:

$$\text{IV.}\quad F.\Sigma(n,v,x) = \begin{cases} a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta \\ + Av^{n-\mu} + Bv^{n-\mu+1} + Cv^{n-\mu+2} + \ldots \end{cases}$$

Dabei sind $abc\dots d$ Functionen von x, nicht von n oder v, $ABC\dots$ aber sind Functionen von n und x. Die Zahl der Glieder in der Reihe $a+bv+cv^2+\dots+dv^\delta$ ist unveränderlich bei jedem Werthe von n, und eben dieses gilt oft auch von der Reihe $Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+\dots$, aber in vielen Fällen wächst hier auch die Anzahl der Glieder mit n, obschon sie immer endlich ist. Immer ist μ eine unveränderliche ganze Zahl und man könnte die Rechnung in allen Fällen so gestalten, dass man $\mu=-1$ hätte.

Dass man an die Stelle der Reihe

$$f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\dots+f(n,x)$$

die allgemeinere

$$f(0,x)+vf(1,x)+v^2f(2,x)+\dots+v^nf(n,x)$$

setzen kann, ergiebt sich daraus, dass jene aus dieser hervorgeht, wenn $v=1$ genommen wird. Man wird leicht gewahr, dass das für die Reihe II. angegebene Summationsverfahren von aller Unbestimmtheit befreit wird, wenn man es dem Gesetz der Reihe III., welches ich das Gesetz der geometrischen Reihe nennen will, unterordnet, ja es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn die erstere in der bezeichneten Weise bildsam ist, es auch die letztere sein muss. Die Nichtachtung dieser Bemerkung ist der Grund aller Schwierigkeiten in der Reihenlehre gewesen; man verlor die syntaktische Bedeutung des ganzen Reductionsverfahrens und glaubte sich nur dann zu einem Schlusse berechtigt, wenn das, was man den Rest nennt, für unendlich grosse Stellenzeiger verschwindet.

§. 3.

Wir lassen nun die sämmtlichen Glieder weg, welche bei der Reduction am Ende der Reihe stehen bleiben, also die Glieder, die eben daher stammen, dass man die Reihe bei einem Gliede abbricht, oder die Glieder, die in dem Ausdrucke in IV. den Factor $v^{n-\mu}$ haben. Wir erhalten dadurch die allerdings unrichtige Gleichung:

$$F.\Sigma(n,v,x)=a+bv+cv^2+\dots+dv^\delta,$$

und finden hieraus statt des wahren $\Sigma(n,v,x)$ eine blosse Function von v und x, die wir die Summe der unendlichen, d. h. der ohne letztes Glied gedachten Reihe $f(0,x)+vf(1,x)+v^2f(2,x)+\dots$ nennen. Bezeichnen wir sie mit $\varphi(v,x)$, so schreiben wir dann:

$$\text{V.}\quad \varphi(v,x)=f(0,x)+vf(1,x)+v^2f(2,x)+\dots$$

und es ist klar, dass diese Gleichung immer unrichtig sein muss, wenn man die Reihe bei einem Gliede abbricht, mag sie nun der Function $\varphi(v,x)$ sich ohne Ende nähern oder nicht. Man darf daher diesen Ausdruck auch nicht so verstehen, als ob

$$\varphi(v,x) = f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots + v^n f(n,x)$$

für $n = \infty$ sei, vielmehr folgt auch jenseits des Gliedes $v^\infty f(\infty, x)$ noch die endlose Reihe $v^{\infty+1} f(\infty+1, x) + \ldots$. Diess muss man wohl berücksichtigen, wenn man bei dem Gebrauche der unendlichen Reihen nicht auf widersinnige Resultate gelangen will.

Der Ausdruck: „Summe einer unendlichen Reihe" hat an sich keinen Sinn, denn man kann immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern zusammenzählen. Man muss ihm erst eine Bedeutung beilegen, und so wie nun die neuere Analysis in ihrer Einseitigkeit hierfür die Annäherungsgrenze bestimmt, so hat die ältere aus allgemeineren Rücksichten diejenige Formel gewählt, die ich eben erklärt habe. Hier bezieht sich nämlich die Unendlichkeit der Reihe gar nicht auf eine unendliche Menge von Gliedern, sondern lediglich auf die analytische Behandlungsweise, welche unter allgemeineren Bedingungen möglich ist, als unter denen der Convergenz.

§. 4.

Diese so bestimmte Summe der unendlichen Reihe hat nun zwei sehr merkwürdige Eigenschaften. Einmal nämlich ist sie denselben analytischen Bedingungen unterworfen, denen die Reihe unterliegt, wenn diese ohne letztes Glied gedacht und nach dem Gesetz behandelt wird, welches ich in §. 2. aufgestellt habe. Wir sagen dafür, die Summenformel habe mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften. In V. nämlich hat die Function $\varphi(v,x)$ die Eigenschaft, dass $a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta$ durch die Rechnung $F.\varphi(v,x)$ herauskommt, aber eben diese Eigenschaft hat auch die Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$, wenn in ihr kein Glied als das letzte gedacht wird. Wem die Unendlichkeit der Reihe Schwierigkeiten macht, der kann diese Redensart auch ganz vermeiden, wenn er dafür den Ausdruck der Dimension substituirt. Ein Glied von der Dimension m hat die Form Mv^m, wo M nicht weiter von v abhängt. Darnach hat die Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$ bis auf Glieder von beliebiger Dimension mit der Function $\varphi(v,x)$ gleiche syntaktische Eigenschaften, nämlich bis auf Glieder von der Dimension $n - \mu$, wenn die Reihe mit dem Gliede $n$ter Dimension abgebrochen wird. So ist denn zugleich klar, dass die ältere Theorie mit unendlichen Reihen eigentlich gar nichts zu schaffen hat.

Aus der Identität der Summe und der Reihe hinsichtlich ihrer syntaktischen Eigenschaften entspringt der sehr allgemeine Reihencalcul der älteren Analysis, welcher nur dem Gesetz unterworfen ist, dass da, wo man mit den Reihen rechnet, die Glieder gleicher Dimension vollständig beisammen stehen und dass nur solche Glieder weggelassen werden, welche bei beliebiger Fortführung der Reihen zu beliebigen Dimensionen aufsteigen können. Auf solche Weise finden sich einerseits endliche, d. h. vom Dimensionszeichen unabhängige Formen, andererseits unendliche Reihen mit gleichen syntaktischen Eigenschaften, also unendliche Reihen mit ihren Summen in dem erklärten Sinne.

Dagegen ist uns die Function $\varphi(v,x)$ oft zuerst gegeben und wir sollen sie in eine Reihe entwickeln. Diese Entwickelung geschieht immer nur unter der Bedingung, dass die Reihe mit ihrer erzeugenden Function $\varphi(v,x)$ die syntaktischen Eigenschaften theile, und hieraus ist klar, dass Entwickeln und Summiren solche Operationen sind, deren eine das Umgekehrte der anderen ist. Der Entwickelung dient vorzüglich die Methode der unbestimmten Coefficienten, mit Hülfe derer man auf die leichteste Weise findet, wie die Glieder der Reihe Functionen ihres Stellenzeigers sind. Die Bestimmung geschieht eben nach den syntaktischen Eigenschaften, denen die Reihe zufolge der ihr schon gesetzten Summe genügen muss.

§. 5.

Doch das Alles giebt den unendlichen Reihen nur syntaktische Bedeutung; ihre arithmetische Bedeutung und somit ihren praktischen Werth erhalten sie durch den Satz, dass die Summe der Reihe zugleich ihre Annäherungsgrenze ist, wenn sie eine solche hat.

Setzen wir nämlich der Kürze halber in dem Ausdrucke IV.:

$$a+bv+cv^2+\ldots+dv^\delta = y,$$
$$Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+\ldots = y_n;$$

so haben wir

$$F.\,\Sigma(n,v,x) = y-y_n,$$

und wenn wir dann die Rechnung, durch welche $F.\,\Sigma(n,v,x)$ sich in $\Sigma(n,v,x)$ verwandelt, durch Φ bezeichnen, so ist

$$\text{VI.}\quad \Sigma(n,v,x) = \Phi.(y-y_n),$$

wobei die Rechnung Φ nur in so fern von n abhängig ist, als y_n davon abhängt. Nähert sich nun $\Sigma(n,v,x)$ bei wachsendem n einer festen Grenze, so wird sich natürlich $\Phi.(y-y_n)$ derselben Grenze nähern, und um diese Grenze zu erhalten, wird man aus $y-y_n$ alles das weglassen müssen, was den Ausdruck $\Phi.(y-y_n)$ von n abhängig macht, denn die Annäherungsgrenze ist eben von n unabhängig. Daher muss man das ganze y_n weglassen, denn was davon stehen bleiben dürfte, müsste doch von n unabhängig sein, und es würde somit aus dem Ausdrucke $y_n = Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+\ldots$, in welchem $A, B\ldots$ von v nicht abhängen, eine von n unabhängige Grösse sich sondern, was aber wegen des Factors $v^{n-\mu}$ unmöglich ist.

Diess scheint mir die, der alten Analysis eigenthümliche Schlussweise zu sein, und wenn man auch eine genauere Zergliederung der Gedanken hier wünschen mag, so bleibt die Sache doch vollkommen richtig und liegt so nahe, dass die älteren Analysten, wie es scheint, gar nicht an eine weitere Ausführung dachten. Ihnen stand daher der Satz:

dass diejenige Formel, welche die Annäherungsgrenze der Reihe vorstellt, mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften habe,

wie ein Axiom fest, und diess muss man bei der Beurtheilung der älteren Theorie wohl im Auge haben, wenn man über ihre Methoden ein richtiges Urtheil fällen will.

Obige Art zu schliessen ist auch in der That so oberflächlich nicht, als sie beim ersten Anblick scheinen mag. Wenn der Ausdruck $\Phi.(y-y_n)$ mit wachsendem n sich einer bestimmten Grenze nähert, so ist er eben mit n veränderlich, aber nur in so fern als y_n von n abhängt, und man kann seine Annäherungsgrenze nur dadurch erhalten, dass man aus $y-y_n$ das mit n Veränderliche weglässt. Daher ist dieselbe entweder $\Phi.y$ oder $\Phi.(y+z)$, wo nur eine Function von v und x sein kann. Dieses z müsste sich nun als ein analytischer Bestandtheil von y_n nachweisen lassen denn die Grenze, welcher sich $\Phi.(y-y_n)$ ohne Ende nähert, ist ja durch die Natur dieses Ausdrucks bedingt und muss aus denselben bestimmbar sein. Wenn sich aber aus

$$y_n = v^{n-\mu}(A+Bv+\ldots.)$$

das Glied z nach irgend welchen analytischen Bedingungen absondert, so muss aus $A+Bv+Cv^2+\ldots.$ ein Glied $\frac{z}{v^{n-\mu}}$ sich ausscheiden lassen, und da A von v nicht abhängt, so hätte man das Glied $\frac{z}{v^{n-\mu}}$ in $Bv+Cv^2+\ldots.$ zu suchen. Aus $B+Cv+\ldots$ müsste sich also ein Glied von der Form $\frac{z}{v^{n-\mu+1}}$ absondern lassen, und da B von v nicht abhängt, so hätte man dieses Glied in $Cv+\ldots$ zu suchen. Indem man aber so fortschliesst, findet man, dass das Glied z in y_n nirgends gefunden wird, dass also $\Phi.y$ die Annäherungsgrenze von $\Phi.(y-y_n)$ ist.

§. 6.

Hiermit habe ich die wesentlichsten Momente der älteren Theorie der Reihen dargelegt, so wie ich sie aus der Lectüre verschiedener Werke geschöpft habe. Dabei habe ich Sorge getragen, so viel als möglich Alles zu vermeiden, was ich vielleicht als mein Eigenthum in Anspruch nehmen dürfte, um dem Leser mit möglichster Treue das vorzuführen, was sich aus den Quellen schöpfen lässt. Statt der Reihe II. wählte ich die allgemeinere in III., weil die letztere in der That für alle Rechnungen mit Reihen das allgemeine Formular ist, ich will aber damit nicht sagen, dass die Theorie nicht auf die blosse Form in II. gegründet werden könne.

Es scheint mir allerdings ein Mangel der älteren Theorie zu sein, dass sie ihren Hauptsatz nicht gehörig begründet hat, ja dass man denselben aus den meisten Werken erst herausklauben muss. Dieser Hauptsatz heisst:

die Formel, welche die Annäherungsgrenze einer Reihe vorstellt, hat mit derselben Reihe, wenn sie als geometrische behandelt wird, gleiche syntaktische Eigenschaften.

Gegen diesen Mangel der älteren Analysis hat aber die neuere keinen Vorzug, denn sie weist uns zwar in den meisten Fällen klar nach, wie die Reihe einer bestimmten Grenze sich ohne Ende nähert, aber sie weist nicht nach, wie dieser Umstand eine nothwendige Folge der Rechnung war, durch welche man die Summe fand. Man giebt daher unnöthiger Weise noch die Betrachtung des Restes hinzu, während doch daraus, dass die Summenformel mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften bekam, das Verschwinden des Restes bei convergirenden Reihen mit Nothwendigkeit folgte.

Ueberhaupt liegt in der Verkennung des obigen Satzes das ganze Missverständniss, und sehr häufig bleiben auch die älteren Analysten in dieser Beziehung nicht vorwurfsfrei. Daher z. B. die verschiedenen Ansichten über die Methode der unbestimmten Coefficienten, namentlich der unnütze Zusatz, dass man die Form der Reihe vor der Coefficientenbestimmung gerechtfertigt wissen will. Begreift man unter dieser Methode alle die Fälle, wo man statt unbekannter Zahlen $A, B, C \ldots$ setzt, so mag die gedachte Forderung gerecht sein, sie fällt aber alsbald weg, wenn die Coefficienten durch eine Reihe von Gleichungen folgeweise aus einander bestimmt sind. Denn hier kann die Reihe nur so gewählt werden, dass sie mit der ihr im Voraus gesetzten Summe gleiche syntaktische Eigenschaften bekommt. Darnach bestimmt sich aber nicht nur die Relation der Coefficienten, sondern auch zugleich das, was man die Form der Reihe nennt.

Steht nun der obige grosse Satz der älteren Analysis fest, (und er wird stehen trotz aller modernen Kritik), so ist zugleich klar, dass die neuere Analysis gegen die ältere in ein kümmerliches Licht zurücktritt. Die älteren Methoden, namentlich die der unbestimmten Coefficienten, die der Umkehrung der Reihen, die combinatorische Anordnung des Systemes nach deutscher Erfindung, behalten nicht nur ihre volle Gültigkeit, sondern sie sind sogar schön und echt wissenschaftlich, da sie das Manigfaltige zu einem innigen Ganzen verbinden. Wo weist denn die neuere Theorie nach, dass Summiren und Entwickeln ganz gleiche Operationen sind, in welchen sich nur die Aufgabe umkehrt?

§ 7.

Am Schlusse dieser Abhandlung will ich noch folgende zwei Bemerkungen anführen. Die erste betrifft den Gebrauch des Zeichens $=$ zwischen der Function und ihrer entwickelten Darstellung. So viel ich mich erinnere, hat Thibaut zuerst über diese Sache klar gesprochen, da man nach ihm den Ausdruck

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

nicht als eine identische Gleichung verstehen, sondern ihn unter

der Bedingung auffassen soll, dass die Reihe bis zum $n$ten Gliede vollständig sei und dass dem zu Folge der Fehler über die $n$te Dimension hinausgehe. Daher müsste der Ausdruck eigentlich so vervollständigt werden:

$$f(x) \text{ bis zum Gliede } n\text{ter Dimension}$$
$$= A_0 + A_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + A_n x^n.$$

Dieses behält seine Gültigkeit, die Reihe mag con- oder divergiren, aber das Gleichheitszeichen lässt sich immer dadurch rechtfertigen, dass der Fehler recht klein werden kann. Zu unseren modernen Theorien fehlt nur noch eine, welche nur recht stark convergirende Reihen als richtig zulässt.

Obige Bemerkung Thibaut's lässt sich nun leicht zur höchsten Allgemeinheit bringen, wenn man die Reihe ohne letztes Glied auffasst. Dadurch enthält sie immer den Rest in sich, wodurch sie sich zur vollständigen Function ergänzt, und das Gleichheitszeichen wird eben so nothwendig, wie bei der Formel $a+b=b+a$.

Die zweite Bemerkung betrifft die unzureichende Unterscheidung zwischen con- und divergirenden Reihen. Alle Reihen, welche nicht einer endlichen Grösse als ihrer Grenze sich nähern, nennt man divergirende, und versagt dadurch einer Menge von Reihen die Theilnahme am Begriff der Convergenz, bei welchen sich die Summe unendlich vieler Glieder eben so rechtfertigen lässt, wie wenn Annäherung an eine endliche Grenze statt hat. Man denke sich die Reihe so gestaltet und ihre Glieder so gruppirt, dass eine Reihe mit lauter positiven Gliedern entsteht. Bezeichnet dann Σ_n die Summe aller Glieder vom Isten bis zum $n$ten, so hat man

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1} + \ldots + X_{n+m}$$
$$= \Sigma_n + \Sigma_{n+m} - \Sigma_n,$$

also

$$\Sigma_{n+m} = \Sigma_n \left(1 + \frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}\right).$$

Verschwindet nun der Quotient $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ für [illegible] dann, wenn man $m = \infty$ nimmt, so hat die Reihe bei unendlich vielen Gliedern eine Summe, aber dieselbe muss nicht nothwendig endlich sein. Der Ausdruck $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ verschwindet aber allemal, wenn die Glieder der Reihe bis zum Verschwinden abnehmen.

Bei divergirenden Reihen verschwindet der Quotient $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ unter den angegebenen Bedingungen nicht, und daher kann auch von einer Summe ihrer unendlich vielen Glieder nicht die Rede sein, wovon auch in der That kein guter Schriftsteller geredet hat.

XXXVIII.

Ein neues Theorem von den Linien zweiten Grades.

„Die Quadratsumme der reciproken Werthe „zweier auf einander senkrechten Durchmesser „bei einem Kegelschnitt (Ellipse und Hyperbel) „ist constant, nämlich bei der Ellipse der Qua- „dratsumme, bei der Hyperbel der Quadratdif- „ferenz der reciproken Werthe der Axen gleich."

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es scheint mir überflüssig zu sein, dieses Theorem auf dem gewöhnlichen Wege zu erweisen, da dies keine Schwierigkeiten hat; ich erlaube mir aber den Weg anzugeben, welcher mich zur Entdeckung des Satzes führte, namentlich auch deshalb, weil so zugleich ein für die Gleichung des zweiten Grades in ihrer allgemeinsten Form geltender Ausdruck für die gedachte Quadratsumme gefunden wird.

Die den Kegelschnitt ausdrückende Gleichung sei

$$1.\quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

und α der Coordinatenwinkel, auf den sie sich bezieht. Die Transformation der Coordinaten in secundäre, für welche die Axen der x' und y' mit der Axe der x die auf bekannte Weise gezählten Winkel ξ und η einschliessen, und der neue Anfang durch die primitiven Coordinaten p, q dargestellt wird, giebt

$$x = p + \frac{\sin(\alpha - \xi)}{\sin\alpha}x' + \frac{\sin(\alpha - \eta)}{\sin\alpha}y',$$

$$y = q + \frac{\sin\xi}{\sin\alpha}x' + \frac{\sin\eta}{\sin\alpha}y'.$$

Mittelst dieser Werthe wird die Gleichung 1.

$$2.\quad A'y'^2+2B'x'y'+C'x'^2+2D'y'+2E'x'+F'=0,$$

wo

$$3.\quad \begin{cases} A'\sin\alpha^2 = A\sin\eta^2+2B\sin\eta\sin(\alpha-\eta)+C\sin(\alpha-\eta)^2, \\ B'\sin\alpha^2 = A\sin\eta\sin\xi+B[\sin\eta\sin(\alpha-\xi)+\sin\xi\sin(\alpha-\eta)] \\ \qquad\qquad +C\sin(\alpha-\eta)\sin(\alpha-\xi), \\ C'\sin\alpha^2 = A\sin\xi^2+2B\sin\xi\sin(\alpha-\xi)+C\sin(\alpha-\xi)^2, \\ D'\sin\alpha = (Aq+Bp+D)\sin\eta+(Bq+Cp+E)\sin(\alpha-\eta), \\ E'\sin\alpha = (Aq+Bp+D)\sin\xi+(Bq+Cp+E)\sin(\alpha-\xi), \\ \qquad F' = Aq^2+2Bpq+Cp^2+2Dq+2Ep+F. \end{cases}$$

Für $B^2-AC\gtrless 0$ kann nun der neue Anfang p, q bekanntlich so bestimmt werden, dass zugleich

$$Aq+Bp+D=0,\quad Bq+Cp+E=0$$

ist, also D', E' verschwinden, und die Gleichung 2. die Form annimmt:

$$4.\quad A'y'^2+2B'x'y'+C'x'^2+F'=0,$$

und dabei wird, wenn man zur Abkürzung $B^2-AC=G$, $BD-AE=H$, $D^2-AF=J$ setzt:

$$5.\quad F'=\frac{H^2-GJ}{AG}=\frac{\Omega}{G},$$

so dass $\Omega=AE^2+CD^2+FB^2-ACF-2BDE$ ist. Die Gleichung 4. bezieht sich, wie aus ihrer Form leicht erhellt, auf ein Coordinatensystem, dessen Axen noch eine beliebige Richtung haben, während der Anfang in den Mittelpunkt der Kurve verlegt ist, so dass also die Axen des Systems zwei beliebige Durchmesser sind.

Nehmen wir nun das secundäre System rechtwinklig, so ist allgemein $\sin\eta=\cos\xi$, $\sin(\alpha-\eta)=-\cos(\alpha-\xi)$, und nach 3.

$$6.\quad \begin{cases} A'\sin\alpha^2 = A\cos\xi^2-2B\cos\xi\cos(\alpha-\xi)+C\cos(\alpha-\xi)^2, \\ B'\sin\alpha^2 = A\sin\xi\cos\xi+B[\cos\xi\sin(\alpha-\xi)-\sin\xi\cos(\alpha-\xi)] \\ \qquad\qquad -C\sin(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi), \\ C'\sin\alpha^2 = A\sin\xi^2+2B\sin\xi\sin(\alpha-\xi)+C\sin(\alpha-\xi)^2. \end{cases}$$

Hieraus findet man sofort

$$7.\quad (A'+C')\sin\alpha^2 = A-2B\cos\alpha+C,$$

und die Summe der Coefficienten A', C' ist folglich constant, da sie von dem Winkel ξ nicht mehr abhängt. Setzen wir jetzt

der Gleichung 4. zuerst $y'=0$, dann $x'=0$, und bestimmen resp. x', y', so kommt $C'=-\frac{F'}{x'^2}$, $A'=-\frac{F'}{y'^2}$, und x', y' werden die Entfernungen des Mittelpunkts der Kurve von den Durchschnitten der letztern mit den Coordinatenaxen sein, d. h. die halben auf einander senkrechten Durchmesser. Vermöge dieser Werthe von A', C' wird die Gleichung 7.

$$8.\quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2+\left(\frac{1}{y'}\right)^2=-\frac{A-2B\cos\alpha+C}{F'\sin\alpha^2}.$$

Dies ist der constante Ausdruck für die Quadratsumme der reciproken Werthe zweier halben auf einander senkrechten Durchmesser.

Bestimmt man nun den Winkel ξ so, dass B' verschwindet, oder

$$9.\quad \left.\begin{array}{l} A\sin\xi\cos\xi+B[\cos\xi\sin(\alpha-\xi)-\sin\xi\cos(\alpha-\xi)] \\ \quad -C\sin(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi) \end{array}\right\}=0$$

ist, so wird die Gleichung 4.

$$10.\quad A'y'^2+C'x'^2+F=0,$$

wo aber unter A', C' diejenigen Werthe zu verstehen sind, welche die durch dieselben Buchstaben in den Gleichungen 6. bezeichneten Grössen durch die Substitution des durch Gleichung 9. bestimmten Werths von ξ annehmen. Diese Gleichung 10. bezieht sich auf ein System, dessen Coordinatenaxen die Axen der Kurve sind, und die Lage der letztern gegen die Axe der x des primitiven Systems wird durch den doppelten Werth des Winkels ξ bestimmt, den er aus der Gleichung

$$11.\quad \operatorname{tang}2\xi=\frac{C\sin2\alpha-2B\sin\alpha}{A-2B\cos\alpha+C\cos2\alpha}=\frac{Z}{N}$$

erhält, die aus 9. sehr leicht folgt.

Aus 6. findet man $(A'-C')\sin\alpha^2=A\cos2\xi-2B\cos(\alpha-2\xi)+C\cos2(\alpha-\xi)=\cos2\xi(N+Z\operatorname{tang}2\xi)=N\sec2\xi$; aber $N\sec2\xi=\pm\sqrt{Z^2+N^2}=\pm\sqrt{L}$, folglich

$$12.\quad \sec2\xi=\pm\frac{\sqrt{L}}{A-2B\cos\alpha+C\cos2\alpha},$$

und

$$13.\quad (A'-C')\sin\alpha^2=\pm\sqrt{L}\ ^{*)}.$$

---

*) Der Ausdruck $L=(A-2B\cos\alpha+C\cos2\alpha)^2+(C\sin2\alpha-2B\sin\alpha)^2$ lässt sich auf die Form bringen: $(A-2B\cos\alpha+C)^2+4(B^2-AC)\sin\alpha^2$.

Verbindet man damit die Gleichung 7., so kommt

$$14. \begin{cases} A' = \dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \pm \sqrt{L}}{2\sin\alpha^2}, \\ C' = \dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \mp \sqrt{L}}{2\sin\alpha^2}. \end{cases}$$

a) Ist nun $B^2 - AC < 0$, wie bei der Ellipse, so ist A' positiv, weil nach der ersten der Gleichungen 6. $AA'\sin\alpha^2 = \{A\cos\xi - B\cos(\alpha-\xi)\}^2 - (B^2 - AC)\cos(\alpha-\xi)^2$ *). Ferner ist auch C' positiv, weil das Product $A'C'\sin\alpha^2 = -(B^2 - AC)$, also > 0 ist. Daher ist nach 10. $F' < 0$, und man kann setzen $a^2 = \dfrac{-F'}{C'}$, $b^2 = \dfrac{-F'}{A'}$. Die Gleichung 10. wird dann $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, und a, b sind resp. die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse. Es ist folglich

$$15. \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = -\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C - \sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}, \\ \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 = -\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C + \sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also

$$16. \quad \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = -\frac{A - 2B\cos\alpha + C}{F'\sin\alpha^2},$$

und nach 8.

$$17. \quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

b) Wenn $B^2 - AC > 0$, wie bei der Hyperbel, so ist die Gleichung $-\dfrac{C'}{F'}x'^2 - \dfrac{A'}{F'}y'^2 = 1$. Vergleicht man dieselbe mit $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, und nimmt das Vorzeichen in dem Ausdrucke für C' so, dass $-\dfrac{C'}{F'}$ positiv ist, so wird $-\dfrac{A'}{F'}$ für das entsprechende Vorzeichen negativ, und man kann setzen $\dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{C'}{F'}$, $\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{A'}{F'}$, oder

$$18. \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = -\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \mp \sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}, \\ \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 = +\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \pm \sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also

---

*) Der Coefficient A kann immer positiv genommen werden.

$$19.\quad \left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2=-\frac{A-2B\cos\alpha+C}{F'\sin\alpha^2},$$

und nach 8.

$$20.\quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2+\left(\frac{1}{y'}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

Anmerkung 1. Zwei auf einander senkrechte Durchmesser der Hyperbel werden diese Kurve nur dann zu gleicher Zeit schneiden, das obige Theorem also für die Hyperbel auch nur Anwendung finden, wenn der Asymptotenwinkel ein stumpfer ist. Dies voraus gesetzt, seien OT, OT' die Asymptoten, O der Mittelpunkt, und in ihm auf OT, OT' resp. die Perpendikel OM, OM' errichtet, welche die Aeste in M, M' schneiden (Taf. V. Fig. 4.). In den Winkelräumen MOT', $M'OT$ werden dann unendlich viele Paare auf einander senkrechter Durchmesser möglich sein, welche die Kurve zugleich treffen. Wächst der eine halbe Durchmesser ON ins Unendliche, so nähert sich der andere offenbar der Grenze OM', und die Gleichung 20. geht dann über in

$$21.\quad \left(\frac{1}{OM'}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2,$$

d. h. bei einer Hyperbel, deren Asymptotenwinkel stumpf, ist das Quadrat des reciproken Werths desjenigen Perpendikels, welches man im Mittelpunkte auf eine Asymptote bis zum Durchschnitt mit dem einen Ast gezogen hat, dem Quadratunterschiede der reciproken Werthe der halben Axen gleich.

Anmerkung 2. Aus dem obigen Theorem lässt sich noch ein für die Ellipse und Hyperbel zugleich geltender Satz ableiten.

Es seien OD, OD' (Taf. V. Fig. 5.) zwei beliebige auf einander senkrechte Durchmesser, O der Mittelpunkt, DD' die Verbindungslinie der Endpunkte der Durchmesser. Es ist $OD=x'$, $OD'=y'$. Nun hat man $\left(\frac{1}{x'}\right)^2+\left(\frac{1}{y'}\right)^2=\frac{x'^2+y'^2}{(x'y')^2}=\frac{OD^2+OD'^2}{(OD\,.\,OD')^2}$; ist h die Länge des von O auf DD' gefällten Perpendikels, so ist $OD\,.\,OD'=DD'\,.\,h$, $(OD\,.\,OD')^2=(OD^2+OD'^2)\,h^2$, folglich $\frac{x'^2+y'^2}{(x'y')^2}=\frac{1}{h^2}$, und daraus der Satz:

Die Entfernung des Mittelpunkts einer Ellipse oder Hyperbel von der Sehne, welche die Endpunkte zweier auf einander senkrechten halben Durchmesser verbindet, ist eine constante Grösse.

XXXIX.

Ueber die natürliche Winkeleinheit in der analytischen Goniometrie und über die Ausmerzung des Kreisbogens aus den wissenschaftlich-geometrischen Erforschungen der Winkel.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Einleitung.

1. Die analytische Goniometrie, vornehmlich die höhere in der Differential- und Integralrechnung, pflegt durchgängig da, wo Rechnungsverbindungen zwischen Winkelfunctionen und ihren Winkeln selbst vorkommen, die Zahlwerthe der Winkel durch die Zahlwerthe der die Winkel bestimmenden Kreisbogen zu ersetzen, indem sie diese durch ihren Halbmesser ausmisst, weil so die Rechnungsformeln am einfachsten ausfallen. Eigentlich nimmt sie — was freilich fast nirgends in den Lehrbüchern der Analysis gesagt wird — denjenigen Winkel zur Messeinheit, dessen bestimmender Kreisbogen die Länge seines Halbmessers hat.

2. Solches Hin- und Herspringen vom Winkel zum Bogen und vom Bogen zum Winkel, wo man es doch nur mit Einer dieser zwei wesentlich von einander verschiedenen Art von Grössen zu thun haben will, kann von einer unbefangenen Kritik der wissenschaftlischen Geometrie durch die allerdings hochpreisliche und für die angewandte Geometrie bei der Messung und Zeichnung von Winkeln unschätzbare Proportionalität der Winkel und ihrer Kreisbogen durchaus nicht gerechtfertigt werden; immer wird solches Durcheinandermengen ungleichartiger Grössen nur als Krücke angesehen werden müssen, deren sich die Wissenschaft gewiss entledigen wird, sobald sie auf sicherem Fusse einherzugehen sich im Stande fühlen wird.

3. Am meisten lag mir in der, von mir aufgestellten Fundamentallehre der Geometrie daran, die Elemente *) aller Raumgebilde, nemlich die Strecken und Winkel sowohl einzeln als mit einander verbunden, und auf einander einwirkend, vollständig und dermassen durch sie allein zu erforschen, dass an solche niedere Goniometrie die höhere unmittelbar, ohne Dazwischentreten der Lehre von der Kreislinie, sich anschliessen könne. Nach vielem Sinnen gelang mir dies im Jänner des Jahres 1841, wo ich entdeckte, dass der oben beschriebene, als natürliche Winkelmesseinheit der analytischen Goniometrie dienende Winkel auch die Grenze ist, welcher diejenigen Winkel zugleich ohne Ende sich nähern, die sich bei der Theilung eines unendlich abnehmenden Winkels einerseits durch seinen Sinus andererseits durch seine Tangente als Quotienten ergeben. Dadurch erst wurde meine geometrische Fundamentallehre in sich selbst vollkommen abgeschlossen. Ich hoffe, die Darstellung dieses neuartigen Gegenstandes werde den Geometern nicht unwillkommen sein.

II.

Proportionalität unendlich abnehmender Winkel zu ihren Sinus und Tangenten; und Grenze der Quotienten eines unendlich abnehmenden Winkels durch dessen Sinus und Tangente.

4. Nähert sich der ablenkende Endschenkel eines Winkels α dem Anfangsschenkel unendlich, d. i. nimmt der Winkel α unendlich ab und nähert sich so seiner Grenze 0 ohne Ende, so nähern sich auch seine goniometrischen Functionen den gleichnamigen des Winkels 0 als ihren Grenzen unendlich; folglich sein Cosinus ohne Ende wachsend der Grenze 1, sein Sinus und seine Tangente aber, unendlich abnehmend, der gemeinschaftlichen Grenze 0.

In Zeichen: für $\lim \alpha = 0$ ist $\lim \cos\alpha = 1$, $\lim \sin\alpha = 0$, $\lim \operatorname{tang}\alpha = 0$.

5. Bei dieser gleichzeitigen unendlichen Abnahme des Winkels α, seines Sinus und seiner Tangente tritt jedoch der höchst merkwürdige Umstand ein, dass dieselbe nahe und desto genauer in gleichem Verhältnisse oder in directer Proportionalität dieser dreierlei Grössen erfolgt, je kleiner sie insgesammt schon geworden sind, nemlich, dass dem Verhältnisse jeder zwei schon hinreichend kleiner Winkel das Verhältniss sowohl ihrer Sinus als ihrer Tangenten sehr nahe, und um so genauer gleich wird, je näher beide Winkel an ihrem gänzlichen Verschwinden stehen.

6. Seien, um dies zu beweisen, α und α' zwei einstimmige (zugleich positive oder zugleich negative) und schon so kleine Winkel, dass in den bekannten Gleichungen

*) Vergleiche meinen obigen Aufsatz Nro. XXXIV.

$$\sin(\alpha+\alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha,$$

$$\tan(\alpha+\alpha') = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha'}{1-\tan\alpha\tan\alpha'}$$

die Cosinus positiv und die Tangenten bereits kleiner als 1 ausfallen, wozu die Winkel einzeln kleiner als ein halber rechter sein müssen.

Um Doppelvergleichungen — das nach Umständen Grössersein oder Kleinersein — zu vermeiden, und weil hier mit den Winkeln ihre Sinus und Tangenten einstimmig sind, mögen die Winkel so wie ihre Functionen nur absolut — weder positiv noch negativ — betrachtet werden.

Nehmen nun die Winkel α, α' nach und nach ohne Ende ab, was durch

$$\lim.\ (\alpha, \alpha') \geqq 0$$

angedeutet werden soll; so nehmen auch ihre Sinus und Tangenten eben so ab, ihre Cosinus dagegen wachsen allmälig bis auf 1, so dass man hat:

$$\lim.\ (\cos\alpha, \cos\alpha') \leqq 1, \quad \lim.\ (\sin\alpha, \sin\alpha') \geqq 0,$$

$$\lim.\ (\tan\alpha, \tan\alpha') \geqq 0.$$

Dann ist, wenn man in der ersten Gleichung $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ durch die gewöhnlich grössere und nur ausnahmsweise am Ende eben so grosse Zahl 1, dagegen im Nenner der zweiten Gleichung die $\tan\alpha$, $\tan\alpha'$ durch die gewöhnlich kleinere und nur ausnahmsweise am Ende eben so grosse Zahl 0 ersetzt,

$$\lim.\ \sin(\alpha+\alpha') \leqq \sin\alpha + \sin\alpha',$$

$$\lim.\ \tan(\alpha+\alpha') \geqq \tan\alpha + \tan\alpha'.$$

Mit den hinreichend abnehmenden Winkeln stehen demnach nicht blos ihre Sinus, sondern auch ihre Tangenten, dermassen in Verbindung, dass zur Summe jeder zweier Winkel desto genauer nicht nur die Summe ihrer Sinus, sondern auch die Summe ihrer Tangenten gehört, je kleiner diese Winkel sind. Folglich sind den hinreichend kleinen Winkeln sowohl ihre Sinus als auch ihre Tangenten direct proportionirt.

7. Nemlich für die kleinsten Winkel ist, wenn wir die angenäherte Gleichheit durch $\doteq$ andeuten,

$$\alpha : \alpha' \doteq \sin\alpha : \sin\alpha' \doteq \tan\alpha : \tan\alpha',$$

oder auch:

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\alpha'}{\sin\alpha'} \text{ und } \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}=\frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'},$$

d. h. der Quotient jedes hinreichend kleinen Winkels durch seinen Sinus oder durch seine Tangente ist fast ganz unveränderlich, oder, bei unendlich abnehmendem Winkel nähert sich bei der Theilung des Winkels sowohl durch seinen Sinus als auch durch seine Tangente der Quotient, welcher also, weil die Winkelfunctionen Zahlen sind, wieder ein Winkel ist, einer fixen Grenze, die demnach ebenfalls ein Winkel sein muss.

8. **Beide diese veränderlichen Quotienten streben aber der nemlichen Grenze zu.**

Denn wegen $\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ist $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}=\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha$, also $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}:\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\cos\alpha$; folglich, weil für $\lim\alpha \geqq 0$, $\lim\cos\alpha \leqq 1$ ist, muss $\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}:\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}\leqq 1$, also $\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\leqq\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ sein.

9. Bezeichnen wir nun mit Γ den Winkel, der den Quotienten $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$ als gemeinschaftliche Grenze vorgesteckt ist, so haben wir

$$\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\Gamma=\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

III.

Der erste Quotient nähert sich abnehmend, der zweite wachsend ihrer gemeinschaftlichen Grenze.

10. Höchst wichtig ist die Frage, wie diese beiden veränderlichen Quotienten ihrer gemeinsamen Grenze Γ zustreben, ob wachsend oder abnehmend. Darüber geben obige Vergleichungen (in 6.) Aufschluss. Denn ersetzt man in ihnen erst α' durch $\alpha'+\alpha''$, dann α'' durch $\alpha''+\alpha'''$, nachher wieder α''' durch $\alpha'''+\alpha^{IV}$ u. s. f., so findet man

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots.)\leqq\sin\alpha+\sin\alpha'+\sin\alpha''+\sin\alpha'''+\ldots.,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots.)\geqq\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha'+\operatorname{tang}\alpha''+\operatorname{tang}\alpha'''+\ldots.;$$

und wenn man hierin alle Winkel gleich werden lässt:

$$\sin n\alpha\leqq n\sin\alpha,\quad \operatorname{tang}n\alpha\geqq n\operatorname{tang}\alpha.$$

Theilt man hiedurch den Winkel $n\alpha$, so findet man

$$\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \geqq \frac{\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{n\alpha}{\operatorname{tang} n\alpha} \leqq \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Sinkt demnach der Winkel auf einen vielten (aliquoten) Theil seiner selbst herab, so muss sein Quotient durch den Sinus abnehmen, jener durch die Tangente wachsen.

Der Quotient eines unendlich abnehmenden Winkels durch {seinen Sinus / seine Tangente} nähert sich also im {Abnehmen / Wachsen} der ihnen beiden gemeinschaftlichen Grenze, wenigstens dann, wenn der Winkel jedesmal auf einen vielten Theil seiner selbst, insbesondere also in einer geometrischen Reihe abnimmt.

11. Ganz allgemein führt man aber die Untersuchung, indem man durch obige Vergleichungen (in 6.) die Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ theilt, wodurch man zunächst

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \geqq \frac{\alpha+\alpha'}{\sin\alpha+\sin\alpha'}, \quad \frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} \leqq \frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha'}$$

erhält. Die zweiten Quotienten sind aber bekanntlich eigenthümliche (zusammengesetzte arithmetische) Mittel, folglich ist

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \geqq \operatorname{Med}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}, \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}\right),$$

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} = \operatorname{Med}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'}\right).$$

Soll aber der {erstartige / zweitartige} der Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ angehörige Quotient {grösser / kleiner} sein als das Mittel der den beiden Theilen α und α' entsprechenden Quotienten, so muss er, da alle diese Quotienten absolute Grössen sind, auch gewiss {grösser / kleiner} sein als einer (der kleinere / „ grössere) der beiden letzteren Quotienten, folglich entweder zwischen sie beide hineinfallen oder auch noch {grösser / kleiner} sein als der andere.

Jenes Dazwischenfallen ist jedoch unmöglich. Denn da die Summe $\alpha+\alpha'$ grösser als jeder ihrer Theile α und α' ist, so müsste bei abnehmendem Winkel jeder solche Quotient bald abnehmen bald wachsen. Allein die Theile dieser Winkelsumme, d. h. die Abnahmen des veränderlichen Winkels, können beliebig klein, mithin auch so klein angenommen werden, dass derlei abwechselndes Zu- und Abnehmen des Quotienten endlich einmal aufhört und daher nur ununterbrochenes Zu- oder Abnehmen eintritt.

Mithin muss der $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{erstartige}}{\text{zweitartige}}$ der Winkelsumme $\alpha + \alpha'$ entsprehende Quotient $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ sein als jeder einzelne der den beiden heilen α und α' entsprechenden Quotienten; nemlich weil $\alpha + \alpha'$ (α, α') ist, muss sein:

$$\frac{\alpha + \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')} \geqq \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}, \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}\right),$$

$$\frac{\alpha + \alpha'}{\text{tang}(\alpha + \alpha')} \leqq \left(\frac{\alpha}{\text{tang}\,\alpha}, \frac{\alpha'}{\text{tang}\,\alpha'}\right).$$

12. Der Quotient eines bereits hinreichend kleinen und noch mer weiter abnehmenden Winkels durch $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{seinen Sinus}}{\text{seine Tangente}}$ muss imach $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{abnehmen}}{\text{wachsen}}$, und fortwährend $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ sein als die gemeinhaftliche Grenze beider Quotienten, nemlich für $\lim \alpha \geqq 0$ ist

$$\lim \frac{\alpha}{\sin\alpha} \geqq \Gamma \geqq \lim \frac{\alpha}{\text{tang}\,\alpha},$$

d für hinreichend kleine Winkel α ist

$$\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} > \Gamma > \frac{\alpha}{\text{tang}\,\alpha}\right).$$

13. Die letzte Vergleichung lässt sich sogleich benützen, um vei ausgezeichnete einschliessende Grenzen für den Grenzwinkel ' aufzustellen. Setzt man nemlich $\alpha = \frac{1}{2}R$, so ist $\text{tang}\,\alpha = 1$; d setzt man $\alpha = \frac{1}{3}R$, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; daher findet man

$$\tfrac{1}{2}R < \Gamma < \tfrac{2}{3}R.$$

Der Grenzwinkel Γ ist demnach ein spitziger zwischen der litte und zwei Drittheilen des rechten Winkels oder zwischen 5 und 60 Grad liegender Winkel.

Benennung des Grenzwinkels.

14. Dieser Winkel muss wegen seiner engsten Verknüpfung it den Winkelfunctionen nothwendig in vielerlei weiteren Forchungen der Goniometrie vorkommen, und weil er als eine fixe renze mit einer bestimmten — sogleich genügend scharf zu eriittelnden — Grösse begabt ist, gleich jedem andern bestimmten Winkel zur Messung der Winkel geeignet sein. Desswegen verlient er gewiss durch eine eigenthümliche Benennung ausgeeichnet zu werden. Ich glaube zu einer solchen lieber ein Nennvort als ein Eigenschaftswort in Antrag bringen zu sollen; theils

wegen der wünschenswerthen Kürze, theils weil man auch der gewöhnlichen Winkeleinheit, dem neunzigsten Theile des rechten Winkels, den einsilbigen Namen Grad (franz. degré) beigelegt hat. Darum schlage ich vor, ihm den kurzen altdeutschen Namen „der Gehren" zu geben *). Denn dieser Winkel ist, wie wir so eben nachgewiesen haben, ein mittlerer spitziger, und der Gehren heisst (landschaftlich) ein spitziges Werkzeug, besonders ein Pfeil, Spiess, Speer, ferner ein spitz zulaufendes Stück Land, ein keilförmiger Streifen Zeug, Keil in Hemden, Zwickel in Strümpfen (franz. le chanteau, engl. goar); daher auch das Gehrmaass oder -holz, bei Holzarbeitern ein Richtscheit mit einem nach einem Winkel von 45 Graden abgeschrägten Querbrettchen zum Vorzeichnen einer schrägen Richtung, die sie eine Gehre oder Gehrung nennen **).

IV.

Berechnung des Gehrens.

15. Sei wieder α ein genügend kleiner absoluter Winkel. Um die Grössen der Winkel $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ schätzen zu können, vergleichen wir sie mit einem bereits festbestimmten Winkel, am angemessensten mit dem, ganz natürlich gleich am Anfange der Lehre von den Winkeln sich aufdringenden, gestreckten Winkel, den man jetzt schon gern mit G zu bezeichnen pflegt. Ihre Verhältnisse zu diesem oder ihre Maasse, Maasszahlen, Zahlwerthe, wenn sie durch ihn ausgemessen werden, mögen durch p und q bezeichnet werden, so dass man hat

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} : G = p, \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} : G = q.$$

16. Dann geben die obigen Vergleichungen (in 12.) durch G getheilt

$$p < \frac{\Gamma}{G} < q \quad \text{und}$$

$$\lim p \leqq \frac{\Gamma}{G} \leqq \lim q.$$

Das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ des Gehrens Γ zum gestreckten Winkel G liegt also zwischen zwei zu einerlei Winkel α gehörigen Zahlen p und q; von denen, bei unendlich abnehmendem Winkel α, die erstere wachsend, die andere abnehmend, diesem Verhältnisse als ihrer gemeinsamen Grenze ohne Ende zustrebt.

---

*) Wie ich bereits in einer Note zu meinem Aufsatze im Archiv. Theil 6. Heft. 2. Seite 120. gethan habe.

**) Vergleiche die Wörterbücher von Adelung, Heinsius, Heyse, u. a.

17. Setzen wir nun den Winkel α auf seine Hälfte, $\frac{1}{2}\alpha$, herab, so mögen die aus ihr hervorgehenden Winkel $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha}$ und $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ zum gestreckten Winkel die Verhältnisse p_1 und q_1 haben, so dass man habe

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha} : G = p_1, \quad \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} : G = q_1.$$

Sind nun für einen gewissen Winkel α seine Functionen sin und tang bekannt, daher auch beide Zahlen p und q bestimmbar, so lassen sich aus ihnen auch die dem halben Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ zukommenden ähnlichen Zahlen p_1 und q_1 äusserst leicht berechnen. In der That, obige Gleichungen geben auf der Stelle

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\alpha}{pG}, \quad \sin\alpha = \frac{\alpha}{qG};$$

und wenn man diese Gleichung durch jene theilt:

$$\cos\alpha = \frac{p}{q};$$

daher in gleicher Weise

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{p_1 G}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{q_1 G},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{p_1}{q_1}.$$

Ferner können von den zwischen den goniometrischen Functionen des ganzen und halben Winkels bestehenden Beziehungsgleichungen hier am besten folgende zwei benützt werden:

$$\cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1, \quad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Denn die Substitution obiger Ausdrücke für die Winkelfunctionen verwandelt diese Gleichungen in

$$\frac{p}{q} = 2\frac{p_1^2}{q_1^2} - 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{p_1}{q_1^2}.$$

Theilt man nun die erste Gleichung, nach Uebertragung des Gliedes -1, durch die zweite und durch 2, so findet man sogleich für p_1 den höchst einfachen Ausdruck

$$p_1 = \frac{p+q}{2},$$

und die zweite Gleichung gibt dazu

$$q_1^2 = q p_1 \text{ oder } q_1 = \sqrt{q p_1}.$$

Es ist also p_1 das arithmetische Mittel (die halbe Summe) von p und q, und q_1 das geometrische Mittel (die zweite Wurzel aus dem Producte) von q und p_1.

Weil der Winkel α einen rechten nicht übersteigt, so sind seine Functionen allesammt positiv, folglich wegen $\cos\alpha = \frac{p}{q} < 1$ sicher $p < q$. Daher ist auch $p < p_1 < q$ und $p_1 < q_1 < q$, also im Zusammenhange $p < p_1 < q_1 < q$.

18. Will man nun diese Halbirung des Winkels α hinreichend oft wiederholen, und aus den, für einen gewissen Winkel α bekannten Verhältnissen p und q zu den nach und nach sich ergebenden Winkeln

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha}{2^2}, \quad \frac{\alpha}{2^3}, \ldots$$

die ähnlichen Verhältnisse

$$p_1\, q_1, \quad p_2\, q_2, \quad p_3\, q_3, \ldots$$

also in Gesammtheit die Zahlenreihe

$$p, q; \; p_1, q_1; \; p_2, q_2; \; p_3, q_3; \ldots$$

aufstellen, so wird man vom dritten Gliede an jedes nachkommende wie folgt berechnen.

Zu den bekannten zwei Anfangsgliedern p, q rechnet man ihr arithmetisches Mittel p_1 und schreibt es als drittes Glied an. Darauf berechnet man von den jetzigen zwei Schlussgliedern q, p_1 das geometrische Mittel q_1, und setzt es als viertes Glied an. Und in dieser Weise rechnet man fortwährend von den jedesmaligen zwei Schlussgliedern abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel und schreibt dieses als unmittelbar nachfolgendes Glied an.

Bei einer solchen Reihe fällt jedes spätere Glied zwischen die zwei ihm zunächst vorangehenden, also auch zwischen jedwede zwei unmittelbar auf einander folgende frühere Glieder. Desswegen müssen die Glieder einer derartigen Reihe einer gewissen gemeinschaftlichen Grenze zustreben, der sie desto näher liegen, je spätere sie sind, und welche zwischen jeden zwei benachbarten Gliedern liegt. Darum sind auch die gemeinschaftlichen Anfangsziffern jeder zwei decimal ausgedrückten Nachbarglieder auch die Anfangsziffern der decimal dargestellten Grenze, hier des Verhältnisses des Gehrens zum gestreckten Winkel.

19. Die Rechnung anlangend, so lässt sich noch bemerken, dass man anstatt des geometrischen Mittels zweier nur wenig von einander unterschiedenen Zahlen ihr arithmetisches Mittel nehmen könne, und zwar dann schon gewiss, wenn diese Zahlen, in Decimalen ausgedrückt, wenigstens in ih

so vielen Anfangsziffern übereinstimmen, als in wie vielen man das geometrische Mittel berechnen will. Denn sei δ der Unterschied zweier absoluter Zahlen a und b, von denen $a > b$ ist, nemlich

$$\delta = a - b.$$

Nun ist bekanntlich

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

daher

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \text{ und } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

d. h. **das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist jedenfalls grösser als ihr geometrisches.**

Sei d der Unterschied und m das arithmetische Mittel dieser zwei Mittel, also

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = d,$$

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = 2m,$$

so ist

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = 2dm;$$

folglich nach dem Obigen $2dm = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich

$$d = \tfrac{1}{8}\frac{\delta^2}{m},$$

und sofort

$$\frac{d}{m} = \tfrac{1}{8}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2.$$

Stimmen nun die Zahlen a und b, also auch ihr Mittel m in n obersten Ziffern überein, so beginnt der in einen Decimalbruch verwandelte Quotient $\frac{\delta}{m}$ an der $n$ten Decimalstelle mit einer von Null verschiedenen (geltenden) Ziffer, folglich seine zweite Potenz an der $2n$ten Decimalstelle, wenigstens mit 1 und höchstens mit 99, und also ihr 8ter Theil oder der Quotient $\frac{d}{m}$ spätestens an der $(2n+1)$ten Decimalstelle mit einer geltenden Ziffer oder an der $2n$ten Decimalstelle höchstens mit 12. Mithin beginnt der dem Quotienten $\frac{d}{m}$ gleiche Decimalbruch frühestens an der $(2n-1)$ten Decimalstelle und da höchstens mit 1, gewöhnlich aber erst an der $2n$ten und spätestens an der $(2n+1)$ten Decimalstelle. Folglich

stimmen das arithmetische und geometrische Mittel $\frac{a+b}{2}$ und $\sqrt{ab}$, und also auch ihr eigenes arithmetisches Mittel wenigstens in $2n-1$, gewöhnlich in $2n$, und höchstens in $2n+1$ obersten oder Anfangsziffern überein.

Begehrt man demnach das geometrische Mittel der Zahlen a und b in p obersten Ziffern genau, so muss sein, $2n+(-1, 0, +1) = p$; also ist $n = \frac{p+(1, 0, -1)}{2}$, nemlich n wenigstens die kleinere, meistens aber die grössere Hälfte von p, wenn p ungerad, dagegen die genaue Hälfte, wenn p gerad ist. Z. B. für $p=7$ ist $n=4$ oder 3; für $p=8$ ist $n=4$.

Man kann demnach das geometrische Mittel zweier Zahlen durch ihr leichter zu berechnendes arithmetisches dann schon ganz gewiss ersetzen, wenn die zwei Zahlen entweder in der genauen oder grösseren Hälfte der Anzahl Ziffern übereinstimmen, in der man das Mittel zu berechnen beabsichtigt.

20. Ist man sonach in der aufzustellenden Zahlenreihe (Art. 18.) so weit vorgerückt, dass zwei Glieder in der ersten oder grösseren Hälfte der Ziffern, in der man die Glieder insgesammt berechnet, übereinstimmen; so hat man fortan von den jedesmaligen zwei Schlussgliedern nur immer ihr arithmetisches Mittel zu rechnen und als nächst kommendes Glied anzusetzen. Allein die Grenze einer nach diesem Bildungsgesetze der einzelnen Glieder aufzustellenden Reihe lässt sich ganz einfach durch die beiden gegebenen Anfangsglieder der Reihe ausdrücken.

Denn sind a und b diese Anfangsglieder, so findet man für die weiteren Glieder folgende Ausdrücke:

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^2},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^4},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^5}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^6}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5}+\frac{b}{2^6}$$

u. s. w.

Demnach ist von diesen das $2r$te Glied

$$=\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^6}+\cdots+\frac{a}{2^{2r}}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5}\cdots+\frac{b}{2^{2r-1}}+\frac{b}{2^{2r}},$$

und das $(2r+1)$te

$$=\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^6}+\cdots+\frac{a}{2^{2r}}+\frac{a}{2^{2r+1}}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5}+\cdots+\frac{b}{2^{2r+1}},$$

also, wenn man diese geometrischen Reihen in umgekehrter Folge summirt,

$$\text{jenes Glied} = \frac{a-\frac{a}{2^{2r}}+2b-\frac{b}{2^{2r-1}}}{3}+\frac{b}{2^{2r}},$$

$$\text{und dieses} = \frac{a-\frac{a}{2^{2r}}+2b-\frac{b}{2^{2r+1}}}{3}+\frac{a}{2^{2r+1}}.$$

Mithin ist die gemeinsame Grenze, welcher sämmtliche Glieder zustreben, oder der die Reihe zustrebt,

$$=\frac{a+2b}{3}=b+\frac{a-b}{3}=b-\frac{b-a}{3},$$

nemlich gleich dem zweiten Gliede mehr oder weniger dem Drittel des Unterschiedes beider Anfangsglieder, je nachdem das erste oder zweite Glied das grössere von beiden ist.

21. Sonach braucht man die Glieder der Zahlenreihe (in 18.) dadurch, dass man abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel nimmt, nur so weit zu berechnen, bis einmal die beiden Schlussglieder in der ersten oder grösseren Hälfte der für alle Glieder festgesetzten Ziffermenge übereinstimmen, oder vielmehr, bis ihr geometrisches Mittel mit ihrem arithmetischen übereinstimmt; da man dann aus diesen zwei Schlussgliedern höchst leicht die Grenzzahl, nemlich das Verhältniss des Gehrens zum gestreckten Winkel, berechnen kann. Bedient man sich der Logarithmen, so kann man aus den Logarithmen der einander schon sattsam genäherten Glieder auf gleiche Weise den Logarithmen der fraglichen Grenze berechnen; weil der Logarithme des geometrischen Mittels zweier Zahlen das arithmetische Mittel der Logarithmen dieser Zahlen ist.

22. Zu Winkeln, deren goniometrische Functionen leicht angebbar sind, und mit denen man die hier beschriebene Rechnung anheben kann, eignen sich am besten diejenigen vielten Theile des gestreckten Winkels, deren Nenner die kleinsten Primzahlen, 2 und 3 sind, d. i. die Hälfte und das Drittel des gestreckten Winkels. Denn für

$$\alpha=\tfrac{1}{2}G=R \text{ ist } \cos\alpha=0,\ \sin\alpha=1,\ \operatorname{tang}\alpha=\tfrac{1}{0},$$
$$\text{also } p=0,\ q=\tfrac{1}{2}=0\cdot5;$$

und für

$\alpha = \frac{1}{3} G = \frac{2}{3} R$ ist $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tang \alpha = \sqrt{3}$;

$$\text{daher } p = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad q = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

23. Legt man nun *erstens* die **Hälfte des gestreckten Winkels zu Grunde**, so erhält man folgende **Tafel** zusammengehöriger Werthe:

Anzahl der Winkelhalbirungen.	$G : \alpha$ d. i. der Winkel α ist der ....te Theil des gestreckten	p	q	$\log p$	$\log q$
0	2	0	0·5	.	9·6989700
1	4	0·25	0·3535534	9·3979400	9·5484550
2	8	0·3017767	0·3266407	9·4796857	9·5140703
3	16	0·3142087	0·3203643	9·4972181	9·5056442
4	32	0·3172865	0·3188217	9·5014516	9·5035479
5	64	0·3180541	0·3184376	9·5025010	9·5030244
6	128	0·3182458	0·3183417	9·5027627	9·5028935

Nun fällt bereits das geometrische Mittel 0·3183417 der beiden nächst früheren Glieder mit ihrem arithmetischen überein *), daher lässt sich das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ und sein Logarithme aus den zwei Schlussgliedern wie folgt berechnen.

Vorletztes Glied	0·3182458,	sein Logarithme	9·5027627
Letztes „	0·3183417	„ „	9·5028935
Unterschied	959	. . . .	1308
Dessen Drittel	320	. . . .	436
Dieses ab vom Letzten			

Daher die Grenze $\frac{\Gamma}{G} = 0·3183097$ und $\log \frac{\Gamma}{G} = 9·5028499$

24. Geht man aber *zweitens* von dem **Drittel des gestreckten Winkels** aus, so findet man folgende **Tafel** zusammengehöriger Werthe:

---

*) Hier ist $\delta = 0·0001919$, $m = 0·318\ldots$, also $\frac{\delta}{m} = 0·00060\ldots$ und $\frac{d}{m} = 0·000000045\ldots$

Anzahl der Winkelhalbirungen.	$G:\alpha$ d. h. der Winkel α ist der ...te Theil des gestreckten	p	q	log p	log q
0	3	0·1924501	0·3849002	9·2843181	9·5853481
1	6	0·2886751	0·3333333	9·4604094	9·5228787
2	12	0·3110042	0·3219752	9·4927663	9·5078225
3	24	0·3164897	0·3192207	9·5003596	9·5040910
4	48	0·3178552	0·3185372	9·5022293	9·5031602
5	96	0·3181962	0·3183666	9·5026949	9·5029275
6	192	0·3182814	0·3183240	9·5028112	9·5028693

Nun kommt schon das geometrische Mittel 0·3183240 der beiden Vorläufer mit ihrem arithmetischen überein *). Daher findet man das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ und seinen Logarithmen aus den zwei letzten Gliedern auf folgende Weise.

Letztes	Glied 0·3183240,	sein Logarithme	9·5028693
Vorletztes	„ 0·3182814	„ „	9·5028112
Unterschied	426	. . . .	581
Dessen Drittel	142	. . . .	194
Dieses ab von dem Letzten			

bleibt die Grenze $\frac{\Gamma}{G} = 0·3183098$ und $\log \frac{\Gamma}{G} = 9·5028499$.

25. Es ist demnach mit einer geringen Unsicherheit der letzten Decimalziffer

$$\text{das Verhältniss } \frac{\Gamma}{G} = 0·3183098$$

$$\text{und sein Logarithme } \log \frac{\Gamma}{G} = 9·5028499.$$

Führt man die Rechnung in mehr Decimalen aus, so findet man

$$\frac{\Gamma}{G} = 0·31830\ 98861\ 83790$$

$$\log \frac{\Gamma}{G} = 9·50285\ 01273\ 05866.$$

*) Hier hat man $\delta = 0·0000852$, $m = 0·318\ldots$, also $\frac{\delta}{m} \leqq 0·00027$ und $\frac{d}{m} \leqq 0·0000000091$.

Daher ist der Gehren

$\Gamma = 0.318309886\, G$ in gestreckten Winkeln ausgedrückt
$= 0.636619772\, R$ „ rechten „ „
$= 57.295779^0$ „ Graden „
$= 57^0 17' 44{\cdot}806''$ „ Graden, Min. u. Sec. „
$= 206264{\cdot}806''$ „ Secunden „

V.

Der Gehren als Winkeleinheit. Ludolphische Zahl.

26. Da der Gehren ein bestimmter Winkel ist, so ist er eben so wie jeder andere bestimmte Winkel, wie der gestreckte und der rechte Winkel und der Grad, zur Messung aller übrigen Winkel geeignet, und sogar in den höheren goniometrischen Rechnungen die gewöhnliche Messeinheit der Winkel.

Nimmt man den Gehren Γ zur Winkeleinheit, so wird der Zahlwerth des gestreckten Winkels, also das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ des gestreckten Winkels G zum Gehren Γ, das ist das umgekehrte des früheren Verhältnisses $\frac{\Gamma}{G}$, des Gehrens Γ zum gestreckten Winkel G, von ihrem ersten ausführlichen Berechner Ludolph von Köln die Ludolphische Zahl genannt, und stets mit dem Buchstaben π bezeichnet, also $\frac{G}{\Gamma} = \pi$ gesetzt.

Auf diese Weise ist nach unserem obigen Rechnungsergebnisse

$$\frac{\Gamma}{G} = \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318309886183790$$

$$\log\frac{\Gamma}{G} = \log\frac{1}{\pi} = 9{\cdot}502850127305866,$$

und hieraus folgt durch Umkehrung der Betrag der Ludolphischen Zahl und ihres Logarithmen:

$$\frac{G}{\Gamma} = \pi = 3{\cdot}14159\ 26535\ 89793$$

$$\log\frac{G}{\Gamma} = \log\pi = 0{\cdot}49714\ 98726\ 94133.$$

Durch den Gehren Γ ausgedrückt oder ausgemessen ist demnach

der gestreckte Winkel $G = \pi\Gamma$,

der rechte Winkel $R = \frac{\pi}{2}\Gamma$,

der volle Winkel $2G = 4R = 2\pi\Gamma$,

und der Grad $\frac{G}{180} = \frac{R}{90} = \frac{\pi}{180}\Gamma$.

27. Bisher nahmen wir die Winkel selbst, ungemessen, in Betrachtung und bezeichneten sie durch Buchstaben. Denken wir sie uns nun durch den Gehren ausgemessen und lassen wir die früher gebrauchten Buchstaben α, G, R, Γ gegenwärtig die Zahlwerthe der Winkel vorstellen. Dann ist

der Gehren $\Gamma = 1$,
der gestreckte Winkel $G = \pi$,
der rechte Winkel $R = \frac{\pi}{2}$,
der volle Winkel $4R = 2G = 2\pi$,
der Grad $= \frac{\pi}{180}$.

28. Theilen wir durch die obigen Vergleichungen (in 12.) insgemein den Winkel α, so finden wir für jeden hinreichend kleinen Winkel α

$$\sin\alpha < \frac{\alpha}{\Gamma} < \operatorname{tang}\alpha,$$

und für einen unendlich abnehmenden Winkel α

$$\lim\sin\alpha \leqq \frac{\alpha}{\Gamma} \leqq \lim\operatorname{tang}\alpha.$$

Man ersieht auf den ersten Blick, dass diese Vergleichungen am einfachsten ausfallen, wenn man den Gehren zur Winkeleinheit macht, und diese Buchstaben Γ und α wieder Werthzahlen vorstellen, also $\Gamma = 1$ sein lässt. Denn so erhält man

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tang}\alpha,$$

und für $\lim\alpha \geqq 0$

$$\lim\sin\alpha \leqq \alpha \leqq \lim\operatorname{tang}\alpha.$$

Nimmt man demnach den Gehren zur Winkeleinheit, so ist der Zahlwerth jedes spitzen Winkels grösser als sein Sinus und kleiner als seine Tangente;

und bei unendlichem Abnehmen des Winkels nähern sich sein Sinus wachsend, seine Tangente aber abnehmend dem Zahlwerthe des Winkels;

oder bei den kleinsten Winkeln sind die Sinus und Tangenten den Zahlwerthen der Winkel gleich.

Die letzten Grenzgleichungen sind bekanntlich die Grundlage der goniometrischen Differentiations-Gesetze, also auch der Entwickelung der goniometrischen Functionen in Reihen.

29. Andere zuweilen brauchbare Grenzgleichungen ergeben sich, wenn man in den früheren (in 15.) für p und q ihre Ausdrücke und für $\frac{T}{G}$ auch noch $\frac{1}{\pi}$ einführt. So erhält man

$$\lim \frac{\alpha : G}{\sin \alpha} \leqq \frac{1}{\pi} \geqq \lim \frac{\alpha : G}{\operatorname{tang} \alpha},$$

und wenn man alles umkehrt

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha : G} \geqq \pi \geqq \lim \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\alpha : G},$$

oder

$$\lim \left(G : \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) \geqq \pi \geqq \lim \left(G : \frac{\alpha}{\operatorname{tang} \alpha}\right).$$

VI.

Anwendung des Gehrens in der Kreisrechnung.

30. Aus dieser ganzen Darstellung ersieht man nun, dass und wie die gesammte niedere und höhere Goniometrie ohne jene unwissenschaftliche Einmengung des Kreisbogens abgehandelt werden kann. Zum Schlusse soll hier nur noch gewiesen werden, wie die so eben gegebene Lehre vom Gehren sowohl in der Rectification der Kreisbogen und Kreislinien als auch in der Quadratur der Kreisausschnitte und Kreise sich anwenden lässt.

31. **Rectification der Kreisbogen und Quadratur der Kreisausschnitte.**

Sei a die Länge eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreisbogens, α der ihm angehörige Winkel am Mittelpunkte und S der Flächeninhalt des ihm entsprechenden Kreisausschnittes.

Man betrachte vom Winkel α einen beliebigen Theil, halbire ihn, bezeichne eine solche Hälfte mit ω und führe die Sehne des dem vollen Theile 2ω angehörigen Kreisbogens, die dann auf der Halbirungslinie dieses Winkeltheils senkrecht steht und durch sie halbirt wird. Dann kann diese Halbirungslinie an einer jeden solchen Winkelhälfte ω als Anfangsschenkel und Hauptprojectionsaxe angesehen werden. Mithin ist des als Endschenkel von ω vorfindigen Halbmessers r Hauptprojection der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte also $r \cos \omega$, und seine Nebenprojection die halbe Sehne daher $= r \sin \omega$; folglich der Flächeninhalt des von diesen drei Strecken gebildeten rechtwinkligen Dreieckes

$$= \tfrac{1}{2} r \cos \omega \,.\, r \sin \omega = \tfrac{1}{2} r^2 \sin \omega \cos \omega = \tfrac{1}{4} r^2 \sin 2\omega.$$

Mithin ist die ganze Sehne $= 2r \sin \omega$ und der Flächeninhalt des von ihr und von den, ihren Grenzpunkten angehörigen Halbmessern begrenzten gleichschenkligen Dreieckes $= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\omega$.

Theilt man nun den ganzen Winkel in beliebige Theile, deren Hälften der Reihe nach $\omega, \omega', \omega'', \omega'''\ldots$ sind, und zieht die den ganzen Theilen $2\omega, 2\omega', 2\omega'', 2\omega'''\ldots$ zukommenden Sehnen; so ist die aus ihnen zusammengesetzte, und dem Kreisbogen a eingeschriebene gebrochene Linie

$$= 2r(\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \sin\omega''' + \ldots),$$

und der Flächeninhalt des von ihr und von den, dem Winkel α als Schenkel dienenden Halbmessern begrenzten, dem Kreisausschnitte S eingeschriebenen Vieleckes

$$= \tfrac{1}{2} r^2 (\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \sin 2\omega''' + \ldots).$$

Lässt man nun sämmtliche Winkeltheile $\omega, \omega', \omega''\ldots$ unendlich abnehmen, so ist der Kreisbogen die Grenze der ihm eingeschriebenen gebrochenen Linie, und der Kreisausschnitt die Grenze des ihm eingeschriebenen Vieleckes, nemlich für

$$\lim(\omega, \omega', \omega''\ldots) = 0$$

ist

$$a = \lim 2r(\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \ldots),$$

$$S = \lim \tfrac{1}{2} r^2 (\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \ldots).$$

Zur Reduction dieser Ausdrücke multipliciren wir dieselben, weil

$$\alpha = 2\omega + 2\omega' + 2\omega'' + \ldots$$

ist, mit α, und theilen sie durch $2\omega + 2\omega' + 2\omega''\ldots$. Da erhalten wir

$$a = r\alpha : \lim \frac{\omega + \omega' + \omega'' + \ldots}{\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \ldots},$$

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \alpha : \lim \frac{2\omega + 2\omega' + 2\omega'' + \ldots}{\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \ldots};$$

oder, weil die vorkommenden Quotienten eigenthümliche Mittel sind:

$$a = r\alpha : \mathrm{Med}\left(\lim\frac{\omega}{\sin\omega}, \lim\frac{\omega'}{\sin\omega'}, \lim\frac{\omega''}{\sin\omega''}\ldots\right),$$

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \alpha : \mathrm{Med}\left(\lim\frac{2\omega}{\sin 2\omega}, \lim\frac{2\omega'}{\sin 2\omega'}, \lim\frac{2\omega''}{\sin 2\omega''}\ldots\right).$$

Alle diese Quotienten haben aber nach dem oben Erwiesenen eine gemeinschaftliche Grenze, nemlich den Gehren Γ; daher ist diesem auch ihr Mittel gleich, und sofort erhält man die Länge des Kreisbogens

$$a = r\,\frac{\alpha}{\Gamma},$$

und den Flächeninhalt des Kreisausschnittes

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\alpha}{\Gamma}.$$

Man berechnet demnach die Länge eines Kreisbogens, wenn man mit dem Zahlwerthe seines durch den Gehren gemessenen Winkels am Mittelpunkte den Halbmesser multiplicirt

32. Noch ist hier folgende Wahrnehmung von Wichtigkeit. Für $\alpha = \Gamma$ wird $a = r$.

Mithin ist der von mir, Gehren genannte [illegible]winkel auch derjenige Winkel, dessen bestimmender Kreisbogen so lang wie sein Halbmesser ist *).

33. **Rectification der Kreislinie und Quadratur des Kreises.**

Lassen wir in den letzten Ausdrücken von a und S den Winkel α am Mittelpunkte in einen vollen $= 2\pi\Gamma$ übergehen, und bezeichnen wir die Länge der Kreislinie mit C und den Flächeninhalt des Kreises mit K; so wird

$$C = 2\pi r, \quad K = \pi r^2.$$

Lassen wir noch d den Durchmesser des Kreises bedeuten, dann ist $r = \frac{d}{2}$, daher

$$C = \pi d, \quad K = \frac{\pi}{4} d^2.$$

34. Die erstere Gleichung gibt auch $\frac{C}{d} = \pi$.

Mithin ist die Ludolphische Zahl π auch das Verhältniss jeder Kreislinie zu ihrem Durchmesser, oder das sogenannte Kreisverhältniss; in welcher Bedeutung sie eigentlich gewöhnlich in der Geometrie vorkommt.

---

*) Vergl. nochmals die bereits oben citirte Note zu meinem Aufsatze im Archiv. Thl. VI. Heft 2. S. 120.

XL.

Note sur la convergence des séries.

Par

Monsieur C. J. Malmsten,

Professeur des Math. à l'Université d'Upsal.

§. 1.

Pour décider la convergence d'une série

$$f(0),\ f(1),\ f(2)\ldots.f(n)\ldots\ldots \quad (1)$$

Mr. Cauchy a proposé le théorème suivant (Exerc. de Math. Tom. II. pag. 230.):

„La série (1), dont tous les termes sont positifs, est convergente, lorsque des valeurs infinies de n réduisent toujours à zéro non seulement le produit

$$n\,f(n)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

„mais encore le produit

$$n^{1+\delta}.\,f(n)\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

„δ désignant un nombre déterminé, mais qui peut être aussi „petit que l'on voudra. La même série est divergente, quand „le produit (2) diffère sensiblement de zéro, et devient supérieur „à une certaine quantité $\varDelta$, toutes les fois qu'on attribue au „nombre n des valeurs considérables et supérieures à une limite „donnée."

Nous donnerons dans la note présente une extension très importante de ce théorème.

§. 2.

Pour cela nous démontrerons en premier lieu les trois théorèmes suivants.

Théorème I. En désignant comme à l'ordinaire par lx le logarithme Népérien de x, et en posant

$$l^2x = llx,\ l^3x = ll^2x,\ \ldots.\ l^{(p)}x = ll^{(p-1)}x\ldots$$

on aura toujours

$$l^{(p+1)}(n+1) - l^{(p+1)}n < \frac{1}{n.ln.l^2n\ldots l^{(p-1)}n.l^{(p)}n} \ldots \ldots (4)$$

pourvuque n soit suffisamment grand pour que $l^{(p)}n$ soit une quantité positive.

Démonstration. Pour toutes les valeurs positives de x on a

$$l(1+x) < x, \ldots \ldots \ldots (5)$$

d'où

$$l(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n},$$

c'est à dire

$$l(n+1) - ln < \frac{1}{n}. \ldots \ldots (6)$$

Cette formule donne immédiatement

$$l(n+1) < ln\,(1+\frac{1}{n.ln}),$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$l^2(n+1) - l^2n < l\,(1+\frac{1}{n.ln}),$$

et à l'aide de (5)

$$l^2(n+1) - l^2n < \frac{1}{n.ln}. \ldots \ldots (7)$$

De cette formule on aura

$$l^2(n+1) < l^2n\left\{1+\frac{1}{n.ln.l^2n}\right\}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$l^3(n+1) - l^3n < l\,(1+\frac{1}{n.ln.l^2n}),$$

d'où encore, à l'aide de (5),

$$l^3(n+1) - l^3n < \frac{1}{n.ln.l^2n}. \ldots \ldots (8)$$

La formule (4) étant ainsi démontrée pour $p=1$ et $p=2$, il suffit actuellement de faire voir qu'elle a encore lieu pour $p+1$, si elle est vraie pour p. Supposons donc qu'elle est vraie pour p: on aura

$$l^{(p+1)}(n+1) < l^{(p+1)}n \,.\left\{1+\frac{1}{n.ln.l^2n\ldots l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right\}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$l^{(p+2)}(n+1)-l^{(p+2)}n < l\left(1+\frac{1}{n.ln.l^2n\ldots l^{(p+1)}n}\right),$$

d'où enfin à l'aide de (2)

$$l^{(p+2)}(n+1)-l^{(p+2)}n < \frac{1}{n.ln.l^2n\ldots l^{(p)}n.\,l^{(p+1)}n},$$

c'est à dire le même résultat que celui de (4), en y mettant $p+1$ au lieu de p. C. Q. F. D.

Théorème II. Les mêmes choses étant supposées que dans le théorème I., on a toujours

$$l^{(p+1)}n - l^{(p+1)}(n-1) > \frac{1}{n.ln.l^2n\ldots l^{(p)}n}\,.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

Démonstration. Étant x positif et inférieur à 1 on a

$$-l(1-x) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\text{etc.},$$

d'où l'on voit que $-l(1-x)$ est une quantité positive et supérieure à x, c'est à dire que

$$-l(1-x) > x.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

À l'aide de cette formule, étant

$$ln-l(n-1) = -l\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

on aura

$$ln-l(n-1) > \frac{1}{n},$$

ou ce qui est la même chose

$$ln\left\{1-\frac{1}{n.ln}\right\} > l(n-1),$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$l^2 n - l^2(n-1) > -l\left(1 - \frac{1}{nln}\right),$$

et de plus, en vertu de (10),

$$l^2 n - l^2(n-1) > \frac{1}{nln}.$$

Ainsi la formule (9) étant démontrée pour $p=1$, il suffit actuellement de faire voir, qu'étant vraie pour p, elle subsiste encore pour $p+1$. Supposons donc qu'elle soit vraie pour p; on aura

$$l^{(p+1)} n \left\{1 - \frac{1}{n.ln...l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right\} > l^{(p+1)}(n-1) \ldots (10^*),$$

d'où, en prenant les logarithmes, on aura

$$l^{(p+2)} n - l^{(p+2)}(n-1) > -l\left(1 - \frac{1}{n.ln...l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right),$$

et enfin à l'aide de (10)

$$l^{(p+2)} n - l^{(p+2)}(n-1) > \frac{1}{n.ln.l^2n...l^{(p+1)}n},$$

c'est à dire le même résultat que celui de (10^*), en y mettant $p+1$ au lieu de p. C. Q. F. D.

Théorème III. Les mêmes choses étant supposées que dans les théorèmes précédents, on a toujours

$$\frac{1}{n.ln...l^{(p-1)}n.(l^{(p)}n)^{\alpha}} < \frac{[l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha} - (l^{(p)}n)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \ldots (11)$$

toutes les fois que $\alpha > 1$.

Démonstration. En vertu de la formule connue

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on voit facilement que pour toutes les valeurs positives de x on a

$$e^x > 1 + x \ldots (12)$$

Mais la formule (9) donne

$$l^{(p+1)} n - \frac{1}{n.ln.l^2n...l^{(p)}n} > l^{(p+1)}(n-1),$$

d'où il suit

$$e^{l^{(p+1)}n} . e^{-\frac{1}{n.ln...l^{(p)}n}} > e^{l^{(p+1)}(n-1)},$$

c'est à dire

$$l^{(p)}n \cdot e^{-\frac{1}{n.ln...l^{(p)}n}} > l^{(p)}(n-1).$$

Cette formule élévée à $1-\alpha$ donnera, toutefois que $\alpha>1$,

$$[l^{(p)}n]^{1-\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha-1}{n.ln...l^{(p)}n}} < [l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha},$$

d'où „a fortiori" (à cause de (12)) il provient

$$(l^{(p)}n)^{1-\alpha} \cdot \left\{1+\frac{\alpha-1}{n.ln...l^{(p)}n}\right\} < [l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n.ln...l^{(p-1)}n.(l^{(p)}n)^{\alpha}} < \frac{[l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha}-[l^{(p)}n]^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

C. Q. F. D.

§. 3.

A l'aide des formules (4) et (11) nous pouvons démontrer très facilement, qu'en posant

$$u_k^{(\alpha)} = \frac{1}{(m+k).l(m+k).l^2(m+k)...l^{(p-1)}(m+k).(l^{(p)}(m+k))^{\alpha}}$$

(m étant suffisamment grand pour que $l^{(p)}m$ soit positif), la série

$$u_0^{(\alpha)},\ u_1^{(\alpha)},\ u_2^{(\alpha)},\ u_3^{(\alpha)},\ \ldots \qquad (13)$$

est *divergente* pour $\alpha \leqq 1$, et *convergente* pour $\alpha>1$.

A) La série (13) est divergente pour $\alpha \leqq 1$. Désignons par $S_k^{(\alpha)}$ la somme de k premiers termes de la série (13), c'est à dire

$$S_k^{(\alpha)} = u_0^{(\alpha)} + u_1^{(\alpha)} + u_2^{(\alpha)} + \ldots + u_{k-1}^{(\alpha)},$$

et faisons dans (4) n successive égal à

$$m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots\ m+k-1;$$

en ajoutant les resultats nous aurons

$$S_k^{(1)} > l^{(p+1)}(m+k-1) - l^{(p+1)}m,$$

ce qui fait voir que pour des valeurs toujours croissantes de k la somme $S_k^{(1)}$ croit elle-même au delà de toute limite, d'où il suit nécessairement que la série (13) est divergente pour $\alpha = 1$; elle l'est donc encore plus pour $\alpha < 1$.

B) La série (13) est convergente pour $\alpha > 1$. Faisons dans (11) n successive égal à

$$m+k,\ m+k+1,\ m+k+2,\ \ldots m+k+r-1;$$

en ajoutant les résultats nous obtiendrons

$$S_{k+r}^{(\alpha)} - S_k^{(\alpha)} < \frac{[l^{(p)}(m+k-1)]^{1-\alpha} - [l^{(p)}(m+k+r-1)]^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

d'où en passant à la limite pour k (α étant > 1), on aura

$$\lim\,(S_{k+r}^{(\alpha)} - S_k^{(\alpha)}) = 0,\quad [k = \infty]$$

pour une valeur quelconque de r. Cette formule ayant lieu, la série (13) ne pourra qu'être convergente pour $\alpha > 1$.

§ 4.

En vertu de ce que nous venons de prouver, nous pouvons démontrer les propositions suivantes.

Théorème IV. **Soit proposée la série infinie**

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_n \ldots \tag{14}$$

s'il existe un nombre entier p tel que non seulement la limite du produit

$$n\,.\,ln\,.\,l^2 n \ldots l^{(p-1)} n\,.\,l^{(p)} n\,.\,u_n \tag{15}$$

mais encore celle du produit

$$n\,.\,ln\,.\,l^2 n \ldots l^{(p-1)} n\,.\,(l^{(p)} n)^{1+\delta}\,.\,u_n \tag{16}$$

s'évanouit pour $n = \infty$, δ désignant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, mais déterminée, la série (14) sera convergente; si au contraire la limite du produit (15) diffère sensiblement de zéro, la même serie sera divergente (supposé que tous ses termes soient du même signe).

Démonstration. *A*) Supposons que l'expression (16) s'évanouisse toujours pour $n = \infty$, et désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série (14). Soit N le plus grand des produits

$$\varphi(n)\,.u_n,\ \varphi(n+1)\,.\,u_{n+1},\ \varphi(n+2)\,.\,u_{n+2},\ \ldots \varphi(n+m-1)\,.\,u_{n+m-1},$$

où nous avons posé pour abréger les expressions

$$\varphi(n) = n \cdot ln \cdot l^2 n \cdot \ldots l^{(p-1)} n \cdot (l^{(p)} n)^{1+\delta}$$

N deviendra nul pour $n = \infty$. D'ailleurs on voit aisément que la différence

$$S_{n+m} - S_n$$

sera inférieure au produit

$$N \cdot \left\{ \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \frac{1}{\varphi(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+m-1)} \right\},$$

qui s'évanouit pour $n = \infty$, quelque grand que soit m (en vertu de ce que nous avons démontré dans le paragraphe précédent). La série (14) sera donc elle-même convergente.

B) Supposons en second lieu que pour $n = \infty$ l'expression (15) diffère sensiblement de zéro et qu'elle devienne constamment supérieur à une quantité positive A. Alors, tous le termes de la série (14) étant supposés du même signe, la différence $S_{n+m} - S_n$ surpassera le produit

$$A \cdot \left\{ \frac{1}{\psi(n)} + \frac{1}{\psi(n+1)} + \frac{1}{\psi(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\psi(n+m-1)} \right\} \ldots (17)$$

où nous avons posé, pour abréger, les expressions

$$\psi(n) = n \cdot ln \cdot l^2 n \ldots, l^{(p-1)} n \cdot l^{(p)} n. \quad \ldots \quad (18)$$

Donc, comme le produit (17) croîtra indéfiniment avec m, attendu que la série (13) pour $\alpha = 1$ est divergente, il est clair que la série (14) dans ce cas sera pareillement divergente.

C. Q. F. D.

***Théorème* V.** Étant proposée une série infinie

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots u_n,\ \ldots \ldots \quad (19)$$

soit pour $n = \infty$

$$\lim \left\{ \frac{l \cdot \dfrac{1}{u_n \cdot n \cdot ln \ldots l^{(p-1)} n}}{l^{(p+1)} n} \right\} = \alpha. \quad \ldots \quad (20)$$

où p est un entier; la série (19) sera convergente, s'il existe un tel p que $\alpha - 1$ est une quantité positive, qui diffère sensiblement de zéro; au contraire la même série sera divergente (supposé que tous ses termes soient du même signe) s'il existe un tel p, que $\alpha - 1$ devient une quantité négative sensiblement différente de zéro.

Démonstration. *A*) Supposons $\alpha-1=\varepsilon$, ε étant positif et différent de zéro; donc la formule (20) donne pour des valeurs infiniment grandes de n

$$l\,.\,\frac{1}{u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n}=(1+\varepsilon)\,l^{(p+1)}n,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n}=(l^{(p)}n)^{1+\varepsilon},$$

ou ce qui est la même chose

$$u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n\,.\,(l^{(p)}n)^{1+\varepsilon}=1.$$

Mais ε étant positif et sensiblement différent de zéro, on peut poser

$$\varepsilon=\delta+\delta',$$

où δ et δ' sont tous les deux positifs et sensiblement différents de zéro. On aura donc enfin

$$u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n\,.\,(l^{(p)}n)^{1+\delta}=\frac{1}{(l^{(p)}n)^{\delta'}},$$

c'est à dire la limite du produit (16) s'évanouit pour $n=\infty$; d'où il suit (Théor. IV.) que la série (19) est convergente dans le cas où $\alpha-1$ est positif et différent de zéro.

B) Supposons en second lieu que $\alpha-1=-\varepsilon$, ε étant positif et sensiblement différent de zéro. La formule (20) donne pour $n=\infty$

$$l\,.\,\frac{1}{u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n}=(1-\varepsilon)\,l^{(p+1)}n,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n}=(l^{(p)}n)^{1-\varepsilon},$$

ou enfin

$$u_n\,.\,n\,.\,ln\ldots\,l^{(p-1)}n\,.\,l^{(p)}n=(l^{(p)}n)^{\varepsilon}.$$

Ainsi la limite du produit (16) étant différente de zéro, il suit du théorème IV., que la série (19) est divergente (supposé que tous les termes soient du même signe), si $\alpha-1$ est négatif et sensiblement différent de zéro. C. Q. F. D.

§. 6.

Le théorème, que nous venons de démontrer, ne fait en effet que relever les règles pour discerner la convergence des séries infinies, qui se trouvent exposées en détail dans un Mémoire excellent de M. Bertrand (dans le Journ. de Math. par M. Liouville. Tom. 7. pag. 35.). Ces règles constituent, comme on sait, un criterium très général pour le cas exceptionel

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

à l'aide duquel on pourra le plus souvent décider, s'il y a convergence ou divergence. Mais étant fondées essentiellement sur les formules (4) et (11), dont la déduction a exigé jusqu'à présent le secours du calcul intégral, elles n'ont pu être proposées conjointement avec les autres propositions élémentaires sur les suites infinies.

Ce qu'il y a de plus important dans la note présente c'est que nous avons demontré les dites formules (4) et (11) sans secours du calcul intégral et par cela donné aux règles de M. Bertrand leur place méritée dans la théorie élémentaire des suites.

XLI.

Ueber die höheren Differenzialquotienten beliebiger Funktionen des Logarithmus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Kennt man die successiven Differenzialquotienten $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc. einer beliebigen Funktion $f(z)$, so kann man hieraus den höheren Differenzialquotienten

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n}$$

auf folgende sehr einfache Weise ableiten.

Für $lx = z$, also $\partial z = \frac{\partial x}{x}$, ist

$$\frac{\partial f(lx)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)\frac{1}{x}$$

oder

$$\frac{\partial f(lx)}{\partial x} = \frac{1}{x} f'(lx).$$

Differenziirt man wieder diese Gleichung nach der Regel für die Differenziation der Produkte und bemerkt, dass analog dem Vorigen $\frac{\partial f'(lx)}{\partial x} = \frac{1}{x} f''(lx)$ ist, so erhält man leicht

$$\frac{\partial^2 f(lx)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}\{f'(lx) - f''(lx)\}.$$

Erneuerte Differenziationen führen weiter zu den Gleichungen:

$$\frac{\partial^3 f(lx)}{\partial x^3} = +\frac{1}{x^3}\{2f'(lx) - 3f''(lx) + f'''(lx)\},$$

$$\frac{\partial^4 f(lx)}{\partial x^4} = -\frac{1}{x^4}\{6f'(lx) - 11f''(lx) + 6f'''(lx) - f^{IV}(lx)\},$$

u. s. w.

Man schliesst hieraus, dass der $n$te Differenzialquotient von $f(lx)$ unter folgender Form stehen werde:

$$1. \quad \frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{A_1 f'(lx) - A_2 f''(lx) + A_3 f'''(lx) - \ldots \pm A_n f^{(n)}(lx)\},$$

worin $A_1, A_2, \ldots A_n$ gewisse numerische Coeffizienten bedeuten. Es ist in der That sehr leicht, sich mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ von der formellen Richtigkeit der induktorisch abgeleiteten Gleichung (1) zu überzeugen.

Um nun die Werthe der genannten Coeffizienten zu bestimmen, braucht man blos zu bemerken, dass dieselben nur durch ihre Stellung bedingt sind, keineswegs aber von der Natur der Funktion $f(z)$ oder $f(lx)$ abhängen, dass folglich diese n unbekannten Grössen ganz im Allgemeinen bestimmt sind, wenn man sie für irgend eine spezielle Form von $f(z)$ ermittelt hat. Um aber das Letztere bewerkstelligen zu können, wird es nöthig, für $f(z)$ eine solche Wahl zu treffen, dass man die auf beiden Seiten der Gleichung (1) angedeuteten Differenziationen ganz unmittelbar ausführen kann. Diess ist nun in der That der Fall, wenn man

$$f(z) = e^{\mu z}$$

setzt, wobei μ eine beliebige Constante bedeutet. Es wird dann für ein ganzes positives k

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k \mu^k e^{-\mu z},$$

also

$$f^{(k)}(lx) = (-1)^k \mu^k x^{-\mu}.$$

Ferner hat man unmittelbar

$$f(lx) = x^{-\mu},$$

also

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} = (-1)^n \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)\, x^{-\mu-n}.$$

Substituiren wir diesen Werth nebst Dem, was sich aus der vorigen Gleichung für $k = 1, 2, \ldots n$ ergiebt, in die Gleichung (1), so folgt

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)\, x^{-\mu-n}$$
$$= \frac{1}{x^n}\{A_1 \mu x^{-\mu} + A_2 \mu^2 x^{-\mu} + A_3 \mu^3 x^{-\mu} + \ldots + A_n \mu^n x^{-\mu}\}$$

oder, wenn man beiderseits mit $x^{-\mu-n}$ hebt,

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)$$
$$= A_1 \mu + A_2 \mu^2 + A_3 \mu^3 + \ldots + A_n \mu^n.$$

Diese Relation unter den Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$ sagt uns, dass dieselben mit den sogenannten Fakultätenkoeffizienten identisch sind, welche die Coefficienten der successiven Potenzen von μ bilden, wenn man die Fakultät $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)$ in eine nach steigenden Potenzen von μ fortschreitende Reihe verwandelt, was durch gewöhnliche Multiplikation geschehen kann. Bezeichnen wir die Fakultätenkoeffizienten einer Fakultät vom Grade n mit

$$\overset{n}{C}_1, \overset{n}{C}_2, \overset{n}{C}_3, \ldots \overset{n}{C}_n;$$

so ist für jedes ganze positive k

$$A_k = \overset{n}{C}_k,$$

folglich nach Nro. (1)

$$2.\quad \frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{\overset{n}{C}_1 f'(lx) - \overset{n}{C}_2 f''(lx) + \overset{n}{C}_3 f'''(lx) - \ldots \pm \overset{n}{C}_n f^{(n)}(lx)\},$$

und hiermit hat unsere Aufgabe ihre vollständige Lösung gefunden, da sich die Fakultätenkoeffizienten vermöge ihrer combinatorischen Bedeutung independent berechnen lassen.

Beispielsweis sei $f(z)=z^m$, wobei m eine ganz beliebige Grösse ist; es wird dann für ein positives ganzes k

$$f^{(k)}(z)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{k-1})\,z^{m-k},$$

oder wenn wir mit m_k den $k$ten Binomialkoeffizienten des Exponenten m und $1.2\ldots k$ mit k' bezeichnen,

$$f^{(k)}(z)=k'm_k z^{m-k},$$

folglich

$$f^{(k)}(lx)=k'm_k(lx)^{m-k}.$$

Da ferner $f(lx)=(lx)^m$ ist, so ergiebt sich jetzt

$$3.\quad \frac{\partial^n (lx)^m}{\partial x^n}=$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{1'm_1\overset{n}{C}_1(lx)^{m-1}-2'm_2\overset{n}{C}_2(lx)^{m-2}+\ldots \atop \ldots+(-1)^{n-1}n'm_n\overset{n}{C}_n(lx)^{m-n}\right\}$$

Mittelst dieser Formel lässt sich auch der Ausdruck $[l(1+x)]^m$ für ganze positive m nach dem Taylorschen Theoreme

$$F(h+x)=F(h)+\frac{F'(h)}{1}x+\frac{F''(h)}{1.2}x^2+\ldots\text{ etc.}$$

in eine Reihe verwandeln, wenn man

$$F(x)=(lx)^m$$

und $h=1$ setzt. Es ist dann nach dem Vorigen

$$4.\quad F^{(n)}(x)=$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{1'm_1\overset{n}{C}_1(lx)^{m-1}-2'm_2\overset{n}{C}_2(lx)^{m-2}+\ldots \atop \ldots+(-1)^{n-1}n'm_n\overset{n}{C}_n(lx)^{m-n}\right\}$$

Hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $n<m$, $n=m$ oder $n>m$ ist. Im ersten bleiben die Exponenten $m-1$, $m-2, \ldots m-n$ sämmtlich positiv und grösser als [illegible]her wird für $x=h=1$

$$5.\quad F^{(n)}(1)=0,\quad n<m.$$

Im zweiten Falle ist $m-n=0$, folglich das letzte Glied in der Parenthese

$$=(-1)^{m-1}m'm_m\overset{m}{C}_m,$$

während in allen übrigen Gliedern positive von Null verschiedene Exponenten des lx vorkommen. Es wird daher

$$6. \qquad F^{(n)}(1)=m'm_m\overset{m}{C}_m, \quad n=m.$$

Für $n>m$ endlich fallen alle diejenigen Glieder weg, in welchen lx negative Exponenten erhalten würde, weil bekanntlich

$$m_{m+1}=m_{m+2}=m_{m+3}=\ldots=0$$

ist. Es reduzirt sich daher die Formel (4) auf

$$F^{(n)}(x)=$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{1'm_1\overset{n}{C}_1(lx)^{m-1}-2'm_2\overset{n}{C}_2(lx)^{m-2}+\ldots+(-1)^{m-1}m'm_m\overset{n}{C}_m\},$$

woraus für $x=h=1$ folgt

$$7. \qquad F^{(n)}(1)=(-1)^{m+n}m'm_m\overset{m}{C}_m, \quad n>m.$$

Nehmen wir jetzt

$$n=0,\ 1,\ 2, \ldots (m-1),\ m,\ (m+1),\ (m+2),\ \text{etc.}$$

so giebt das Taylor'sche Theorem unter Benutzung der unter (5), (6) und (7) gefundenen Werthe

$$[l(1+x)]^m=$$

$$\frac{m'm_m}{1.2..m}\overset{m}{C}_m x^m-\frac{m'm_m}{1.2..(m+1)}\overset{m+1}{C}_m x^{m+1}$$

$$+\frac{m'm_m}{1.2..(m+2)}\overset{m+2}{C}_m x^{m+2}-\ldots\ldots,$$

oder, weil $m_m=1$, $m'=1.2..m$ ist,

$$8. \qquad [l(1+x)]^m=$$

$$\overset{m}{C}_m x^m-\overset{m+1}{C}_m\frac{x^{m+1}}{m+1}+\overset{m+2}{C}_m\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}-\ldots\ldots$$

Die noch nöthige Untersuchung über die Gränzen der Gültigkeit dieses Resultats (Convergenzbetrachtung) reduzirt sich auf die einfache Bemerkung, dass die vorstehende Gleichung die $m$te Potenz der folgenden

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

sein muss, also nur so lange bestehen kann, aber auch bestehen muss, als die letztere gilt. Hieraus folgt sogleich, dass die Gültigkeit der Gleichung (8) an die Gränzen $x = +1$, $x = -1$ gebunden ist.

Für $m = 2$ hat man z. B.

$$\overset{2}{C}_2 = 1,\quad \overset{3}{C}_2 = 2+1 = 1.2.(1+\frac{1}{2}),$$

$$\overset{4}{C}_2 = 3.2+3.1+2.1 = 1.2.3.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}),\text{ u. s. w.},$$

woraus man leicht das schon bekannte Resultat findet:

$$[l(1+x)]^2 =$$

$$x^2 - \frac{2}{3}(1+\frac{1}{2})x^3 + \frac{2}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^4 - \frac{2}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})x^5 + \ldots$$

$$1 \geqq x \geqq -1.$$

Nimmt man in der Gleichung (8)

$$x = -\frac{z}{1+z},$$

wo nun x durch jedes beliebige positive z zum ächten Bruche wird, so ergiebt sich

$$[l(1+z)]^m =$$

$$\overset{m}{C}_m\left(\frac{z}{1+z}\right) + \frac{\overset{m+1}{C}_m}{m+1}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+1} + \frac{\overset{m+2}{C}_m}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+2} + \ldots$$

$$+\infty \geqq z \geqq 0.$$

Die Gleichung (8) kann auch zur Transformation von Reihen dienen, welche nach Potenzen von $l(1+x)$ fortschreiten. Ein besonders elegantes Beispiel hierzu bietet die Reihe für den Integrallogarithmus dar. Man hat nämlich für jedes z

$$li(z) = A + \frac{1}{2}l[(lz)^2] + \frac{1}{1}\cdot\frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \ldots$$

worin A die von Soldner und Mascheroni auf 0,57 bestimmte Constante bedeutet.

Für $z = 1 + \ldots$ wird hier

$$li(1+x) = A + \frac{1}{2}l[l(1+x)^2] + \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+x)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{l(1+x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{l(1+x)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Unter der Bedingung, dass $1 \geqq x > -1$ ist, lässt sich hier jedes einzelne Glied nach Formel (7) für $m = 1, 2, 3,$ etc. in eine Reihe verwandeln. Vereinigt man hierauf diejenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, so gelangt man ohne alle Schwierigkeit zu der folgenden Formel:

$$li(1+x) = A + \frac{1}{2}l[l(1+x)^2] + \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_2 x^2}{1.2} + \frac{a_3 x^3}{1.2.3} - \ldots.$$

$$1 \geqq x \geqq -1,$$

worin irgend ein Koeffizient a_n mittelst der Gleichung

$$a_n = \frac{1}{1}\overset{n}{C}_1 - \frac{1}{2}\overset{n}{C}_2 + \frac{1}{3}\overset{n}{C}_3 - \ldots \pm \frac{1}{n}\overset{n}{C}_n$$

bestimmt wird.

XLII.

Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von
dem Herausgeber.

Fast in allen Sammlungen trigonometrischer Aufgaben kommt das folgende Problem vor:

Aus drei gegebenen in einer horizontalen Ebene in gerader Linie liegenden Punkten werden die Neigungswinkel der von diesen drei Punkten nach einem vierten beliebigen Punkte im Raume gezogenen Linien gegen die horizontale Ebene, in welcher die drei gegebenen Punkte liegen, gemessen; man soll die Höhe dieses

vierten Punktes über der in Rede stehenden horizontalen Ebene bestimmen.

Unter dieser beschränkten Form hat die Aufgabe nur einen sehr geringen Werth für die Praxis. Dagegen scheint mir dieselbe unter verallgemeinerter Gestalt öfters eine vortheilhafte Anwendung bei geodätischen Messungen finden zu können, und ich will daher in dieser Abhandlung eine Auflösung des folgenden allgemeinen Problems zu geben versuchen.

Aufgabe.

In drei durch ihre Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem gegebenen Punkten M, M_1, M_2 werden die 180° nicht übersteigenden Winkel gemessen, welche die von den drei gegebenen Punkten M, M_1, M_2 nach einem beliebigen vierten Punkte N im Raume gezogenen Linien MN, M_1N, M_2N mit den positiven Theilen der dritten Axen dreier durch die Punkte M, M_1, M_2 gelegter dem primitiven Coordinatensysteme paralleler Coordinatensysteme einschliessen*); man soll die Lage des Punktes N im Raume, d. h. seine Coordinaten in Bezug auf das zum Grunde gelegte Coordinatensystem, bestimmen.

§. 2.

Die gegebenen rechtwinkligen Coordinaten der Punkte M, M_1, M_2 seien respective

$$a,\ b,\ c;\quad a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;$$

und x, y, z seien die gesuchten Coordinaten des Punktes N in Bezug auf dasselbe System. Die von den Linien

$$MN=\varrho,\quad M_1N=\varrho_1,\quad M_2N=\varrho_2$$

mit den positiven Theilen dreier durch die Punkte M, M_1, M_2 gelegter, den primitiven Axen paralleler Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien respective

$$\varphi,\ \psi,\ i;\quad \varphi_1,\ \psi_1,\ i_1;\quad \varphi_2,\ \psi_2,\ i_2;$$

wo also nach den gemachten Voraussetzungen die drei Winkel i, i_1, i_2 als bekannt angenommen werden.

Dies vorausgesetzt, hat man nun offenbar die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x=a+\varrho\cos\varphi=a_1+\varrho_1\cos\varphi_1=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2, \\ y=b+\varrho\cos\psi=b_1+\varrho_1\cos\psi_1=b_2+\varrho_2\cos\psi_2, \\ z=c+\varrho\cos i\ =c_1+\varrho_1\cos i_1\ =c_2+\varrho_2\cos i_2; \end{cases}$$

und nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie:

*) Also etwa die Zenithdistanzen des Punktes N in den Punkten M, M_1, M_2.

$$2)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos i^2 = 1, \\ \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 + \cos i_1{}^2 = 1, \\ \cos\varphi_2{}^2 + \cos\psi_2{}^2 + \cos i_2{}^2 = 1; \end{cases}$$

oder

$$3)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = \sin i^2, \\ \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 = \sin i_1{}^2, \\ \cos\varphi_2{}^2 + \cos\psi_2{}^2 = \sin i_2{}^2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) erhält man:

$$4)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, & \cos\psi_1 = \dfrac{b-b_1+\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, & \cos\psi_2 = \dfrac{b-b_2+\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

und folglich wegen der Gleichungen 3):

$$5)\quad \begin{cases} (a-a_1+\varrho\cos\varphi)^2 + (b-b_1+\varrho\cos\psi)^2 = \varrho_1{}^2\sin i_1{}^2, \\ (a-a_2+\varrho\cos\varphi)^2 + (b-b_2+\varrho\cos\psi)^2 = \varrho_2{}^2\sin i_2{}^2; \end{cases}$$

also nach gehöriger Entwickelung dieser Gleichungen, mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen 3):

$$6)\quad \begin{cases} 2\{(a-a_1)\cos\varphi + (b-b_1)\cos\psi\}\varrho \\ = \varrho_1{}^2\sin i_1{}^2 - \varrho^2\sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2, \\ 2\{(a-a_2)\cos\varphi + (b-b_2)\cos\psi\}\varrho \\ = \varrho_2{}^2\sin i_2{}^2 - \varrho^2\sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen 1) ist

$$7)\quad \varrho_1 = \frac{c-c_1+\varrho\cos i}{\cos i_1}, \quad \varrho_2 = \frac{c-c_2+\varrho\cos i}{\cos i_2};$$

also

$$\begin{aligned} &\varrho_1{}^2\sin i_1{}^2 - \varrho^2\sin i^2 \\ &= (c-c_1+\varrho\cos i)^2\tang i_1{}^2 - \varrho^2\sin i^2, \\ &\varrho_2{}^2\sin i_2{}^2 - \varrho^2\sin i^2 \\ &= (c-c_2+\varrho\cos i)^2\tang i_2{}^2 - \varrho^2\sin i^2; \end{aligned}$$

und folglich, wie leicht erhellet, wenn der Kürze wegen

$$8)\quad \begin{cases} E_1 = \sqrt{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (c-c_1)^2}, \\ E_2 = \sqrt{(a-a_2)^2 + (b-b_2)^2 + (c-c_2)^2} \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$\{\varrho_1{}^2\sin i_1{}^2-\varrho^2\sin i^2-(a-a_1)^2-(b-b_1)^2\}\cos i_1{}^2$$
$$=(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2$$
$$+2\varrho(c-c_1)\cos i\sin i_1{}^2$$
$$-\varrho^2(\sin i^2\cos i_1{}^2-\cos i^2\sin i_1{}^2),$$
$$\{\varrho_2{}^2\sin i_2{}^2-\varrho^2\sin i^2-(a-a_2)^2-(b-b_2)^2\}\cos i_2{}^2$$
$$=(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2$$
$$+2\varrho(c-c_2)\cos i\sin i_2{}^2$$
$$-\varrho^2(\sin i^2\cos i_2{}^2-\cos i^2\sin i_2{}^2);$$

oder

$$\{\varrho_1{}^2\sin i_1{}^2-\varrho^2\sin i^2-(a-a_1)^2-(b-b_1)^2\}\cos i_1{}^2$$
$$=(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2$$
$$+2\varrho(c-c_1)\cos i\sin i_1{}^2$$
$$-\varrho^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1),$$
$$\{\varrho_2{}^2\sin i_2{}^2-\varrho^2\sin i^2-(a-a_2)^2-(b-b_2)^2\}\cos i_2{}^2$$
$$=(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2$$
$$+2\varrho(c-c_2)\cos i\sin i_2{}^2$$
$$-\varrho^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$9)\quad\left\{\begin{aligned}K_1\cos i_1{}^2&=(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2\\&\quad+2\varrho(c-c_1)\cos i\sin i_1{}^2\\&\quad-\varrho^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1),\\K_2\cos i_2{}^2&=(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2\\&\quad+2\varrho(c-c_2)\cos i\sin i_2{}^2\\&\quad-\varrho^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2);\end{aligned}\right.$$

so ist nach 6):

$$10)\quad\left\{\begin{aligned}2\{(a-a_1)\cos\varphi+(b-b_1)\cos\psi\}\varrho&=K_1,\\2\{(a-a_2)\cos\varphi+(b-b_2)\cos\psi\}\varrho&=K_2;\end{aligned}\right.$$

folglich

$$11)\quad\left\{\begin{aligned}2\varrho\cos\varphi&=\frac{(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2}{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)},\\2\varrho\cos\psi&=-\frac{(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2}{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)}.\end{aligned}\right.$$

Nach der ersten der Gleichungen 3) ist aber

$$(2\varrho\cos\varphi)^2+(2\varrho\cos\psi)^2=4\varrho^2\sin i^2;$$

t nach 11):

$$^{2}\sin i^{2} = \frac{\{(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2\}^2+\{(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2\}^2}{\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}^2},$$

Gleichung nun bloss noch die eine unbekannte Grösse ϱ

tzt man der Kürze wegen:

$$
13)\left\{\begin{aligned}
A &= (a-a_2)\{(c-c_1)^2-E_1^2\cos i_1^2\}\cos i_2^2\\
&\quad-(a-a_1)\{(c-c_2)^2-E_2^2\cos i_2^2\}\cos i_1^2,\\
B &= (b-b_2)\{(c-c_1)^2-E_1^2\cos i_1^2\}\cos i_2^2\\
&\quad-(b-b_1)\{(c-c_2)^2-E_2^2\cos i_2^2\}\cos i_1^2;\\
A_1 &= (a-a_2)(c-c_1)\cos i\sin i_1^2\cos i_2^2\\
&\quad-(a-a_1)(c-c_2)\cos i\sin i_2^2\cos i_1^2,\\
B_1 &= (b-b_2)(c-c_1)\cos i\sin i_1^2\cos i_2^2\\
&\quad-(b-b_1)(c-c_2)\cos i\sin i_2^2\cos i_1^2;\\
A_2 &= -(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2\\
&\quad+(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2,\\
B_2 &= -(b-b_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2\\
&\quad+(b-b_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2;
\end{aligned}\right.
$$

venn

$$
14)\left\{\begin{aligned}
\varkappa_1 &= (c-c_1-E_1\cos i_1)(c-c_1+E_1\cos i_1)\cos i_2^2,\\
\varkappa_2 &= (c-c_2-E_2\cos i_2)(c-c_2+E_2\cos i_2)\cos i_1^2;\\
\lambda_1 &= (c-c_1)\cos i\sin i_1^2\cos i_2^2,\\
\lambda_2 &= (c-c_2)\cos i\sin i_2^2\cos i_1^2;\\
\mu_1 &= -\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2,\\
\mu_2 &= -\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2
\end{aligned}\right.
$$

wird:

$$
15)\left\{\begin{aligned}
A &= \varkappa_1(a-a_2)-\varkappa_2(a-a_1),\\
A_1 &= \lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1),\\
A_2 &= \mu_1(a-a_2)-\mu_2(a-a_1);
\end{aligned}\right.
$$

$$
16)\left\{\begin{aligned}
B &= \varkappa_1(b-b_2)-\varkappa_2(b-b_1),\\
B_1 &= \lambda_1(b-b_2)-\lambda_2(b-b_1),\\
B_2 &= \mu_1(b-b_2)-\mu_2(b-b_1);
\end{aligned}\right.
$$

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b \ldots$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho(c-c_1) \cos i \sin i_1 \ldots$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_1^2 - \mathrm{co} \ldots$$
$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b \ldots$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho(c-c_2) \cos i \sin i_2 \ldots$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_2^2 - \mathrm{c} \ldots$$

oder

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (\ldots$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho(c-c_1) \cos i \ldots \sin \ldots$$
$$- \varrho^2 \sin(i+i_1) \sin \ldots (i- \ldots$$
$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - \ldots b- \ldots$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho(c-c_2) \cos i \ldots \sin i \ldots$$
$$- \varrho^2 \sin(i+i_2) \sin \ldots (i- \ldots$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$9) \begin{cases} K_1 \cos i_1^2 = (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos \ldots i_1^2 \\ \qquad + 2\varrho(c- \ldots) \ldots \\ \qquad - \varrho^2 \sin(i \ldots i_1) \\ K_2 \cos i_2^2 = (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos \ldots i_2^2 \\ \qquad + 2\varrho(c- \ldots) \ldots \\ \qquad - \varrho^2 \sin(i \ldots \end{cases}$$

so ist nach 6):

$$10) \begin{cases} 2\{(a-a_1) \cos \varphi + (b-b_1) \cos \ldots \\ 2\{(a-a_2) \cos \varphi + (b-b_2) \cos \ldots \end{cases}$$

folglich

$$11) \begin{cases} 2\varrho \cos \varphi = \dfrac{(b-b_2) K_1 - \ldots}{(a-a_1)(b-b_2) - \ldots} \\ 2\varrho \cos \psi = -\dfrac{(a-a_2) K_1 - \ldots}{(a-a_1)(b-b_2) - \ldots} \end{cases}$$

Nach der ersten der Gleichungen 3)

$$(2\varrho \cos \varphi)^2 + (2\varrho \cos \psi)^2 = \ldots$$

$$\frac{c-c_2+\varrho\cos i}{\cos i_2}.$$

eben sich mittelst der Formeln:

$$\cos\psi_1=\frac{b-b_1+\varrho\cos\psi}{\varrho_1};$$

$$\cos\psi_2=\frac{b-b_2+\varrho\cos\psi}{\varrho_2};$$

$$i_1 \,.\, \cos\psi_1=\frac{b-b_1+\varrho\cos\psi}{c-c_1+\varrho\cos i}\cos i_1;$$

$$i_2 \,,\, \cos\psi_2=\frac{b-b_2+\varrho\cos\psi}{c-c_2+\varrho\cos i}\cos i_2;$$

y, z des Punktes N erhält man

$$\varrho_1\cos\varphi_1=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2,$$

$$\varrho_1\cos\psi_1=b_2+\varrho_2\cos\psi_2,$$

$$\varrho_1\cos i_1=c_2+\varrho_2\cos i_2.$$

§. 3.

, d. h. wenn die drei gegebenen
ene der xy liegen, so ist im vor-

s $i_1{}^2\cos i_2{}^2$,
s $i_1{}^2\cos i_2{}^2$;

$i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2$,
$i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2$

$-a_2)-\varkappa_2(a-a_1)$.

$-a_2)-\mu_2(a-a_1)$

$-b_2)-\varkappa_2(b-b_1)$,

$-b_2)-\mu_2(b-b_1)$.

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_1) \cos i \sin i_1^2$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_1^2 - \cos i^2 \sin i_1^2),$$
$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_2) \cos i \sin i_2^2$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_2^2 - \cos i^2 \sin i_2^2);$$

oder

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_1) \cos i \sin i_1^2$$
$$- \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1),$$
$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_2) \cos i \sin i_2^2$$
$$- \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$9) \left\{\begin{aligned} K_1 \cos i_1^2 = {} & (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2 \\ & + 2\varrho (c-c_1) \cos i \sin i_1^2 \\ & - \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1), \\ K_2 \cos i_2^2 = {} & (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2 \\ & + 2\varrho (c-c_2) \cos i \sin i_2^2 \\ & - \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2); \end{aligned}\right.$$

so ist nach 6):

$$10) \left\{\begin{aligned} 2\{(a-a_1)\cos\varphi + (b-b_1)\cos\psi\}\varrho = K_1, \\ 2\{(a-a_2)\cos\varphi + (b-b_2)\cos\psi\}\varrho = K_2; \end{aligned}\right.$$

folglich

$$11) \left\{\begin{aligned} 2\varrho\cos\varphi &= \frac{(b-b_2)K_1 - (b-b_1)K_2}{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)}, \\ 2\varrho\cos\psi &= -\frac{(a-a_2)K_1 - (a-a_1)K_2}{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)}. \end{aligned}\right.$$

Nach der ersten der Gleichungen 3) ist aber

$$(2\varrho\cos\varphi)^2 + (2\varrho\cos\psi)^2 = 4\varrho^2 \sin i^2;$$

also ist nach 11)

$$12)\quad 4\varrho^2 \sin i^2 = \frac{\{(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2\}^2+\{(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2\}^2}{\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}^2},$$

welche Gleichung nun bloss noch die eine unbekannte Grösse ϱ enthält.

Setzt man der Kürze wegen:

$$13)\quad \begin{cases} A = (a-a_2)\{(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2\}\cos i_2{}^2 \\ \qquad -(a-a_1)\{(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2\}\cos i_1{}^2, \\ B = (b-b_2)\{(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2\}\cos i_2{}^2 \\ \qquad -(b-b_1)\{(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2\}\cos i_1{}^2; \\ A_1 = (a-a_2)(c-c_1)\cos i\sin i_1{}^2\cos i_2{}^2 \\ \qquad -(a-a_1)(c-c_2)\cos i\sin i_2{}^2\cos i_1{}^2, \\ B_1 = (b-b_2)(c-c_1)\cos i\sin i_1{}^2\cos i_2{}^2 \\ \qquad -(b-b_1)(c-c_2)\cos i\sin i_2{}^2\cos i_1{}^2; \\ A_2 = -(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2 \\ \qquad +(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2, \\ B_2 = -(b-b_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2 \\ \qquad +(b-b_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2; \end{cases}$$

oder, wenn

$$14)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = (c-c_1-E_1\cos i_1)(c-c_1+E_1\cos i_1)\cos i_2{}^2, \\ \varkappa_2 = (c-c_2-E_2\cos i_2)(c-c_2+E_2\cos i_2)\cos i_1{}^2; \\ \lambda_1 = (c-c_1)\cos i\sin i_1{}^2\cos i_2{}^2, \\ \lambda_2 = (c-c_2)\cos i\sin i_2{}^2\cos i_1{}^2; \\ \mu_1 = -\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2, \\ \mu_2 = -\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$15)\quad \begin{cases} A = \varkappa_1(a-a_2)-\varkappa_2(a-a_1), \\ A_1 = \lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1), \\ A_2 = \mu_1(a-a_2)-\mu_2(a-a_1); \end{cases}$$

und

$$16)\quad \begin{cases} B = \varkappa_1(b-b_2)-\varkappa_2(b-b_1), \\ B_1 = \lambda_1(b-b_2)-\lambda_2(b-b_1), \\ B_2 = \mu_1(b-b_2)-\mu_2(b-b_1); \end{cases}$$

so ist

Also wird in diesem Falle die Gleichung 22):

$$32)\quad 0 = AA + BB + 2(AA_2 + BB_2 - 2C_1C_1)\varrho^2 + (A_2A_2 + B_2B_2)\varrho^4,$$

und kann folglich wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden.

Gehen wir in diesem Falle auf die ursprüngliche Gleichung 21) zurück, so wird dieselbe:

$$33)\quad 4C_1{}^2\varrho^2 = (A + A_2\varrho^2)^2 + (B + B_2\varrho^2)^2.$$

Setzen wir also

$$34)\quad X = A + A_2\varrho^2,\ Y = B + B_2\varrho^2;$$

so ist

$$35)\quad \varrho^2 = \frac{X-A}{A_2} = \frac{Y-B}{B_2},$$

und nach 33) haben wir also zur Bestimmung von X, Y die beiden folgenden Gleichungen:

$$36)\quad \frac{X-A}{A_2} = \frac{Y-B}{B_2} = \frac{X^2+Y^2}{4C_1{}^2} = \left(\frac{X}{2C_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{2C_1}\right)^2.$$

Setzen wir jetzt

$$37)\quad U = \frac{Y}{X},$$

so werden diese Gleichungen

$$38)\quad \frac{X-A}{A_2} = \frac{XU-B}{B_2} = \left(\frac{X}{2C_1}\right)^2 (1+U^2).$$

Aus der ersten Gleichung

$$\frac{X-A}{A_2} = \frac{XU-B}{B_2}$$

folgt:

$$39)\quad X = \frac{AB_2 - BA_2}{B_2 - A_2U}.$$

Also ist, wenn man dies in die Gleichung

$$\frac{X-A}{A_2} = \left(\frac{X}{2C_1}\right)^2 (1+U^2)$$

einführt:

$$-(B-AU)(B_2-A_2U) = \left(\frac{AB_2-BA_2}{2C_1}\right)^2 (1+U^2)$$

oder

$$40)\quad \left(\frac{AB_2-BA_2}{2C_1}\right)^2(1+U^2)$$
$$=-BB_2+(AB_2-BA_2)\,U-AA_2U^2.$$

Nun ist aber

$$AB_2-BA_2=\{\varkappa_1(a-a_2)-\varkappa_2(a-a_1)\}\{\mu_1(b-b_2)-\mu_2(b-b_1)\}$$
$$-\{\varkappa_1(b-b_2)-\varkappa_2(b-b_1)\}\{\mu_1(a-a_2)-\mu_2(a-a_1)\}$$
$$=(\varkappa_1\mu_2-\mu_1\varkappa_2)\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\},$$

d. i. nach 19):

$$41)\quad AB_2-BA_2=\frac{\varkappa_1\mu_2-\mu_1\varkappa_2}{\sin i\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2}\,C_1,$$

und folglich, weil nach 29)

$$\varkappa_1\mu_2-\mu_1\varkappa_2$$
$$=E_1{}^2\cos i_1{}^4\cos i_2{}^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)$$
$$-E_2{}^2\cos i_1{}^2\cos i_2{}^4\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)$$

ist:

$$42)\quad AB_2-BA_2$$
$$=\frac{E_1{}^2\cos i_1{}^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)-E_2{}^2\cos i_2{}^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{\sin i}\,C_1.$$

Setzen wir also

$$43)\quad D_1=\frac{E_1{}^2\cos i_1{}^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)-E_2{}^2\cos i_2{}^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2\sin i},$$

so ist

$$44)\quad AB_2-BA_2=2C_1D_1,$$

und nach 40) haben wir also die Gleichung:

$$45)\quad D_1D_1(1+U^2)=-BB_2+2C_1D_1U-AA_2U^2,$$

oder

$$46)\quad (AA_2+D_1D_1)\,U^2-2C_1D_1\,U+BB_2+D_1D_1=0,$$

oder

$$47)\quad U^2-\frac{2C_1D_1}{AA_2+D_1D_1}\,U=-\frac{BB_2+D_1D_1}{AA_2+D_1D_1}.$$

Löst man nun diese Gleichung des zweiten Grades auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

$$48)\quad U=\frac{C_1D_1\pm\sqrt{C_1{}^2D_1{}^2-(AA_2+D_1D_1)(BB_2+D_1D_1)}}{AA_2+D_1D_1}.$$

Hat man U auf diese Weise gefunden, so ergiebt sich X mittelst der Gleichung 39), d. i. nach 44) mittelst der Gleichung:

$$49)\quad X=\frac{2C_1D_1}{B_2-A_2U}$$

und Y mittelst der Formel:

$$50)\quad Y=XU=\frac{2C_1D_1U}{B_2-A_2U}.$$

Die Grösse ϱ findet man endlich mittelst der Formeln:

$$51)\quad \varrho=\sqrt{\frac{X-A}{A_2}}=\sqrt{\frac{Y-B}{B_2}}.$$

Die Winkel φ und ψ erhält man mittelst der Formeln:

$$52)\quad \cos\varphi=\frac{Y}{2C_1\varrho}\sin i,\quad \cos\psi=-\frac{X}{2C_1\varrho}\sin i;$$

und für ϱ_1 und ϱ_2 hat man in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen die folgenden Formeln:

$$53)\quad \varrho_1=\varrho\frac{\cos i}{\cos i_1},\quad \varrho_2=\varrho\frac{\cos i}{\cos i_2}.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$54)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi_1=\dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1},\quad \cos\psi_1=\dfrac{b-b_1+\varrho\cos\psi}{\varrho_1};\\ \cos\varphi_2=\dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2},\quad \cos\psi_2=\dfrac{b-b_2+\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{array}\right.$$

oder

$$55)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi_1=(\cos\varphi+\dfrac{a-a_1}{\varrho})\dfrac{\cos i_1}{\cos i},\quad \cos\psi_1=(\cos\psi+\dfrac{b-b_1}{\varrho})\dfrac{\cos i_1}{\cos i},\\ \cos\varphi_2=(\cos\varphi+\dfrac{a-a_2}{\varrho})\dfrac{\cos i_2}{\cos i},\quad \cos\psi_2=(\cos\psi+\dfrac{b-b_2}{\varrho})\dfrac{\cos i_2}{\cos i}. \end{array}\right.$$

Die Coordinaten x, y, z des Punktes N ergeben sich mittelst der Formeln:

$$56)\quad \left\{\begin{array}{l} x=a+\varrho\cos\varphi=a_1+\varrho_1\cos\varphi_1=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2,\\ y=b+\varrho\cos\psi=b_1+\varrho_1\cos\psi_1=b_2+\varrho_2\cos\psi_2\\ z=\varrho\cos i=\varrho_1\cos i_1=\varrho_2\cos i_2. \end{array}\right.$$

§ 4.

Wenn

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

ist, d. h., wie aus den bekannten Principien der analytis[chen Geo]metrie leicht folgt, wenn die Projectionen der d

Punkte M, M_1, M_2 auf der Ebene der xy in einer geraden Linie, oder, was dasselbe ist, die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 in einer auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene liegen; so wird $C_1=0$, und die Formeln 24) und 52) versagen dann ihre Dienste. In diesem Falle muss man zu den beiden ursprünglichen Gleichungen 10), nämlich zu den beiden Gleichungen

$$2\{(a-a_1)\cos\varphi+(b-b_1)\cos\psi\}\varrho=K_1,$$
$$2\{(a-a_2)\cos\varphi+(b-b_2)\cos\psi\}\varrho=K_2$$

zurückgehen, aus denen sich wegen der zum Grunde gelegten Bedingung

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

sogleich die beiden Gleichungen

$$57)\quad \begin{cases}(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2=0,\\(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2=0\end{cases}$$

ergeben, von denen jede nur die eine unbekannte Grösse ϱ enthält. Weil aber nach 17)

$$(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2=\frac{A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2}{\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2},$$
$$(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2=\frac{B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2}{\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2}$$

ist, so erhalten wir im vorliegenden Falle zur Bestimmung von ϱ die beiden folgenden Gleichungen:

$$58)\quad \begin{cases}A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2=0,\\B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2=0;\end{cases}$$

aus denen sich

$$59)\quad \begin{cases}\varrho=\dfrac{-A_1\pm\sqrt{A_1{}^2-AA_2}}{A_2},\\[2ex]\varrho=\dfrac{-B_1\pm\sqrt{B_1{}^2-BB_2}}{B_2}\end{cases}$$

ergiebt. Am besten bedient man sich aber bei der Auflösung der Gleichungen 58) der im ersten Theile des Archivs S. 12. gegebenen allgemeinen goniometrischen Methode der Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades. Um nämlich z. B. die erste dieser beiden Gleichungen aufzulösen, bestimmt man die Winkel Θ, Θ_1 mittelst der Formeln:

$$60)\quad \begin{cases}\cot(\Theta+\Theta_1)=\dfrac{A-A_2}{2A_1},\\[2ex]\cos(\Theta-\Theta_1)=-\dfrac{A+A_2}{2A_1}\sin(\Theta+\Theta_1);\end{cases}$$

und hat dann

$$61)\quad \varrho = \frac{\tang \Theta}{\tang \Theta_1}.$$

Führt man in die Gleichungen 60) für A, A_1, A_2 ihre Werthe aus 15) ein, so erhält man:

$$62)\quad \begin{cases} \cot(\Theta+\Theta_1) = \dfrac{(\varkappa_1-\mu_1)(a-a_2)-(\varkappa_2-\mu_2)(a-a_1)}{2\{\lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1)\}}, \\ \cos(\Theta-\Theta_1) = -\dfrac{(\varkappa_1+\mu_1)(a-a_2)-(\varkappa_2+\mu_2)(a-a_1)}{2\{\lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1)\}}\sin(\Theta+\Theta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Winkel φ und ψ hat man nun nach dem Obigen die drei Gleichungen:

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2+\cos\psi^2=\sin i^2, \\ 2\{(a-a_1)\cos\varphi+(b-b_1)\cos\psi\}\varrho=K_1, \\ 2\{(a-a_2)\cos\varphi+(b-b_2)\cos\psi\}\varrho=K_2; \end{cases}$$

und kann φ, ψ sowohl aus der ersten und zweiten, als auch aus der ersten und dritten bestimmen, aber nicht aus der zweiten und dritten, weil

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

ist. Am besten wird man jedoch jederzeit die gerade Linie, in welcher die Projectionen der drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 auf der Ebene der xy liegen, als Axe der x annehmen. Dann ist $b=b_1=b_2=0$, und wir erhalten zur Bestimmung von φ die beiden einfachen Formeln:

$$64)\quad \cos\varphi=\frac{K_1}{2(a-a_1)\varrho}=\frac{K_2}{2(a-a_2)\varrho},$$

zur Bestimmung von ψ aber die Formel

$$\cos\psi=\pm\sqrt{\sin i^2-\cos\varphi^2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$65)\quad \cos\psi=\pm\sqrt{-\cos(i-\varphi)\cos(i+\varphi)}.$$

Die Grössen ϱ und ϱ_1 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$66)\quad \varrho_1=\frac{c-c_1+\varrho\cos i}{\cos i_1},\quad \varrho_2=\frac{c-c_2+\varrho\cos i}{\cos i_2};$$

und die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 mittelst der Formeln

$$67)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1=\dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1},\ \cos\psi_1=\dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2=\dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2},\ \cos\psi_2=\dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

endlich die gesuchten Coordinaten x, y, z des Punktes N mittelst der Formeln

$$68)\quad \begin{cases} x = a + \varrho\cos\varphi = a_1 + \varrho_1\cos\varphi_1 = a_2 + \varrho_2\cos\varphi_2, \\ y = \varrho\cos\psi = \varrho_1\cos\psi_1 = \varrho_2\cos\psi_2, \\ z = c + \varrho\cos i = c_1 + \varrho_1\cos i_1 = c_2 + \varrho_2\cos i_2. \end{cases}$$

Ueber die Unbestimmtheit, welche in allem Vorhergehenden die doppelten Zeichen oder überhaupt die mehrfachen Wurzeln der Gleichungen lassen, muss aus der Natur jedes einzelnen vorliegenden Falls besonders entschieden werden, was bei praktischen Anwendungen selten eine Schwierigkeit haben wird.

§. 5.

Wenn in dem im vorhergehenden Paragraphen behandelten Falle $c = c_1 = c_2 = 0$ ist, d. h. wenn die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 in der Ebene der xy in einer geraden Linie liegen, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, und folglich auch $A_1 = B_1 = 0$. Also hat man nach 58) zur Bestimmung von ϱ die beiden Gleichungen:

$$69)\quad A + A_2\varrho^2 = 0, \quad B + B_2\varrho^2 = 0;$$

aus deren erster sich z. B., weil ϱ seiner Natur nach eine positive Grösse ist,

$$70)\quad \varrho = \sqrt{-\frac{A}{A_2}}$$

ergiebt. Nach 15) ist also

$$71)\quad \varrho = \sqrt{-\frac{\varkappa_1(a-a_2) - \varkappa_2(a-a_1)}{\mu_1(a-a_2) - \mu_2(a-a_1)}},$$

und folglich nach 14)

$$72)\quad \varrho = \pm \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)\,E_2{}^2 - (a-a_2)\,E_1{}^2}{(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2 - (a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negatig ist. Nehmen wir die gerade Linie, in welcher die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 liegen, als Axe der x an, so ist $b = b_1 = b_2 = 0$, und folglich nach 8)

$$E_1{}^2 = (a-a_1)^2, \quad E_2{}^2 = (a-a_2)^2;$$

also

$$73)\quad \varrho = \pm \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}},$$

worin man auch noch $a = 0$ setzen könnte, wodurch aber die F
mel eher an Eleganz verlieren als gewinnen würde.

Für K_1 und K_2 hat man im vorliegenden Falle nach 9) d
Ausdrücke

$$74)\quad \begin{cases} K_1 \cos i_1{}^2 = -(a-a_1)^2 \cos i_1{}^2 - \varrho^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1 \\ K_2 \cos i_2{}^2 = -(a-a_2)^2 \cos i_2{}^2 - \varrho^2 \sin(i+i_2)\sin(i \end{cases}$$

also nach 73)

$$75)\quad K_1 = -(a-a_1)\frac{(a-a_1)^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 - (a-a_2)^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2},$$

$$K_2 = -(a-a_2)\frac{(a-a_1)^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 - (a-a_2)^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}.$$

Den Winkel φ erhält man mittelst der Formeln:

$$76)\quad \cos\varphi = \frac{K_1}{2(a-a_1)\varrho} = \frac{K_2}{2(a-a_2)\varrho},$$

i. nach 74) mittelst der Formeln:

$$77)\quad \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{(a-a_1)^2\cos i_1{}^2 + \varrho^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2(a-a_1)\,\varrho\cos i_1{}^2}, \\[2ex] \cos\varphi = -\dfrac{(a-a_2)^2\cos i_2{}^2 + \varrho^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2)}{2(a-a_2)\,\varrho\cos i_2{}^2}; \end{cases}$$

oder mittelst der Formeln:

$$78)\quad \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{a-a_1}{2\varrho} - \dfrac{\varrho\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2(a-a_1)\cos i_1{}^2}, \\[2ex] \cos\varphi = -\dfrac{a-a_2}{2\varrho} - \dfrac{\varrho\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)}{2(a-a_2)\cos i_2{}^2}. \end{cases}$$

Auch könnte man mittelst der Formeln 73), 75), 76) leicht einen ganz indepeudenten Ausdruck für $\cos\varphi$ entwickeln, was wir dem Leser überlassen.

Den Winkel ψ erhält man nach 65) wieder mittelst der Formel

$$79)\quad \cos\psi = \pm\sqrt{-\cos(i-\varphi)\cos(i+\varphi)},$$

und ϱ_1, ϱ_2 mittelst der Formeln:

$$80)\quad \varrho_1 = \varrho\frac{\cos i}{\cos i_1},\quad \varrho_2 = \varrho\frac{\cos i}{\cos i_2}.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$81)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, & \cos\psi_1 = \dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\[2ex] \cos\varphi_2 = \dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, & \cos\psi_2 = \dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

und die Coordinaten x, y, z endlich mittelst der Formeln:

$$82)\quad \begin{cases} x = a+\varrho\cos\varphi = a_1+\varrho_1\cos\varphi_1 = a_2+\varrho_2\cos\varphi_2, \\ y = \varrho\cos\psi = \varrho_1\cos\psi_1 = \varrho_2\cos\psi_2, \\ z = \varrho\cos i = \varrho_1\cos i_1 = \varrho_2\cos i_2. \end{cases}$$

Durch die Coordinate z wird die mit ihrem gehörigen Zeichen genommene Entfernung des Punktes N von der Ebene der xy bestimmt. Nach 73) und 82) ist

$$83)\quad z=\pm\cos i\cos i_1\cos i_2\sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}},$$

in welcher Formel das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man die Entfernungen der Projection des Punktes N auf der Ebene der xy von den drei gegebenen Punkten M, M_1, M_2 respective durch r, r_1, r_2, so ist offenbar

$$84)\quad r=\rho\sin i,\ r_1=\rho_1\sin i_1,\ r_2=\rho_2\sin i_2;$$

folglich nach 80):

$$85)\quad r=\rho\sin i,\ r_1=\rho\cos i\tang i_1,\ r_2=\rho\cos i\tang i_2;$$

also nach 73)

$$86)\quad r=\pm\sin i\cos i_1\cos i_2\sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}},$$

$$r_1=\pm\cos i\sin i_1\cos i_2\sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}},$$

$$r_2=\pm\cos i\cos i_1\sin i_2\sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}};$$

n welchen Formeln die obern oder untern Zeichen genommen wer-
en müssen, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder ne-
ativ ist.

Ich sollte, wie ich auch schon im Eingange angedeutet habe, neinen, dass sich von den in den vorhergehenden Paragraphen ufgelösten Aufgaben in der Praxis zuweilen eine recht vortheilafte Anwendung machen lassen möchte; der bisher allein behanelte specielle Fall, wenn die drei gegebenen Punkte in einer der

drei angenommenen Coordinatenebenen, etwa in der Ebene der xy, in einer geraden Linie liegen, dürfte dazu aber gerade am wenigsten geeignet sein.

XLIII.

Miscellen.

Anschaulicher Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Von Herrn R. Hoppe, Lehrer der Mathematik zu Keilhau bei Rudolstadt.

Unter den hundert und mehr Beweisen, welche bereits für den pythagoräischen Lehrsatz existiren sollen, möchte ich auf einen aufmerksam machen, der darin besteht, die Flächenräume, deren Gleichheit bewiesen werden soll, in fünf Paar congruente und parallel liegende Stücke zu zerlegen, was er mittelst einer einzigen Hülfslinie bewerkstelligt. Er steht demnach mit dem gewöhnlichen Beweise für die Gleichheit der Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen auf einer Linie, an welchem Anfängern die Anwendung des Beweises zur Sicherstellung der Richtigkeit gewöhnlich zuerst klar wird, weil er von der unmittelbaren Anschauung durch einen einfachen Schluss zu dem nicht unmittelbar angeschauten führt.

Man lege, wenn in Taf. V. Fig. 6. AE das rechtwinklige Dreieck ist, das Quadrat der grossen Kathete $CD'E'$ nach aussen, dagegen die Quadrate der Hypotenuse und der kleinen Kathete $ABCDE$ und AB' nach innen, wie es in der Figur geschehen ist, und fälle von der ausserhalb der Kathetenquadrate liegenden Ecke des Hypotenusenquadrats ein Perpendikel auf die Verlängerung der kleinen Kathete; so fehlt es nicht an Stücken, aus denen sich die Congruenz der mit gleichen Buchstaben bezeichneten Dreiecke folgern lässt. Nun braucht man bloss die Data folgendermassen zusammenzustellen:

Quadrat der kl. Kathete $=A+B'$,

Quadrat der gr. Kathete $= \qquad C+D'+E'$,

Quadrat der Hypotenuse $=A+B+C+D+E$,

um die Gleichheit der Summe der ersten beiden mit dem letzten in die Augen fallen zu lassen.

Zur Abhandlung XLVII in Theil VIII.

Von dem Herrn Dr. J. Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die dort angeführten Resultate können leicht auf folgende Weise noch verallgemeinert werden.

Die Formel (1) des §. 1. jener Abhandlung giebt nämlich

$$\frac{d^mK}{dx^m}-\frac{d^mK'}{dx^m}=\sum_0^r[n.(n-1)\ldots(n-m+1)A_nx^{n-m}],$$

$$\int^m K\,dx^m-\int^m K'\,dx^m=\sum_0^r\left[\frac{A_nx^{n+m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right]$$

welche beide Formeln höchst allgemeine Summirungsformeln sind. Soll man also die Summe der Glieder des Ranges $0, 1, \ldots . r$ der Reihe finden, deren allgemeines Glied $n . (n-1) \ldots (n-m+1) A_n x^{n-m}$ ist, so suche man die Summe $\sum\limits_0^r A_n x^n$; heisst diese S, die erstere S', so hat man

$$S' = \frac{d^m S}{dx^m}. \quad (2)$$

Soll man dagegen die Summe $\sum\limits_0^r \frac{A_n x^{n+m}}{(n+1)(n+2) \ldots (n+m)} = S_1$ finden, so ist dieselbe

$$S_1 = \int^m S dx^m \quad (2)$$

wenn S die nämliche Bedeutung, wie in (1) hat. Für $m = 1$ folgt, wenn $S = \sum\limits_0^r A_n x^n$, $S' = \sum\limits_0^r n A_n x^{n-1}$, $S_1 = \sum\limits_0^r \frac{A_n x^{n+1}}{n+1}$,

$$S' = \frac{dS}{dx}, \quad S_1 = \int S dx \quad (3)$$

Bei den Formeln (2) und der zweiten in (3) haben wir die jeweils beizufügenden Konstanten mit inbegriffen; dieselben sind übrigens immer leicht zu bestimmen, da für $x = 0$ die Werthe von S' und S_1 bekannt sind.

So findet sich

$$\sum\limits_0^r n x^{n-1} \cos nt = \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - x \cos t - x^{r+1} \cos (r+1) t + x^{r+2} \cos rt}{1 - 2x \cos t + x^2}\right),$$

$$\sum\limits_0^r \frac{x^{n+1} \cos nt}{n+1} = \int_0^x \left(\frac{1 - x \cos t - x^{r+1} \cos (r+1) t + x^{r+2} \cos rt}{1 - 2x \cos t + x^2}\right) dx,$$

$$\sum\limits_0^r n x^{n-1} \sin nt = \frac{d}{dx}\left(\frac{(\sin t - x^r \sin (r+1) t + x^{r+1} \sin rt) x}{1 - 2x \cos t + x^2}\right),$$

$$\sum\limits_0^r \frac{x^{n+1} \sin nt}{n+1} = \int_0^x \frac{(\sin t - x^r \sin (r+1) t + x^{r+1} \sin rt) x}{1 - 2x \cos t + x^2} dx;$$

aus welchen Formeln folgt:

$$\sum\limits_0^r \frac{\cos nt}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x \cos t - x^{r+1} \cos (r+1) t + x^{r+2} \cos rt}{1 - 2x \cos t + x^2} dx,$$

$$\sum\limits_0^r \frac{\sin nt}{n+1} = \int_0^1 \frac{(\sin t - x^r \sin (r+1) t + x^{r+1} \sin rt) x}{1 - 2x \cos t + x^2} dx;$$

und hieraus wieder

$$\sum\limits_0^r \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x - x^{r+1} + x^{r+2}}{1 - 2x + x^2} dx = \int_0^1 \frac{1 - x^{r+1}}{1 - x} dx.$$

Nun ist $\int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x)$,

$$\int \frac{x^{r+1}}{1-x} dx = -\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^r}{r} - \frac{x^{r-1}}{r-1} \ldots - l(1-x);$$

also $$\sum_0^r \frac{1}{n+1} = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \ldots\ldots + 1,$$

was identisch das Gleiche ist, so dass auf diese Art der Werth von $\sum_0^r \frac{1}{n+1}$ nicht gefunden wird. Dagegen aber hat man hierdurch ein Mittel, den Werth des bestimmten Integrals $\int_0^1 \frac{1-x^{r+1}}{1-x}dx$ zu finden, der übrigens ganz eben so auf anderm Wege zu finden ist. Die Beispiele lassen sich leicht vermehren.

Berichtigungen.

In meinem Einiges von den Kegelschnitten überschriebenen Aufsatze Nr. XLII. im ersten Theile des Archivs sind auf S. 322. einige Zeichen verschrieben worden. Man muss nämlich auf dieser Seite für $1-\cos(\Theta-\omega)$, $1-\cos(\Theta_1-\omega)$, $1-\cos(\Theta_2-\omega)$ überall $1+\cos(\Theta-\omega)$, $1+\cos(\Theta_1-\omega)$, $1+\cos(\Theta_2-\omega)$, ferner in der 5ten und 7ten Zeile von unten für $r-r_1$ und $r-r_2$ beziehungsweise $-(r-r_1)$ und $-(r-r_2)$ schreiben, endlich dem Bruche, durch welchen in der 2ten Zeile von unten $\sin\omega$ ausgedrückt wird, das Zeichen — vorschreiben, das Zeichen — vor dem Bruche in der ersten Zeile von unten, durch welchen $\cos\omega$ dargestellt wird, aber streichen. Ich bitte diese leicht vorzunehmenden Abänderungen gefälligst nicht unberücksichtigt zu lassen. Ferner muss es auch auf S. 324. oben

statt $\{1-\cos(\Theta-\Theta_1)^2\}$, $\{1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)^2\}$, $\{1-\cos(\Theta_2-\Theta)^2\}$
heissen: $\{1-\cos(\Theta-\Theta_1)\}^2$, $\{1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)\}^2$, $\{1-\cos(\Theta_2-\Theta)\}^2$.

Thl. VII. S. 69. In dem gesperrt gedruckten Ausdrucke der aufzulösenden Aufgabe schalte man Z. 3. v. u. hinter dem Gedankenstriche die folgenden Worte ein: „und die Neigungswinkel der von dem ersten und zweiten gegebenen Punkte nach dem dritten Punkte gezogenen Linien gegen die durch die beiden gegebenen Punkte gelegten Horizontalebenen."

Zugleich bitte ich in dem Ueber eine astronomische Aufgabe überschriebenen Aufsatze Thl. VIII. Nr. VIII. S. 101. oben Z. 4—6 statt der Worte: „nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert" das Folgende zu setzen: „nur eine leicht zu bewirkende Drehung des Höhenkreises um 180° erfordert." Der Fehler hatte sich bei der Redaction des Aufsatzes durch eine vorgefallne Verwechselung mit etwas Anderem eingeschlichen und wurde erst später bemerkt. G.

In Thl. VIII. Heft 2. S. 147. Z. 5. ist $B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} B_1$ statt $B_n < \frac{1}{2^{\frac{}{2}}} B_1$ zu setzen.

XXIX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Lobatto, Lessen over de hoogere Algebra, opgesteld ten gebruike bij het onderwijs aan de Koninklijke academie ter opleiding van burgerlijke Ingenieurs, enz. te Delft. Amsterdam. 1845.

Lehmus, D. C. L.: algebraische Aufgaben aus dem Gebiete der reinen Mathematik, mit Angabe der Resultate. Berlin. 1846. 15 Sgr.

Royer: Solutions des problèmes d'arithmétique et de géométrie, à l'usage des demoiselles. Nanci. 1845.

Lettres à S. A. R. le Duc régnant de Saxe-Coburg et Gotha, sur la Theorie des Probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques; par A. Quetelet. Bruxelles. 1846. 8. 3 Rthlr.

In diesen an einen der edelsten Fürsten Deutschlands gerichteten Briefen hat Herr Quetelet eine ohne alle höhere mathematische Kenntnisse verständliche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit ihrer Anwendung auf die moralischen und politischen Wissenschaften zu geben versucht, und wir glauben, dass ihm dies auf eine ausgezeichnete Weise gelungen ist. Mit Ausnahme der „Introduction" zu der „Théorie analytique des probabilités" von Laplace wüssten wir kein Werk, welches in Bezug auf den beabsichtigten Zweck diesen Briefen würdig an die Seite gestellt zu werden verdiente. Aber auch vor dieser trefflichen „Introduction" gebührt Herrn Quetelets Werke nach unserer Ueberzeugung insofern ein Vorzug, weil in demselben in einer besonderen Abtheilung die vielen Beziehungen,

in denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den moralischen und politischen Wissenschaften, insbesondere zur Statistik, steht, auf eine überaus deutliche, anziehende und belehrende Weise hervorgehoben worden sind, weshalb kein Statistiker, welcher die beste Art und Weise, wie sich aus statistischen Daten möglichst sichere Resultate ziehen lassen, dieses auch äusserlich mit fast verschwenderischer Eleganz ausgestattete schöne Werk ungelesen lassen sollte. Aber auch Naturforscher, und zwar nicht bloss Astronomen und Physiker, sondern insbesondere auch Botaniker, überhaupt aber Jeder, der die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturwissenschaften in einer höchst anziehenden völlig populären Darstellung kennen lernen will, wird nach unserer vollkommensten Ueberzeugung keinen besseren Wegweiser als dieses Werk wählen können. Es sind 46 in 4 Abtheilungen getheilte Briefe, deren Hauptinhalt wir im Folgenden angeben wollen, da die Beschränktheit des Raums uns leider verbietet, noch mehr in's Einzelne einzugehen.

Première Partie. Sur la théorie des probabilités. 1. Nos connaissances et nos jugements ne sont fondés, en général, que sur des probabilités plus ou moins grandes qu'il faut savoir apprécier. 2. De la probabilité mathématique d'un événement simple. Difficulté de rendre les chances égales. 3. De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite se reproduira encore. 4. De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite dépend d'une cause qui facilite sa reproduction. 5. De la probabilité qu'un événement observé un certain nombre de fois, dans un nombre donné d'épreuves, se reproduira encore. 6. De la probabilité mathématique d'un événement composé. 7. De l'espérance mathématique. Loteries, sociétés d'assurances. 8. De l'espérance morale; remarques de Buffon à ce sujet. 9. Comment il faut envisager le calcul des probabilités. De l'accord entre la théorie et l'expérience. — *Deuxième partie.* Des moyennes et des limites. 10. Des moyennes et des limites en général. 11. Des moyennes proprement dites et des moyennes arithmétiques. 12. Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans les sciences politiques. 13. Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans la météorologie. 14. Loi de sortie de deux espèces d'événements simples dont les chances sont égales et les combinaisons peu nombreuses. Accord de la théorie et de l'expérience. 15. Loi de deux espèces d'événements simples, dont les chances sont égales, et qui se combinent d'un nombre considérable de manières; échelle de possibilité; sa construction. 16. L'échelle de possibilité est d'un usage général. 17. Théorie des moyennes. 18. Des moyennes proprement dites. Échelle de précision. Erreur probable. Module de précision. 19. Exemple de l'emploi de la théorie des moyennes emprunté à l'astronomie. 20. Reconnaître si une moyenne arithmétique est veritablement moyenne. Type de la taille humaine. 21. Chaque race d'hommes a son type particulier. Explication de cette théorie. 22. Événements ordinaires, extraordinaires. Monstruosités. — *Troisième partie.* De l'étude des causes. 23. Des causes et de leur appréciation. Causes constantes, causes variables, causes accidentelles. 24. Des causes en général, et en particulier des causes accidentelles quand les chances sont égales. 25. Des causes accidentelles, quand les

chances sont inégales. 26. Loi de sortie de deux événements dont les chances sont inégales. 27. Des causes constantes. 28. Des causes variables. 29. Des causes variables périodiques. 30. Sur les causes constantes qu'on peut regarder comme variables. Loi des grands nombres. 31. De l'étude des causes et de la marche à suivre dans l'observation. 32. De l'étude des causes. Floraison. 33. Suite de l'étude des causes. Floraison. — *Quatrième partie.* De la Statistique. 34. Des sciences d'observation et de la statistique en particulier. 35. La statistique est-elle un art ou une science? 36. Objets dont s'occupe la statistique. 37. Des différentes formes qu'affectent les statistiques. 38. De la manière de réunir les documents statistiques. 39. Sur la manière de contrôler les documents statistiques. 40. Manière de mettre en usage les documents statistiques. 41. Il faut faire de la statistique sans idées préconçues et ne négliger aucun chiffre. 42. Peut-on tirer avantage de documents statistiques incomplets? 43. Il ne faut comparer que les éléments comparables. 44. De l'emploi de la statistique dans les sciences médicales. 45. De l'utilité de la statistique pour l'administration. 46. Des progrès ultérieures de la statistique.

Auf diese Briefe, welche nicht eine einzige Formel enthalten, folgt nun eine Reihe von 30 Noten, welche zu den verschiedenen Briefen mathematische Zusätze in der Sprache der Analysis enthalten, und für alle diejenigen, welche die nöthigen mathematischen Kenntnisse besitzen, natürlich das Interesse an der Wissenschaft und an dem vorliegenden Werke erhöhen.

Möge dieses schöne Werk in recht viele Hände kommen, und zu der so sehr zu wünschenden immer grösseren Verbreitung und häufigeren Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den verschiedenartigsten Wissenschaften recht Vieles beitragen.

Unmittelbar folgen werden diesem Werke:

Lettres à Son Altesse Royale Le Prince Albert sur la Physique sociale; par A. Quetelet

deren baldigem Erscheinen wir mit Verlangen entgegen sehen.

Antistrauch.

(Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena.)

Goethe sagte einmal, man solle einem Kritiker nicht antworten, auch wenn er behaupte, man habe einen silbernen Löffel gestohlen, und diese Aeusserung war bei ihm natürlich, weil er hoch genug stand, um das Gebell hämischer Rezensenten ignoriren zu können und weil er sich durch ein kurzes und bezeichnendes Epitheton, womit er solche Gegner zu beehren pflegte, über dieselben erhob. Ich bedaure sehr, hier nicht so kurz wegkommen zu können, einmal weil ich nicht Goethe bin, und dann, weil jenes Epitheton delikaten Ohren wie eine Injurie klingen möchte. Es hat sich nämlich im 6ten Doppelhefte der Heidelberger Jahrbücher für 1845 Herr Dr. Strauch zu Muri (Kanton Aargau) mit meinem

Handbuche der algebraischen Analysis so wacker herumgezaust, dass mir das Pflichtgefühl gebietet, meinem armen Kinde beizuspringen, damit es nicht unter den derben Händen des Sohnes kuhreicher Alpen jämmerlich verende. Ich weiss zwar nicht, was eigentlich den entsetzlichen Grimm des Herrn Strauch verursacht hat, glaube aber in der Rezension selbst bemerkt zu haben, dass die erhitzte Phantasie des verehrten Herrn Doctors wie weiland die des sinnreichen Junkers Don Quixote da Gespenster und Unholde hingezaubert hat, wo doch Alles einfach und natürlich zusammenhängt. Ich wage daher in nüchterner Rede die obschwebenden Missverständnisse zu beseitigen.

Nro. 1. *) Der erste unter den kleinen Irrthümern, in die Herr Strauch verfallen ist, besteht darin, dass er mein Buch als ein vollständiges Organon der Wissenschaft beurtheilt, wobei er natürlich die Entdeckung macht, dass eine Menge Lehren darin fehlen; es heisst in dieser Beziehung: „Gewiss hat Jedermann erwartet, dass das Buch mit dem Material, welches sich auch anderwärts vorfindet, ausgestattet werde (Nro. 4.)“. Nun will aber der gelehrte Rezensent mein Buch „vom Anfange bis zum Ende mit aller Aufmerksamkeit durchgelesen“ haben; sind ihm denn da die ersten Worte der Vorrede nicht Fingerzeig genug gewesen, um den Zweck des Buches zu begreifen? Ich habe da nämlich gesagt: „das Werk hat einen doppelten Zweck: einerseits soll es als *Leitfaden* für akademische Vorlesungen dienen, ausserdem aber auch zum Selbststudium benutzt werden können.“ Nun weiss aber Jeder, dass man in einem vier- oder fünfstündigen Collegio nicht im Stande ist, Alles vorzutragen, „was sich anderwärts vorfindet“, und dass man demnach sich zu einer Auswahl gewisser Hauptpartieen entschliessen muss, und daher darf man an einen Leitfaden zu den Vorlesungen selbst noch weniger Ansprüche auf absolute Vollständigkeit machen. Es ist freilich eine sehr wohlfeile Kunst, ein Buch hart zu tadeln, wenn man vorher das Publikum über den Zweck desselben geradezu getäuscht hat; ist diese Täuschung eine unabsichtliche gewesen, so kann ich Herrn Strauch nur den Rath ertheilen, das Rezensirhandwerk so lange aufzugeben, bis er Bücher mit Verstand lesen gelernt hat, war aber jene Täuschung eine absichtliche, so verdient Herr Strauch nur Verachtung. — Sonderbar genug ist es indessen, dass sich Herr Strauch mit seiner Klage über Unvollständigkeit im Widerspruche mit den anderen Beurtheilern meines Buches befindet, die es alle für reichhaltig (natürlich in seiner Art) erklären.

---

*) Damit Herr Strauch nicht sagt, dass ich einer von den harthörigen Schriftstellern sei, die ihr Ohr der Stimme der Kritik ganz verschliessen, habe ich hier die unerhört neue und geniale Manier desselben adoptirt, wonach die ganze Rezension mit vielem Aufwande von Scharfsinn höchst systematisch in Nummern, diese in Abschnitte mit römischen Zahlen, letztere wieder in Rubriken mit a, b, c etc. erfüllt wird †).

†) Kommt auch hebräisches Alphabet vor?

Anmerkung des Setzers.

Nro. 2. Herr Strauch tadelt ferner meine Darstellung des binomischen Satzes und dabei heisst es u. A. (S. 895.): „Gehen wir nun zur Entwickelung des Binomialtheorems selbst, so gewahren wir, dass volle dreizehn Seiten verwendet sind, um nur die Entwickelung von $(x+k)^m$ für den Fall herzustellen, dass m eine positive ganze Zahl ist.“ Herr Strauch muss, hiernach zu urtheilen, wahrscheinlich nicht zählen können, denn die fragliche Entwickelung nimmt nur acht und zweidrittel Seiten ein, auf denen ausserdem auch noch die wichtigsten Eigenschaften der Binomialkoeffizienten positiver und ganzer Exponenten stehen, was Herr Strauch, wie es scheint, absichtlich verschweigt. Ich setze zum Beweise den Inhalt her:

Cap. V. Das Binomialtheorem.

§. 27. Bestimmung der hieher gehörenden Aufgabe und erste Schritte zur Lösung derselben. (S. 130. Zeile 12. v. o.)

Hier zeige ich die Entstehungsweise der Binomialkoeffizienten bei succesiver Multiplikation von $1+x$ mit sich selbst, gebe die Consruktion der Koeffiziententafel und beweise die Eigenschaften

$$m_p = m_{m-p}, \quad m_{p-1} + m_p = (m+1)_p,$$
$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

§. 28. Weitere Betrachtung der Binomialreihe. (S. 135.)

Ich leite hier aus der Binomialkoeffiziententafel induktorisch die Formel

$$m_p = \frac{m-\overline{p-1}}{p}\, m_{p-1}$$

ab, welche zur independenten Bestimmung der Koeffizienten dient, und bemerke, dass die vorhin bewiesenen Eigenschaften von m_p auf die Form $\frac{m(m-1)\ldots(m-\overline{p-1})}{1.2\ldots p}$ passen. Um aber eine strenge Controle für die Richtigkeit des noch hypothetischen Resultats

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + x^m$$

zu erhalten, schlage ich vor, die Reihe rechts für sich zu summiren; käme dabei $(1+x)^m$ als Summe heraus, so hätte man darin die Probe. Hinzugesetzt wird aber gleich, dass sich dieser Gedanke allgemeiner ausführen lässt, wenn man statt m eine beliebige Grösse μ setzt. Jetzt folgt

§. 29. Summirung der Binomialreihe. (S. 138. Z. 9. v. u.)

worin gar nicht mehr von positiven ganzen Exponenten die Rede ist. Das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten steht also auf dem Raume von S. 130. Z. 12. v. o. bis S. 138. Z. 9. v. u. und das macht circa $8\frac{2}{3}$ Seiten, aber nicht 13! Herr Strauch verlangt, dass ich hätte Combinationslehre aufnehmen und mittelst dieser den binomischen Satz beweisen sollen. Da ich aber im ganzen Buche Combinationslehre nur an dieser einzigen Stelle hätte

brauchen können, so wäre sie doch nur ein integrirender Theil vom Capitel Binomialtheorem gewesen und dasselbe hierdurch jedenfalls grösser geworden, als bei der obigen Darstellung. Uebrigens lag mir daran, den Schüler frühzeitig mit dem ächt analytischen Verfahren bekannt zu machen, wonach man in eine Zahlenreihe, welche sich aus dem Calcül ergiebt, erst induktorisch ein Gesetz zu bringen und dieses nachher zu beweisen sucht. Euler hat diese Methode unzählige Male angewandt und mit einigem Geschick ist sie bei vielen Untersuchungen (z. B. über höhere Differentialquotienten) eine wahre Fundgrube neuer Resultate.

Nro. 3. In Bezug auf Gränzbetrachtungen hatte ich in der Vorrede bemerkt, dass es gar nicht einerlei sei, ob man in einer Funktion von x die Veränderliche gleich einem speziellen Werthe a setze, oder sie in diesen übergehen lasse, weil dieser Uebergang auf zweierlei Weise durch continuirliche Zunahme oder Abnahme möglich ist und diess an einem Beispiele erläutert. Lässt man nämlich in

$$f(x) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{a-x} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{x-a}$$

x durch Zunahme in a übergehen, indem man $x=a-\delta$ setzt, wo δ bis zur Gränze Null abnimmt, so wird

$$f(a) = \mathrm{Lim}\,(\mathrm{Arctan}\frac{1}{\delta} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{-\delta})$$
$$= \mathrm{Arctan}\,\infty - \mathrm{Arctan}\,(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Nimmt man dagegen in $f(x)$ $x=a+\delta$, so entsteht der Werth $x=a$ durch Abnahme von x und es wird

$$f(a) = \mathrm{Lim}\,(\mathrm{Arctan}\frac{1}{-\delta} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{\delta})$$
$$= \mathrm{Arctan}\,(-\infty) - \mathrm{Arctan}\,\infty = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Hinzugefügt habe ich noch, dass man diess leicht aus einer geometrischen Construktion ersehen könne. Herr Strauch möchte nun zuerst diese Construktion kennen lernen, die ihm nicht so nahe zu liegen scheint. Der gelehrte Kritikus sieht hier den Wald vor lauter Bäumen nicht, denn über jene Construktion kann jeder, der S. 45. 4 gelesen und Fig. 18. angesehen hat, nicht einen Augenblick in Zweifel sein. Die graphische Darstellung von der genannten Funktion $f(x)$ ist der von $\mathrm{Arctan}\frac{1}{z}$ völlig analog, nur dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein anderer ist und die Ordinaten doppelt so gross wie die in Fig. 18. sind. Diess als Probe vom Scharfsinne meines Herrn Gegners. — Aber er geht noch weiter und beweist uns, dass $f(a)$ unendlich viel verschiedene Werthe hat. Das gehört nun gerade in das Gebiet des Unsinns.

Die Funktion Arctan $\frac{1}{z}$ hat nämlich wie $\frac{1}{z}$ selbst immer nur einen Werth, ausgenommen für $z=0$; denn für $z=0$ wird die Funktion $\frac{1}{z}$ unstetig, indem sie aus $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt, oder richtiger, ihre graphische Darstellung als Curve (gleichseitige Hyperbel) besteht aus zwei ganz getrennten Zügen, die ein Perpendikel im Anfangspunkte der Coordinaten zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Daher hat Arctan $\frac{1}{z}$ für $z=0$ zwei Werthe $\text{Arctan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ und $\text{Arctan}(+\infty)=+\frac{\pi}{2}$, und daraus folgt ganz unmittelbar, dass jene Funktion $f(x)$ für $x=a$ oder $a-x=0$ zwei Werthe annimmt, von denen $+\pi$ der Endwerth der bei $x=0$ anfangenden Reihe von Werthen ist und $-\pi$ den ersten der darauf folgenden Werthe darstellt. Es wäre wirklich zu wünschen, dass uns Herr Strauch eine Zeichnung von $f(x)$ mittheilte, einer Funktion, die nach seiner gelehrten Deduktion immer nur einen Werth hat, aber für $x=a$ urplötzlich, man weiss gar nicht woher, unendlich viele Werthe annimmt.

Nro. 4. Herr Strauch redet u. A. auch den divergenten Reihen das Wort, und hierauf brauchte ich eigentlich am wenigsten zu entgegnen, da dieser Punkt bereits unter den Männern, welche die Analysis in neuerer Zeit erweitert haben, völlig entschieden ist. Man muss es nur einmal versucht haben, in dieser Beziehung etwas zu leisten und man macht gar bald die Erfahrung, auf welchem schwankenden Boden man sich befindet, sobald man nicht mehr im Stande ist, die Convergenz oder Divergenz der in Rechnung gezogenen Reihen zu beurtheilen. Im Gegensatze zu dieser Erfahrung meint Herr Strauch, man könne mit divergenten Reihen in Gottes Namen rechnen, wenn man vorher überlegt habe, zu welchem Zwecke man die Reihen benutzen wolle. Da diese Meinung eine bei denjenigen sehr gewöhnliche ist, welche einer Kritik der Methode nicht recht trauen und keine Erfahrung obiger Art haben und die gewissermassen ein juste milieu bilden möchten, was in einer exakten Wissenschaft zwischen diametral entgegengesetzten Ansichten ein wahres Unding ist, so will ich dieselbe hier etwas näher beleuchten.

Wenn über Anwendungen von Reihen diskutirt werden soll, so werden wir zuerst genöthigt sein, die unnöthigen und überflüssigen Anwendungen von den durchaus nothwendigen und nicht zu vermeidenden sondern zu müssen. Unter die ersteren gehört aber sehr Vieles, z. B. die Gründung der Differenzialrechnung auf die Taylor'sche Reihe, womit der Zweck dieser Rechnung, nämlich das Gesetz der Stetigkeit in seinem ganzen Umfange in die Gewalt des Calcüls zu bringen, völlig aus den Augen gerückt wird; ferner der Beweis für die Regel zur Aufsuchung der Maxima und Minima, der viel besser mit Hülfe der Relation $f(a+h)=f(a)+\frac{h^n}{1.2..n}f^{(n)}(a+\lambda h)$ geführt wird; die Ableitung der Gleichung der Tangente an einer Curve, die Quadratur der Curven und m. A. Der wirklich nothwendigen Anwendungen bleiben dann nur zwei;

entweder will man die Werthe einer Funktion näherungsweis berechnen, oder man verwandelt einen Ausdruck auf doppelte Weise in Reihen, welche nach Potenzen einer Hauptgrösse fortgehen, um beiderseits eine Coeffizientenvergleichung vornehmen zu können. Dass für den ersten Zweck nur convergente Reihen brauchbar sind, versteht sich ganz von selbst; aber auch für den zweiten erkennt man a posteriori leicht die Nothwendigkeit, sich erst von der Convergenz der fraglichen Reihen zu überzeugen, wenn man nicht mit der Coeffizientenvergleichung auf die verkehrtesten Resultate kommen will. Z. B. es giebt folgende Formel, die zuerst von L a p l a c e entwickelt wurde:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+x^2}\,\partial x = \frac{\pi}{2} e^{-u}. \qquad (1)$$

und sie gilt für alle möglichen positiven u. Setzt man für $\cos ux$ und e^{-u} die wirklich g l e i c h g e l t e n d e n und c o n v e r g i r e n d e n Reihen, die nach Potenzen von ux und u fortgehen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} - \frac{u^2}{1.2}\int_0^\infty \frac{x^2\partial x}{1+x^2} + \frac{u^4}{1.2.3.4}\int_0^\infty \frac{x^4\partial x}{1+x^2} - \ldots \\ &\qquad = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und nun sollte man denken, es müssten die Coeffizienten gleicher Potenzen von u einander gleich sein, aber quod non, denn es kommt heraus

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{1+x_2} = -\frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{x^4\partial x}{1+x^2} = +\frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4.5} = \ldots = 0,$$

und von diesen Gleichungen ist nur die erste richtig (weil die Formel (1) für $u=0$ gilt), alles Andere dagegen weist sich als falsch aus, denn die Werthe der übrigen Integrale sind unendlich gross. Hier kann der Fehler n u r darin liegen, dass man die Coeffizienten zweier Reihen verglichen hat, ohne die Convergenz der letzteren zu kennen, denn die Formel (1) ist unbestritten richtig und ebenso sind es die Substitutionen für $\cos ux$ und e^{-u}. Wollte man also auf diesem Wege die Werthe bestimmter Integrale suchen, so müsste man sich vorher überzeugen, dass die Reihe, in der sie vorkommen, convergirt, was aber oft sehr schwer ist. Ich könnte dergleichen Beispiele aus eigener Praxis in Menge anführen, wenn ich es überhaupt der Mühe werth hielte, literarische Nachzügler zu belehren.

Herr S t r a u c h mocquirt sich bei seinem Räsonniren über meine Behandlungsweise der Reihen auch über die Kritik der Methode, auf welcher er mich „herumreiten“ *) lässt; statt aber

---

*) Ich kann dieses edle Ross Herrn S t r a u c h bestens empfehlen; wer es zu führen versteht, kommt damit eben so rasch als s i c h e r vom

zu zeigen, worin ihre Prinzipien falsch sein sollen, was dem grossen Scharfsinne des Rezensenten gewiss sehr leicht geworden wäre, stellt er mit selbstgefälliger Apodiktizität, aber ohne Beweis, eine Ansicht hin, die mit dem Argumente anfängt, dass der Begriff der unendlichen Reihe der allgemeinere und der der endlichen der speziellere sei, woraus er dann ableiten will, dass man erst die unendlichen und dann die endlichen Reihen behandeln müsse. Hierauf ist zu antworten, dass bloss logische Distinktionen uns für die Mathematik sehr wenig helfen können, denn die letztere ist keine Wissenschaft aus blossen Begriffen wie die Philosophie, sondern aus Begriffen und Anschauungen, die gerade ihr Fundament ausmachen, was ein gewisser Kant in seiner Kritik der Vernunft zuerst nachgewiesen hat. Die Scheu, welche manche Mathematiker vor der Einmischung philosophischer Betrachtungen in ihre Wissenschaft haben (und in gewisser Hinsicht mit vollem Rechte) ist nichts als das dunkle Gefühl dieser Wahrheit und der daraus entspringenden Nichtigkeit des Schliessens aus blossen Begriffen. Man combinire z. B. die Begriffe „zwei", „Punkt" und „Gerade" so viel man wolle, und man wird niemals den Satz, dass die Gerade zwischen zwei Punkten der kürzeste Weg ist, herausbringen; ganz ebenso geht es in der Arithmetik, nur dass hier die Anschaulichkeit eine schematische und nicht construktive ist. Ginge die Sache bloss logisch zu, so müsste man zuerst die Theorie des Vielecks in der Euklideischen Geometrie entwickeln, da Vieleck der allgemeine, Viereck, Dreieck etc. der besondere Begriff ist; aber dergleichen wird sich kein vernünftiger Mensch einfallen lassen. Und so ist der Grund des Herrn Strauch völlig nichtssagend für die Theorie der Reihen. So wie man aber immer vom Einfacheren zum Complicirteren fortschreitet, so ist es auch natürlich, erst endliche und dann unendliche Reihen zu betrachten. Diess wird aber sogar nothwendig, wenn wir den Charakter des Mathematisch-Unendlichen näher besehen. Es ist diess kein Fertiges, Abgeschlossenes oder Absolutes, sondern ein Unvollendbares, und wir stossen darauf, sobald wir bemerken, dass irgend eine Operation sich soweit fortsetzen lässt, als es nur verlangt wird. So entsteht uns die unendliche Zahlenreihe aus der successiven Addition der Einheit und ebenso die unendliche Reihe aus der endlichen.

Nro. 5. Auch Inkonsequenz wirft mir mein weiser Rezensent vor, indem er bemerkt, dass ich einerseits gegen die Methode der unbestimmten Coeffizienten aufgetreten sei, aber selbst von ihr beim Binomialtheorem für ganze positive Exponenten Gebrauch gemacht habe. Nun ist aber doch wohl einiger Unterschied darin, ob man vorher bewiesen hat, es sei eine Funktion $f(x)$ von der Form $A+Bx+Cx^2+\ldots+Mx^m$, oder ob man das so ins Blaue hinein annimmt. Ueberall, wo man das Erste thun kann, habe ich gar nichts gegen jene Methode und wende sie selbst sehr gern an, wie z. B. Bd. IV. des Archivs. Nro. XL.; aber ein solches Verfahren nennt man gewöhnlich gar nicht die Methode der unbestimmten Coeffizienten und nur Herr Strauch braucht diesen

---

Flecke und das ist heut zu Tage, wo Alles geschwind gehen soll, jedenfalls unendlich viel besser, als auf einem störrigen Esel hinterher zu humpeln oder wohl gar, wenn das Beest trotz aller Hiebe nicht weiter will, völlig sitzen zu bleiben.

Namen, um auch hier nach seiner hämischen Weise einen Grund zum Tadeln finden zu können. Will man aber Funktionen, von denen man gleich anfangs beweisen kann, dass sie keine algebraischen, rationalen und ganzen sind*), nach dieser Methode in Reihen verwandeln, so ist 1) der Anfang der Rechnung eine Hypothese und 2) weiss man im Voraus, dass die Reihe unendlich werden muss; nun sind aber nur convergente Reihen einer bestimmten Grösse gleich, man setzt aber doch die Funktion der Reihe gleich und folglich hat man ausser der ersten Hypothese noch die zweite der Convergenz gemacht. Was dabei herauskommen kann, will ich wieder an einem Beispiele zeigen. Setzt man

$$\sec z = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + A_6 z^6 + \ldots,$$

so findet man leicht durch Multiplikation mit $\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \ldots$ dass

$$\sec z = 1 + \frac{B_2}{1.2} z^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4} z^4 + \ldots$$

ist, wobei B_2, B_4, B_6 etc. gewisse Coeffizienten bedeuten, deren Bildungsgesetz nicht abzusehen ist. Ebendesswegen kann man auch die Bedingungen der Convergenz nicht angeben. Nun könnte man folgenden Weg zur Bestimmung von B_2, B_4 etc. einschlagen. Man setze ux für z und multiplizire beiderseits mit $\cos ux$, so wird

$$1 = \cos ux + \frac{B_2 u^2}{1.2} x^2 \cos ux + \frac{B_4 u^4}{1.2.3.4} x^4 \cos ux + \ldots,$$

und durch Multiplikation mit $\frac{\partial x}{1+x^2}$ und Integration zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=\infty$:

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+x^2}\,\partial x + \frac{B_2 u^2}{1.2}\int_0^\infty \frac{x^2 \cos ux}{1+x^2}\,\partial x + \ldots$$

Die Werthe sämmtlicher Integrale finden sich nach der Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n} \cos ux}{1+x^2}\,\partial x = (-1)^n \frac{\pi}{2}\, e^{-u},$$

---

*) Als Probe solcher Beweise sehe man den Folgenden. Wäre $\sin x$ eine ganze rationale und algebraische Funktion des $m$ten Grades, so müsste wegen der Gleichung $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ auch $\cos 2x$ und ebenso $\cos x$ eine solche sein aber des $(2m)$ten Grades. Andererseits ist $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, wo nach dem Vorigen die rechte Seite eine Funktion des $(3m)$ten Grades sein muss, während die linke Seite wie $\sin x$ selbst bloss vom $m$ten Grade ist. Da nun für alle mögliche x keine Gleichung zwischen ganzen rationalen und algebraischen Funktionen verschiedener Grade bestehen kann, so folgt daraus die Unrichtigkeit der Voraussetzung. Wenn sich also $\sin x$ wirklich in eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ verwandeln lassen sollte, so kann diese Reihe keinesfalls eine endliche sein.

die sich aus Formel (1) durch $2n$malige Differenziation nach u ergiebt, und so wird

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}e^{-u}-\frac{B_2u^2}{1.2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-u}+\frac{B_4u^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-u}-\ldots,$$

oder durch Hebung von $\frac{\pi}{2}$ und Multiplikation mit e^u:

$$e^u=1-\frac{B_2}{1.2}u^2+\frac{B_4}{1.2.3.4}u^4-\ldots,$$

woraus lauter Absurditäten folgen, wenn man für e^u die gleichgeltende Reihe setzt.

Nro. 6. Ich habe in mein Buch Manches von Cauchy aufgenommen, was ich nicht anders machen konnte oder wollte, wenn mir die Darstellung dieses Meisters allen Ansprüchen zu genügen schien. Herr Strauch schämt sich nicht, diess Abschreiberei zu nennen! Da ist wohl auch der ein Abschreiber, der in sein Lehrbuch der Geometrie Euklids Beweis vom Magister Matheseos aufnimmt, weil er ihn für den besten hält? Das sonderbarste an der Sache ist aber, dass Manches, wie z. B. die Auflösung der Gleichungen $f(x)+f(y)=f(x+y)$, $f(x)f(y)=f(x+y)$ u. m. A., sich schlechterdings nur auf eine einzige Art bewerkstelligen lässt, wenn man die Aufgabe nicht auf die Integration einer Differenzialgleichung bringen will. Uebrigens wird man in der Darstellungsweise immer noch nicht unbedeutende Differenzen zwischen Cauchy's Buche und dem meinigen bemerken.

Nro. 7. In der Vorrede hatte ich gesagt, dass ich analytischen Betrachtungen gern die entsprechenden geometrischen an die Seite stelle und dass mich schon eine kurze Erfahrung von der Zweckmässigkeit dieser Weise belehrt habe. Herr Strauch bemerkt hierauf, diess hätte ich mir nicht erst von der Erfahrung sagen zu lassen nöthig gehabt, ich hätte es auch aus guten Büchern lernen können. Allerdings gelehrter Mann; aber ich habe gar nicht gethan, als sei jene Methode meine Erfindung und es ist Jedermann erlaubt seine eigene Erfahrung anzuführen. Herr Strauch mäkelt weiter, diess rechtfertige die Aufnahme geometrischer Betrachtungen in ein System der Analysis nicht; sehr wahr weiser Daniel, aber ich habe gar kein sogenanntes System, sondern einen Leitfaden für akademische Vorlesungen schreiben wollen.

Nro. 8. Ich komme nun an diejenige Partie der fraglichen Rezension, in welcher die grobe Unwissenheit ihres Verfassers am auffallendsten hervortritt. Ich hatte nämlich gelegentlich daran erinnert, dass man sich hüten müsse, $\frac{1}{2}l(z^2)$ und lz für identische Funktionen für z anzusehen und dazu bemerkt, dass diess auch für die Integralrechnung von einiger Wichtigkeit sei; da hat nun der eminente Scharfsinn des Herrn Strauch sogleich errathen, dass meine Bemerkung auf die im 6ten Theile des Archivs S. 326. diskutirte Frage geht, obgleich der genannte Aufsatz später geschrieben und gedruckt worden ist, als die fragliche Stelle meines Buches.

Ich will mit meinem Herrn Rezensenten nicht darüber rechten, dass er die Berichtigung, die er über einen Journalartikel geben zu können glaubt, an einer Stelle giebt, wo sie gar nicht hingehört, während ihm das Archiv eben so gut offen stand wie mir, ich will mich hier bloss an der Sache halten. Der Herr Herausgeber des Archivs hat bekanntlich schon 1838 erinnert, dass es falsch sei $\int \frac{\partial x}{x} = lx + \text{Const}$ zu setzen und dass es heissen muss $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l(x^2)$; ich habe wiederholt auf die Richtigkeit dieser Bemerkung aufmerksam gemacht, wobei ich den Urheber derselben nicht verschwiegen habe (z. B. Archiv. Thl. V. S. 388.), am allerwenigsten habe ich dieselbe als eine „neue Entdeckung" von mir „ausposaunt", wie Herr Strauch frech genug ist, mir nachzusagen. Unter der Anwendung der zweiten Formel erhält man z. B.

$$\int_{-2}^{+3} \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2} l(9) - \tfrac{1}{2} l(4) = l(\tfrac{3}{2}).$$

Herr Strauch traut seinen Augen kaum, wenn er sieht, dass die Integrale

$$\int_{-2}^{+3} \frac{\partial x}{x} \text{ und } \int_{+2}^{+3} \frac{\partial x}{x}$$

gleiche Werthe haben sollen trotz der verschiedenen Integrationsgränzen. Durch diese höchst komische Verwunderung kündigt sich der grundgelehrte Herr Kritikus gleich als Neuling im Felde bestimmter Integrale an; wenn ihn Erscheinungen der Art so verwundern, so wird er wohl in dieser Branche aus der Verwunderung gar nicht herauskommen; z. B. ist

$$\int_0^{\pi} \sin x \, \partial x = \int_0^{3\pi} \sin x \, \partial x = \int_0^{5\pi} \sin x \, \partial x \ldots$$

gewiss noch viel paradoxer als das Obige. Das einzig Richtige, was Herr Strauch vorbringt, ist die Consequenz: wenn die obige Gleichung bestehen soll, so muss auch sein

$$\int_{-2}^{+2} \frac{\partial x}{x} + \int_{+2}^{+3} \frac{\partial x}{x} = \int_{+2}^{+3} \frac{\partial x}{x}, \text{ also} \int_{-2}^{+2} \frac{\partial x}{x} = 0.$$

Dass nun wirklich ganz allgemein

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial x}{x} = 0$$

ist, will ich Herrn Strauch hier auf doppelte Art beweisen.

A. Geometrischer Beweis. Vielleicht hat Herr Strauch irgendwo einmal etwas davon gehört, dass wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve bedeutet, das bestimmte Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \partial x$$

nicht Anderes als die Fläche ist, welche von der Curve, den zu $x=\alpha$, $x=\beta$ gehörenden Ordinaten $f(\alpha)$, $f(\beta)$ und dem Stücke $\beta-\alpha$ der Abscissenachse begränzt wird. In unserem Falle ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind und die Fläche, welche zwischen den zu $x=-a$ und $x=+a$ gehörenden Ordinaten enthalten ist, besteht aus zwei congruenten Theilen, von denen der eine über, der andere unter der Abscissenachse liegt, und mithin dem Zeichen nach einander entgegengesetzt sind. Daraus folgt, dass jene Fläche $=0$ ist, während nach Herrn Strauch ihr Werth $=l(a)-l(-a)=l(-1)$ sein müsste, so dass die Fläche einer reellen Curve imaginär ausfiele! Es ist wirklich gut, dass die Polizei nicht Integralrechnung versteht; es wäre sonst mindestens zweifelhaft, ob sie Herrn Strauch noch frei herumlaufen liesse.

B. Analytischer Beweis. Es ist

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{x}=\int_{-a}^{0}\frac{\partial x}{x}+\int_{0}^{a}\frac{\partial x}{x}.$$

Man setze im ersten Integrale $x=-z$, so wird $z=0$ und $z=+a$, wenn $x=0$ und $x=-a$ geworden ist, und man hat folglich wegen $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial z}{z}$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{x}=\int_{a}^{0}\frac{\partial z}{z}+\int_{0}^{a}\frac{\partial x}{x}=-\int_{0}^{a}\frac{\partial z}{z}+\int_{0}^{a}\frac{\partial z}{z},$$

und der Hauptwerth dieser Differenz ist Null, aber keinenfalls imaginär. — Herr Strauch sagt, es käme Alles auf die Werthe der durch die Integration hereingekommenen willkürlichen Constanten an; armer Herr Strauch, wissen Sie denn nicht, dass in bestimmten Integralen (wie die obigen sämmtlich sind) auf die Integrationskonstanten gar nichts ankommt, weil sie durch Einführung der Gränzen weggeschafft werden? Das ist ja ebentder Grund der Benennung „bestimmtes" Integral. Am Ende verwundert sich Herr Strauch noch einmal und zwar darüber, dass ich Dinge wie die oben bewiesenen behaupte, trotz dem, dass ich ein Buch über bestimmte Integrale geschrieben habe. Aber eben desswegen, weil ich mich mit diesem interessanten Gegenstande viel beschäftigt habe, weiss ich mich vor Fehlern zu hüten, in die man bei einer Unwissenheit wie die meines Gegners nothwendig verfallen muss.

Schlusswort *).

Hiermit glaube ich hinreichend nachgewiesen zu haben, dass die Vorwürfe, welche mir Herr Strauch macht, entweder auf einer gänzlichen Entstellung von Thatsachen oder auf unbegreiflicher Ignoranz beruhen; einem solchen Verfahren, dessen richtige Bezeichnung ich dem Leser überlasse, gegenüber, halte ich es nicht für der Mühe werth, etwaigen neuen Anfeindungen auf diesem

*) Habe ich auch von Herrn Strauch gelernt.

Wege entgegen zu treten. Es bestimmt mich hierzu auch noch die fruchtlose Mühe, welche es kostet, sich durch den ganz undeutschen und holprigen Jargon des Herrn Rezensenten durchzuarbeiten *). Wenn der geistreiche Franzose mit seinem „le style c'est l'homme" Recht hat, welche Vorstellung muss man sich dann von Herrn Strauch machen!

Jena, am 15. Februar 1846.

Schlömilch.

Geometrie.

Mann: Grundzüge eines Systems planimetrischer Aufgaben. Nürnberg. 1846. $7\frac{1}{2}$ Ggr.

Ueber die Rectification der Peripherie des Kreises. Von Nicolai Nawrotzki, Doctor der Philosophie der Universität zu Leipzig, der Kaiserlich Russischen Akademie der Wissenschaften und mehrerer russischen und ausländischen gelehrten Gesellschaften Mitglied. Hamburg.

Diese mit einer sehr pomphaften Vorrede versehene im Ganzen nur 11 Seiten umfassende Schrift enthält weiter nichts als eine annähernde Bestimmung der Peripherie eines Kreises aus seinem Halbmesser und eine annähernde Bestimmung des Durchmessers aus der Peripherie durch Construction. Wenn auch bekanntlich in neuerer Zeit mehrere dergleichen annähernde Auflösungen wenigstens des ersten der beiden in Rede stehenden Probleme gegeben worden sind, so wollen wir doch die von dem Verfasser für dieses erste Problem gegebene Auflösung hier in der Kürze mittheilen, ersuchen aber den Leser, sich die Figur selbst zu construiren, was keine Schwierigkeit haben wird.

Um die Peripherie eines aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO beschriebenen Kreises zu finden, ziehe man die beiden auf einander senkrechten Durchmesser AB und CD. Hierauf schneide man auf dem Quadranten AC von A aus auf bekannte Weise den sechsten Theil AE der Peripherie ab, ziehe durch O und E den Halbmesser OE, errichte in C auf den Durchmesser CD ein Perpendikel, welches sich mit dem verlängerten Halbmesser OE in F schneidet, schneide auf diesem Perpendikel von dem

---

*) Ein paar Stylproben: in Nro. 2. findet sich bei der Inhaltsangabe meines Buches der Passus: „es kommt" oder „dann kommt" nicht weniger als zehnmal hintereinander; nach der Ueberschrift „Schlusswort" heisst es: „Hiermit soll nun geschlossen werden" — ich möchte wissen, ob Herr Strauch vielleich eine seiner geistreichen Rezensionen mit einem Schlussworte angefangen hat.

Punkte F aus nach der Seite von C hin eine dem dreifachen Halb messer des gegebenen Kreises gleiche Linie FG ab, und ziehe dann die Linie DG, so ist diese Linie die gesuchte halbe Peripherie des gegebenen Kreises.

Es ist nämlich CF offenbar die halbe Seite eines um den Kreis beschriebenen regulären Sechsecks, also, wenn wir den Halbmesser des gegebenen Kreises als Einheit annehmen, $CF=\frac{1}{\sqrt{3}}$, folglich $CG=3-\frac{1}{\sqrt{3}}$, und daher

$$DG^2=CD^2+CG^2=4+(3-\frac{1}{\sqrt{3}})^2$$

$$=4+9-2\sqrt{3}+\frac{1}{3}=\frac{40}{3}-2\sqrt{3},$$

also

$$DG=\sqrt{\{4+(3-\frac{1}{\sqrt{3}})^2\}}=\sqrt{(\frac{40}{3}-2\sqrt{3})},$$

woraus sich nach der in der Schrift angestellten Rechnung, die wir auch, jedoch nur oberflächlich mit Hülfe der Logarithmen, geprüft und richtig befunden haben, $DG=3{,}14152$, also eine Uebereinstimmung bis zur 5ten Decimalstelle mit der Ludolphischen Zahl ergiebt.

Diese Construction der Peripherie des Kreises, wenn man auch bekanntlich noch genauere hat, scheint sich uns durch ihre Leichtigkeit in der Ausführung zu empfehlen, und für den praktischen Gebrauch genau genug zu sein, weshalb wir sie hier in der Kürze mitgetheilt haben. Die in der Schrift gegebene Auflösung des umgekehrten Problems lässt sich ohne eine Figur nicht gut verständlich machen, und muss in ihr selbst nachgesehen werden.

Ob übrigens diese Schrift wirklich neu oder nur von Neuem in den Buchhandel gebracht worden ist, was wir zu vermuthen Grund zu haben glauben, lassen wir dahin gestellt sein. Eben so lassen wir es unentschieden, ob dieselbe nicht vielleicht eine, von einem der Mathematik ziemlich Unkundigen angefertigte blosse Uebersetzung aus der Nordischen Biene ist. Verschiedene falsch geschriebene Formeln, und Namen wie „Zeilon“! „Mecius“! u. dgl. lassen das letztere wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen. Als ein von den Braminen gefundenes Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie von einem höheren Alter wie das Archimedische Verhältniss wird S. 8. das bis zur vierten Decimalstelle richtig sein sollende Verhältniss 1250:3927 angegeben.

Bloss um die obige annähernde Construction der Peripherie, die sich, wie schon erinnert, uns namentlich durch ihre Leichtigkeit in der Ausführung für den praktischen Gebrauch zu empfehlen scheint, gelegentlich mitzutheilen, haben wir uns bei dieser sonst ganz unbedeutenden Schrift hier so lange verweilt, und bitten deshalb die Leser des Literarischen Berichts um Verzeihung.

Mechanik.

Lehrbuch der Elementar-Mechanik für technische und militärische Lehranstalten, höhere Bürgerschulen und zum Selbststudium. Von Dr. G. W. v. Langsdorff, Professor an der Grossherzogl. höheren Bürgerschule zu Mannheim. Mit 8 Figurentafeln. Stuttgart. 1845. 8. 21 ggr.

Diese schon vorläufig im Literarischen Bericht Nro. XXIV. S. 362. angezeigte Schrift ist zufällig erst jetzt in unsere Hände gelangt, verdient aber wegen ihrer allerdings in mehreren Beziehungen eigenthümlichen Fassung eine etwas ausführlichere Anzeige. Der Herr Verfasser sagt in der Vorrede, dass ihn bei der Ausarbeitung dieses Lehrbuches, welches hauptsächlich zur Vorbereitung auf die Maschinenlehre bestimmt sei, die Absicht geleitet habe, zur allgemeineren Verbreitung der in Deutschland noch viel zu wenig bekannten, für die Maschinenlehre so wichtigen, Principien der virtuellen Geschwindigkeiten und der lebendigen Kräfte das Seinige beizutragen. Die Behauptung, dass bei der Anwendung der allgemeinen Principien die Resultate nicht begriffen würden, weil ihre Entstehung und ihr Zusammenhang nicht zur Anschauung gelangten, könne er nicht als begründet anerkennen. Denn was den Zusammenhang der Resultate betreffe, so könne dieser im Gegentheil nur dadurch hervortreten, dass sie sich aus einem einzigen Princip ableiten lassen. Was aber die Anschaulichkeit ihrer Entstehung anbelange, so komme es nur darauf an, zum Princip selbst auf möglichst direktem und anschaulichem Wege zu führen. Diesen Zweck glaube er hinsichtlich des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten durch unmittelbare Ableitung des Parallelogramms der Drucke aus dem der Beschleunigungen und durch Anwendung des einfachen Hebels, und in Bezug auf das Princip der lebendigen Kräfte durch die Anwendung der relativen Drucke erreicht zu haben, deren man sich zwar schon vor langen Jahren (wenn auch in anderer Form und nicht unter besonderer Benennung) in einzelnen Fällen bedient habe, die aber später durch das D'Alembert'sche Princip gänzlich verdrängt, und auch in keinem Lehrbuche als Basis der Dynamik aufgestellt und consequent benutzt worden seien. Bei solcher Behandlungsweise erscheinen die Statik und Dynamik in einer natürlichen und deshalb der Fasslichkeit so günstigen Verbindung, dass alles Dunkele und Mehrdeutige verschwinde.

Die Ueberschriften der vier Hauptabschnitte sind folgende: Bewegung, Beschleunigende Kraft, Druck, Stoss, wozu noch zwei Anhänge über die Reibung und Steifigkeit der Seile und die Festigkeit kommen, wobei nicht unerwähnt bleiben darf, dass die Schrift durchaus nicht bloss auf die festen Körper eingeschränkt ist, sondern auch die tropfbaren und ausdehnsamen umfasst.

Wegen der allerdings eigenthümlichen Darstellung der Hauptlehren der Mechanik und der einfachen und deutlichen Behandlungsweise ist diese Schrift jedenfalls zu allgemeinerer Beachtung zu empfehlen, und zwar um so mehr, weil es wünschenswerth ist, dass die so höchst fruchtbare Anwendung der beiden mehrerwähnten allgemeinen mechanischen Principe, die, wie der Herr Verfasser ganz richtig bemerkt, unter der ziemlich grossen Anzahl solcher allgemeinen Principe, welche es in der Mechanik bekanntlich giebt, für die Maschinenlehre bei Weitem die wichtigsten sind, immer mehr Eingang und Aufnahme in den Unterricht finde.

Astronomie.

Neue Theorie der Mechanik des Himmels und Beweis der Unhaltbarkeit einer allgemeinen Gravitation. Von Fr. Buchholz. Berlin. 1845. 8. 15 Sgr.

Soll bei Schriften wie die vorliegende die Kritik etwas nutzen, so muss dieselbe nothwendig in einer Ausdehnung gegeben werden, für welche der Raum unserer Literarischen Berichte zu gering ist. Das Schriftchen umfasst nur 56 Seiten und von Mathematik ist begreiflicherweise darin nicht viel die Rede. Wir begnügen uns daher mit der blossen Anzeige seiner Existenz.

Jahn: über den neuen Planeten Asträa und den Biela'schen Kometen. Leipzig. 1846. 6½ gGr.

Uranus oder tägliche für Jedermann fassliche Uebersicht aller Himmelserscheinungen im Jahre 1846. Für die Zwecke der beobachtenden Astronomie, besonders aber auch für die Bedürfnisse aller Freunde des gestirnten Himmels bearbeitet und zusammengestellt von Ernst Schubert und Hugo von Rothkirch, und herausgegeben von Dr. P. H. L. von Boguslawski. Glogau. 1845. 8. 1 Rthlr. 15 Sgr.

Der Zweck dieses Astronomischen Jahrbuchs in einer noch nie dagewesenen Form, sagt der Herr Herausgeber in der Vorrede, ist:

1) Es soll Jedermann auf eine möglichst vollständige Weise in den Stand setzen, dem Gange derjenigen Hauptbegebenheiten am Himmel folgen zu können, welche entweder entschieden in das bürgerliche Leben eingreifen, ja selbst den Verkehr regeln, oder sonst die allgemeine Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen.

2) Es soll allen denen, welchen es um eine etwas genauere Bestimmung der Zeit zu thun ist, ohne dazu mit geeigneten

Instrumenten versehen zu sein, möglichst viele Gelegenheit bieten und mancherlei Mittel zeigen, sich zum öftern der Uhrzeit wenigstens bis auf eine Minute versichern zu können.

3) Es soll die nicht unbeträchtliche Anzahl mit Fernröhren versehener Liebhaber der Sternkunde zu jeder Zeit auf diejenigen Erscheinungen am Himmel aufmerksam machen, welche geeignet sind, ihr Interesse in Anspruch zu nehmen.

Wir halten dieses Unternehmen besonders für die vielen Liebhaber der Astronomie, welche es jetzt giebt, recht nützlich und wünschen demselben einen ungestörten Fortgang, fügen aber zugleich auch die Bitte an den Herrn Herausgeber hinzu, dafür Sorge zu tragen, dass jeder Jahrgang immer schon möglichst zeitig, wenigstens immer vor Anfang des betreffenden Jahres in die Hände des Publikums komme.

Born: Gnomonique graphique et analytique, ou l'Art de tracer les cadrans solaires. Paris. 1845. 3 Fr. 50 Cent.

Physik.

Leclercq: Note sur la formation de la glace dans les eaux courantes. Brux. 1845.

Quetelet: Sur le climat de la Belgique. 1. partie. Rayonnement solaire et températures de l'air et du sol. Brux. 1845.

Houzeau: Sur les étoiles filantes périodiques du mois d'août et en particulier sur leur apparition de 1842. Brux. 1845.

Vermischte Schriften.

Memorie di matematica e di fisica della societa italiana delle scienze residente in Modena. Modena. 1845.

Das treffliche Cambridge mathematical Journal, dessen Inhalt in den früheren Literarischen Berichten immer angezeigt worden ist, scheint von jetzt an unter dem folgenden etwas veränderten Titel erscheinen zu sollen:

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peters College. Cambridge.

Nro. I. und Nro. II, die zusammen in einem Hefte ausgegeben worden sind (Double Number, Price 5 s.), und Nro. III. liegen uns vor und haben folgenden Inhalt:

General Theorems on Multiple Integrals. By R. L. Ellis. — On the Equation of Laplace's Functions. By G. Boole. — On Formulae relative to Spherical Coordinates. By W. Thomson. — On the Variation of Elements in the Planetary Theory. By H. Blackburn. — On Symbolical Geometry. By Sir W. R. Hamilton. — On the Quadrature of Surfaces of the Second Order. By J. H. Jellet. — On the Polar Equation of a Chord to a Conic Section. By P. Frost. — On the Reduction of $\frac{du}{\sqrt{U}}$, when U is a Function of the Fourth Order. By A. Cayley. — Note on the Maxima and Minima of Functions of Three Variables. By A. Cayley. — On the Mathematical Theory of Electricity. Part I. On the Elementary Laws of Statical Electricity. By W. Thomson (Uebersetzung aus Liouville's Journal. Thl. X. S. 209.). — Mathematical Notes. (Nro. III. will published on the 1st of March.)

Nro. III. On Homogeneous Functions of the Third Order with Three Variables. By A. Cayley. — On Linear Transformations. By A. Cayley. — Investigation of Properties of Hyperbola. By E. R. Turner. — Note on the Rings and Brushes in the Spectra produced by Biaxal Crystals. By W. Thomson. — On the Principal Axes of a Rigid Body. By W. Thomson. — On Circular Sections of the Locus of the General Equation of the Second Order. By P. Frost. — On Symbolical Geometry. By Sir W. R. Hamilton. (Nro. IV. will be published on the 1st of May.)

Wir wünschen sehr, dass diese Zeitschrift auch in Deutschland immer bekannter werde und allgemeinere Verbreitung gewinne, und werden uns noch mehr als früher bemühen, dazu durch recht genaue und möglichst zeitige Anzeige des Inhalts der einzelnen erscheinenden Hefte das Unsrige nach Kräften beizutragen.

Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles, par A. Quetelet, Directeur de cet établissement etc. 1846. 13e annee. Bruxelles. 1845. 12. 22 Sgr. 6 Pf.

Dieses „Annuaire" enthält ausser einer kleinen astronomischen Ephemeride eine so grosse Menge für die praktische Mathematik und namentlich auch für die Physik nützlicher Tafeln, dass kaum irgend etwas von Wichtigkeit vermisst werden dürfte, weshalb wir glauben, dass dasselbe bei seinem überaus geringen Preise nicht genug empfohlen werden kann, indem es für jeden Mathematiker und Physiker ein höchst nützliches Taschenbuch bildet. Auf die astronomische Ephemeride, welche alles für das gemeine Leben Wichtige und Nothwendige enthält, und zugleich mehr als vollständig die Zwecke eines gewöhnlichen Kalenders erfüllt, folgen Tafeln zur Vergleichung der Maasse, Münzen und

Gewichte verschiedener Länder unter, und deren Reduction auf einander; dann Dichtigkeiten der Gase und Dämpfe, der tropfbaren und festen Körper; Ausdehnung der festen Körper durch die Wärme; Expansivkraft der Wasserdämpfe; Wärmekraft verschiedener brennbarer Stoffe; Schmelzungspunkte; Kochpunkte; Wärmestrahlung; Tafeln zur Reduction der Barometerstände; Vergleichung der Thermometerscalen; Psychrometertafeln; Tafeln zur Bestimmung der Höhenunterschiede mittelst des Barometers (es sind die Tafeln von Oltmanns); Tafeln zur Bestimmung des Gewichts des Hornviehs aus blossen Messungen desselben ohne Abwägung (die englische und die französische Methode und eine neue von Herrn Quetelet angegebene Methode, die aus einer Reihe neuer in Gegenwart einer dazu ernannten Kommission angestellter Versuche abgeleitet worden ist). Nun folgt eine grosse Anzahl statistischer Tafeln, die zwar sich zunächst auf Belgien beziehen, und gewiss eine höchst vortheilhafte Meinung von diesem jungen Königreiche einzuflössen geeignet sind, aber doch auch viel allgemein Interessantes und Anwendbares enthalten; und den Beschluss machen die Meteorologie und die Physik der Erde, mit Einschluss der magnetischen Declination, Inclination und Intensität.

Sollte diese, weil die Beschränktheit des Raums eine andere uns hier nicht gestattet, freilich nur sehr oberflächliche Angabe des reichen Inhalts dieses trefflichen „Annuaire" nicht unser obiges Urtheil und unsere Empfehlung zu allgemeinerem Gebrauch nicht vollständig zu rechtfertigen hinreichend sein?

XXX.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bessel's Tod.

(Aus den Astronomischen Nachrichten. Nro. 556. entlehnt.)

Am 17. März Abends zwischen 6 und 7 Uhr starb Friedrich Wilhelm Bessel. Seine langen und schweren Leiden schloss ein ruhiger schmerzloser Tod. Er schlief von Liebe bewacht sanft ein, um hier nicht wieder zu erwachen.

Die letzten Tage seines Lebens wurden noch durch eine Freude erheitert, welche die Gnade Seiner Majestät des Königs von Preussen ihm bereitet hatte. Der Erhabene Monarch liess sich für Bessel in ganzer Figur, im einfachen Ueberrocke an Seinen Schreibtisch, wie von der Arbeit aufstehend, gelehnt, durch Professor Krüger malen. Dies Bild, das ein mehr als gnädiges Handschreiben ankündigte, kam am 2. März auf der Sternwarte an, und war von der Zeit bis zu seinem Tode Bessel's einzige Freude. Er dictirte am 7. März seiner Tochter folgenden hier wörtlich abgedruckten Brief an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten:

> „Das Bild ist ein Meisterwerk, prachtvoll, ein wahrhaft Königliches Geschenk! Der Gedanke, der ihm seine Entstehung gegeben hat, macht es zu einem geschichtlichen Denkmale, welches dem Herzen jedes Preussen unendlich theuer sein muss. Vermöchte etwas diesen zwiefachen Werth desselben noch zu steigern und das Glück, welches ich in seinem Besitze finde zu erhöhen, so könnte dies nur das Allerhöchste Handschreiben sein, durch welches der Monarch, mein Gnädigster Herr, mir zehn Tage vor der Ankunft des Bildes seine baldige Absendung ankündigte. Ich würde, selbst in den gesundesten Tagen, vergebens versuchen,

Ihnen die Tiefe des Eindrucks zu schildern, welchen mein jetziger Besitz auf mich gemacht hat. Wir sind aber alte Freunde, die sich gegenseitig durch und durch kennen, und deren Einer, auch ohne besondere Schilderung, wohl weiss wie der Andere denkt."

Ein Brief seiner Tochter, des Fräuleins Johanna Bessel, an den Herausgeber vom 18. März zeigt, dass die letzten Blicke des Sterbenden noch auf diesem Bilde ruheten.

„Schon seit mehreren Tagen, besonders seit Sonntag, hatte mein Vater sich sehr verändert. Der Pulsschlag war kaum noch bemerkbar, und er lag fast fortwährend in einem Schlummer, in dem er endlich entschlief. Mutter und ich sassen allein an seinem Bette und freuten uns seines ruhigen und freien Athmens während des Schlafes. Dies Athmen wurde allmählich immer leiser, bis ich es zuletzt nur angestrengt lauschend noch vernehmen konnte. Einmal hob er dann noch den Kopf — und der letzte Hauch war entflohen. Es war ein schöner sanfter Tod, wie er ihn sich immer gewünscht hatte. Wir sassen noch lange vor seinem Bette, ohne es zu wagen, die heilige Stille durch Laut oder Bewegung zu unterbrechen.

Er behielt bis zu seinem Ende sein volles Bewusstsein. Nachmittags sprach er noch den Dr. Motherby, der ihn besuchte, und meinen Schwager, der ihm das Bild des Königs wieder vor das Bett stellte, was ihn innig erquickte und erfreuete. Er hatte sich in den letzten Tagen davon getrennt, damit Jedermann es sehen könne, und es machte ihm grosse Freude, wenn wir ihm erzählten, wie es Alle entzückte. Wäre für ihn Hülfe möglich gewesen, die Freude über das Geschenk des Königs hätte ihm geholfen, das, wie er zu sagen pflegte, den Menschen noch an das Leben zu fesseln im Stande sei. Er hoffte immer noch dem Könige selbst für das liebe Bild danken zu können, aber er war schon zu schwach. Der Brief an Sie, den er mir am 7. März dictirte, war sein letzter. Er wird Ihnen ein theures Andenken sein."

Der Herausgeber, der auf das Glück der vielen Jahre, die er mit Bessel in der engsten freundschaftlichen Verbindung durchlebte, wehmüthig zurücksieht, bewahrt diesen Brief und den letzten noch von Bessels eigener Hand am 22. Februar, schon auf dem Sterbelager geschriebenen Brief unter seinen theuersten Besitzthümern.

S.

Der obigen Anzeige des verehrten Herrn Herausgebers der Astronomischen Nachrichten freue ich mich noch hinzufügen zu können, dass nach einer mir gemachten freundschaftlichen Mittheilung Herr Professor Dr. Anger in Danzig, welcher mit Bessel in einer langjährigen unmittelbaren Verbindung gestanden hat, mit der Abfassung einer Gedächtnissrede auf diesen grossen Astronomen für die naturforschende Gesellschaft in Danzig beschäftigt ist, die er demnächst bekannt machen und sich dadurch gewiss den lebhaftesten Dank eines jeden Mathematikers erwerben wird. Denn wer auch nicht Astronom von Fach ist, muss doch an den Lebensschicksalen und dem Bildungsgange eines so hervorragenden, in

der Geschichte der Wissenschaft einzig dastehenden Geistes, wie Bessel war, das grösste Interesse nehmen, und sich an einem Bilde wahrhaft erwärmen, durch dessen Anschauung ihm klar werden wird, dass mit glänzenden Eigenschaften des Geistes und ausgebreiteter Gelehrsamkeit auch sehr wohl grosse Tugenden des Herzens verbunden sein können, und dass bei unausgesetzen tiefen wissenschaftlichen Studien doch auch das rein Menschliche im Menschen stets erhalten werden kann. Gr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Compendium der elementaren Mathematik, enthaltend die Geometrie, Arithmetik und ebene Trigonometrie. Zum Gebrauche beim Unterrichte von Dr. A. Kramer, Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Nordhausen. Mit eingedruckten Figuren. Nordhausen. 1846. 8. 25 Sgr.

Dieses Schulbuch enthält die Lehren der Planimetrie, Stereometrie, Arithmetik und ebenen Trigonometrie nach der so eben angegebenen Ordnung in dem Umfange, in welchem sie gegenwärtig auf den preussischen Gymnasien vorgetragen zu werden pflegen. Zu der von dem gewöhnlichen Gebrauche abweichenden Anordnung des Stoffs wird dem Herrn Verfasser wahrscheinlich die Art und Weise, wie er von dem Buche bei seinem Unterrichte Gebrauch macht, Veranlassung gegeben haben. Ob indess er nicht vielleicht besser gethan und dem Buche einen allgemeineren Eingang verschafft haben würde, wenn er dasselbe in mehrere kleinere, einzeln verkäufliche Abtheilungen getheilt und dadurch einem jeden Lehrer die Freiheit gelassen hätte, von demselben nach Belieben Gebrauch zu machen, wollen wir dahingestellt sein lassen. Viele Eigenthümlichkeiten irgend einer Art, die eine besondere Hervorhebung verdienten, sind uns in demselben nicht entgegengetreten; es ist aber einfach, klar und deutlich abgefasst, und entspricht in diesen Beziehungen den an ein Schulbuch zu machenden Anforderungen recht wohl. Dass der Theorie der Parallellinien ein besonderer dieser Lehre eigenthümlicher Grundsatz, ohne den man nun einmal in derselben nicht wird auskommen können, zum Grunde gelegt und deutlich hervorgehoben, nicht versteckt in die Beweise der Lehrsätze, wie dies nicht selten geschieht, eingewebt worden ist, verdient Anerkennung. Nur ist nicht recht abzusehen, warum der Herr Verfasser seinen Grundsatz 75. S. 10.:

> „Zwei einander schneidende Gerade können nicht einer und derselben dritten Geraden parallel sein.“

nicht lieber directer auf folgende Weise:

> Zwei einer und derselben dritten Geraden parallele Gerade sind einander selbst parallel

ausgedrückt hat; denn beides kommt doch im Wesentlichen auf dasselbe hinaus, und der zweite directe Satz scheint uns nament-

lich für den ersten geometrischen Unterricht zweckmässiger als der erste mehr indirecte Satz zu sein. Der gute Druck und die sehr saubern in den Text eingedruckten Holzschnitte gereichen dem Buche gleichfalls zur Empfehlung.

Arithmetik.

Egen, P. N. C.: die allgemeine Arithmetik. I. Thl. 3te verb. Aufl. 1846. 2 Rthlr.

Algebraische Aufgaben aus dem ganzen Gebiet der reinen Mathematik mit Angabe der Resultate. Als Ergänzung zu Meier Hirsch Sammlung von Beispielen etc., so wie auch zum selbstständigen Gebrauch bearbeitet von Dr. D. C. L. Lehmus, Professor der Mathematik an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem Haupt-Bergwerks-Eleveninstitut in Berlin. Berlin. 1846. 8. 18 Sgr.

Bekanntlich enthalten die geometrischen Aufgaben von Meier Hirsch nicht bloss die Resultate, sondern die vollständigen Auflösungen. Dieser Umstand, meint der Herr Verfasser in der Vorrede, sei der Grund, dass die geometrischen Aufgaben von Meier Hirsch weit weniger Beifall als die algebraischen gefunden hätten. Dadurch sei er zur Herausgabe dieser bloss die Resultate ohne die Lösungen enthaltenden Sammlung algebraischer und geometrischer Aufgaben veranlasst worden, deren Inhalt folgender ist. *Erste Abtheilung.* Aufgaben aus der Arithmetik. I. Aufgaben aus der Arithmetik ohne Zuziehung des dekadischen Zahlensystems. Nro. 1—100. II. Aufgaben aus der Arithmetik mit Zuziehung des dekadischen Zahlensystems. Nro. 1.—127. *Zweite Abtheilung.* Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten führen. III. Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten zu ordnen. Nro. 1—12. IV. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen vom ersten Grade führen. Nro. 1—120. V. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen vom zweiten Grade führen. Nro. 1—50. VI. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen von höheren Graden führen. Nro. 1—22. *Dritte Abtheilung.* Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen mit mehr Unbekannten führen. VII. Vermischte ohne Anordnung nach der Anzahl der Unbekannten und dem Grade der entstehenden Endgleichung. Nro. 1—49. VIII. Anwendungen des Satzes von den unbestimmten Coefficienten. Nro. 1—18. IX. Unbestimmte Aufgaben. Nro. 1—27. *Vierte Abtheilung.* Algebraische Aufgaben aus den geometrischen Wissenschaften. X. Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Nro. 1—47. XI. Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Nro. 1—68. XII. Aufgaben aus der Körperlehre und sphärischen Trigonometrie. Nro. 1—46. XIII. Aufgaben aus der Coordinaten-Theorie und den Kegelschnitten. Nro. 1—32. *Anhang.* Aufgaben, welche auf transcendente Gleichungen führen. Nro. 1—14.

Eine Seite lässt diese Sammlung geometrischer Aufgaben, indem sie bloss die Resultate in Formeln angiebt, so gut wie ganz unberücksichtigt, nämlich die Herleitung geometrischer Constructionen aus den gefundenen algebraischen Ausdrücken, wozu Meier Hirsch allerdings Anleitung giebt, und die also hier ganz dem mündlichen Unterrichte anheim gestellt bleibt.

Neun mathematische Abhandlungen von Dr. Fr. Arndt, Gymnasiallehrer zu Stralsund. (Besonders abgedruckt aus Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band XXXI.). Berlin. 1846. 4.

Die Titel dieser Abhandlungen, die alle von dem Scharfsinne des Herrn Verfassers ein neues sehr erfreuliches Zeugniss ablegen, sind folgende: Ueber die Summirung der beiden Reihen

$$\gamma_0 - n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 - \ldots + (-1)^n\gamma_n,$$
$$\gamma_0 + n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \ldots + \gamma_n,$$

in welchen die Grössen γ willkührlich und die Coefficienten Binomialcoefficienten des ganzen Exponenten n sind, mittels höherer Differenzen und Summen. — Nova solutio problematis determinandi multitudinem numerorum, qui ad numerum aliquem sint primi eoque minores. — Entwickelung der Summe der $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes. — Ueber die Bernoullische Methode summirbare Reihen zu finden. — Nova methodus determinandi multitudinem radicum congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. M) aliaque ad hanc materiem spectantia. — Demonstratio duorum theorematum Gaussianis his generaliorum: I. Productum ex omnibus radicibus primitivis moduli imparis p unitati sec p. congruum est, excepto casu, in quo $p=3$. II. Summa omnium radicum primitivarum moduli primi imparis p est $\equiv 0$, quando $p-1$ per quadratum aliquod divisibilis est; quando vero per nullum quadratum divisibilis, summa est $\equiv \pm 1$, prout multitudo factorum ipsius $p-1$ primorum est par aut impar. — Demonstratio nova theorematis Wilsoniani a summo Gauss hoc modo generalius enunciati: Productum omnium numerorum ad numerum quemcunque M primorum eoque inferiorum unitati negativae aut positivae sec. M congruum est; et quidem negative sumenda est unitas, quando M potestas numeri primi imparis vel ejus duplum, vel denique 4, positive autem in omnibus casibus reliquis. — Disquisitiones de residuis cujusvis ordinis. — Bemerkungen über die Verwandlung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch. — Man sieht aus dieser Angabe des Inhalts, mit der wir uns der Beschränktheit des Raums wegen hier leider begnügen müssen, dass diese Abhandlungen des Interessanten nicht wenig darbieten.

Geometrie.

Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterrich von Dr. W. A. Wilde, Professor am Gymnasium zu Stargard. Dritter Band. Auch unter dem Titel:

Lehrbuch der Geometrie für den Schul- und Selbstunterricht. Erster Band. Die ebene Geometrie mit Einschluss der Trigonometrie. (Mit acht Figurentafeln.) Leipzig. 1846. 8. 25 Sgr.

Der erste Band dieses Lehrbuchs ist in Nro. XXIV. S. 357. des Literarischen Berichts angezeigt worden. Der Inhalt des vorliegenden ersten geometrischen Theils ist im Allgemeinen folgengender. Einleitung. *Longimetrie.* Erster Abschnitt. Lage gerader Linien in der Ebene. Zweiter Abschnitt. Zusammenhang unter den Linien und Winkeln der Figuren. Dritter Abschnitt. Constructionelle Aufgaben. Vierter Abschnitt. Zusammenhang unter den Linienverhältnissen und Winkeln der Figuren. Aehnlichkeit. Anhang zum vierten Abschnitt. (Transversalen. Harmonische Punkte. Anwendungen des Pythagorischen Satzes beim Dreieck und Viereck. Linien in und am Kreise. Verjüngter Maassstab. Vernier oder Nonius.). Fünfter Abschnitt. Aufgaben zum vierten Abschnitt. (Constructionen. Geometrisch-algebraische Aufgaben. Construction algebraischer Ausdrücke). *Planimetrie.* Sechster Abschnitt. Flächenlehre oder Planimetrie im engern Sinne. Siebenter Abschnitt. Aufgaben zum sechsten Abschnitt. *Trigonometrie.* Achter Abschnitt. Von den trigonometrischen Functionen (Goniometrie). Neunter Abschnitt. Trigonometrische Rechnungen.

So wie in dem ersten Bande ist auch in diesem zweiten ein sehr löbliches Streben nach systematischer Anordnung unverkennbar. Daneben enthält das Buch aber auch Anleitung und Stoff zu eignen Uebungen der Schüler genug, lässt die praktische Seite nicht ganz unberücksichtigt, und sucht auch, wie z. B. der Anhang zum vierten Abschnitte zeigt, die Erweiterungen, mit welchen die Geometrie in neuerer Zeit bereichert worden ist, für den Schulunterricht zu benutzen, ohne darin jedoch, wie es recht ist, zu weit zu gehen. Zugleich enthält der fünfte Abschnitt eine Anleitung zur analytischen Geometrie, so weit dieselbe in den Kreis des Schulunterrichts gehört, oder vielmehr eine Anleitung zur algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben, und zur Herleitung geometrischer Constructionen aus gefundenen algebraischen Ausdrücken, Alles in sehr einfacher, fasslicher, dabei aber den gerechten Anforderungen geometrischer Strenge genügender Weise, und in einer für den Schulunterricht jedenfalls vollkommen ausreichenden Vollständigkeit. Am wenigsten hat uns nach den Ansichten, die wir nun einmal über diesen vielbesprochenen Gegenstand haben und als hinreichend bekannt voraussetzen dürfen, die Behandlung der Lehre von den Parallelen angesprochen. Bei allen solchen Darstellungen wie die hier gegebene wird, wie es uns scheint, zu häufig an die blosse Anschauung apellirt. Stellt man aber einen dieser Lehre eigenthümlichen Grundsatz kurz, klar und bestimmt auf, und weiset die Schüler darauf hin, dass erstlich überhaupt gewisse nothwendige Axiome das eigentliche Fundament der gesammten Mathematik bilden, dass ferner die Lehre von den Parallelen, in welcher es auf Vergleichungen von Linien mit einander rücksichtlich der Gleichheit ihrer gegenseitigen Lage ankomme, mindestens ein ihr eigenthümliches Axiom nothwendig fordere, und leitet dann alles Uebrige aus diesem einen Axiome

durch folgerechte Schlüsse kurz, klar und bestimmt ab, so hat man, glauben wir, sein wissenshaftliches Gewissen gerettet, und alle Gelegenheit zu Einwürfen von Seiten der Schüler abgeschnitten. Mehr als das Vorhergehende wird sich in dieser Lehre wohl auch schwerlich jemals erreichen lassen, und es kommt nur darauf an, denjenigen Satz ausfindig zu machen, welcher am meisten auf den Namen eines Axioms Anspruch zu machen berechtigt ist. Keineswegs wollen wir aber dem Herrn Verfasser dieses Lehrbuchs hierdurch einen Vorwurf machen, dass er wenigstens nicht ganz denselben Ansichten gefolgt ist, da wir recht gut wissen, dass gerade bei diesem Gegenstande schwerlich jemals eine Uebereinstimmung der Ansichten zu erreichen sein, und der Herr Verfasser gewiss auch seiner Darstellung bei den Schülern den gehörigen Eingang zu verschaffen verstehen wird.

Joanet: annotation à la géométrie élémentaire de Legendre. 2. edit. Paris.

Fünf berühmte Fragen aus der Bildlehre. Vom Professor Dr. G. Paucker. Mitau. 1845. 8.

Die in dieser kleinen Schrift enthaltenen, mehr angedeuteten als ausgeführten Betrachtungen sind, wie der Herr Verfasser auf S. 13. sagt, einem Werke über die neuere Bildlehre (Geometrie) entnommen, zu dessen Herausgabe derselbe nur günstige Umstände erwartet. Der Inhalt dieses kleinen Vorläufers des grösseren Werkes ist in den von den gewöhnlichen häufig abweichenden Ausdrücken des Herrn Verfassers folgender: 1. Die Bildgleichung und Doppelbildung. 2. Der Doppelschnitt. 3. Der Verhältnissschnitt und Flächenschnitt. 4. Eine Fügung (Figur) in und um gegebene Fügungen zu beschreiben. 5. Eine Fügung um eine andere Fügung und in einen Abkreis (Kegelschnitt) zu beschreiben. — Die neuen durch Einfachheit sich auszeichnenden Behandlungen einiger der wichtigsten Sätze und Aufgaben der Geometrie, welche der Herr Verfasser in dieser Schrift andeutet, machen allerdings auf das angekündigte grössere Werk begierig. Ueber Nro. 5. sagt derselbe, dass er die hier gegebene ungemein einfache Auflösung im Winter 1844/45 gefunden habe, und bemerkt auf S. 14., um Missverständnissen vorzubeugen, „dass Herr Oberlehrer Seydewitz zu Heiligenstadt sich gleichzeitig mit derselben beschäftigt habe und durch seine scharfsinnigen Betrachtungen (Grunert Archiv für Mathematik. Thl. IV. S. 421. 1844.) zu ähnlichen Ergebnissen geführt worden sei.“ — Wir wünschen im Interesse der Wissenschaft, dass der Herr Verfasser durch die von ihm erwarteten günstigen Umstände recht bald zur Herausgabe seines grösseren Werks in den Stand gesetzt werden möge.

Das Malfattische Problem, neu gelöst von C. Adams, Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule in Winterthur. Mit einer lithographirten Tafel. Winterthur. 1846. 4.

Das Malfattische Problem ist bekanntlich die Aufgabe:

In ein gegebenes Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, dass jeder derselben die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berühre,

und zuerst aufgelöst von dem Italiener Malfatti in dem ersten Theile des zehnten Bandes der Mem. d. Soc. Ital. 1803.

Die obige Schrift zerfällt in die drei folgenden Abschnitte: *Erster Abschnitt.* Die älteren Auflösungen. *Zweiter Abschnitt.* Die Steiner'sche Construction. *Dritter Abschnitt.* Neue Auflösung.

In dem ersten Abschnitte charakterisirt der Herr Verfasser die älteren von Malfatti selbst, Gergonne und Lavernède, Tédenat, Crelle, Lehmus und dem Herausgeber des Archivs in den Supplementen zu dem mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 29. gegebenen Auflösungen näher und bereichert die von Gergonne und Lavernède gegebene Auflösung mit einigen schätzbaren eignen Bemerkungen. Da alle diese älteren Behandlungen des Problems mehr eine möglichst elegante analytische Auflösung als eine geometrische Construction bezweckten, so wird ganz zweckmässig in dem zweiten besonderen Abschnitte die von Steiner ohne Beweis gegebene Construction mitgetheilt, und der von Zornow gegebene Beweis derselben vereinfacht, überhaupt wieder mit verschiedenen beachtenswerthen eigenen Bemerkungen bereichert. Im dritten Abschnitte theilt der Herr Verfasser endlich seine eigne durch Einfachheit sich empfehlende Construction nebst der vollständigen Analysis derselben mit, welche letztere, was man nicht unbemerkt zu lassen hat, auch unmittelbar sowohl zu den von Malfatti, als auch zu den von Tédenat gegebenen, durch besondere Eleganz sich auszeichnenden Ausdrücken führt. Jedenfalls ist diese Schrift allen denen, welche die Aufgabe, mit der sich dieselbe in ziemlicher Ausführlichkeit beschäftigt, näher kennen lernen wollen, sehr zu empfehlen, so wie das immer häufigere Erscheinen solcher Monographien uns überhaupt wünschenswerth und oft verdienstlicher als die Ausarbeitung eines gewöhnlichen Lehrbuchs oder die Anfertigung von Uebersetzungen aus dem Französischen oder Englischen zu sein scheint, da namentlich letztere sehr häufig fast gar nichts weiter als das Abschreiben von Formeln erfordern.

Die Stereotomie (Lehre vom Körperschnitte), enthaltend die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linearperspective, Gnomonik, den Steinschnitt und die Holzverbindungen, mit einem Atlas von 74 Tafeln in Folio, von E. F. A. Leroy. Aus dem Französischen von E. F. Kauffmann. Stuttgart. 1846. Erste Lieferung. Bogen 1 bis 6. Mit Atlas. 1 Rthlr.

Praktische Geometrie.

Williams, J. B.: practical geodesy. 8. 12 S. 6 d.

Breton, P. (Dechamp): description des courbes à plusieurs centres, d'après le procédé Perronet: tableaux numeriques etc. Paris.

Bräuhäuser, J.: Tafeln zur approximativen Bestimmung der Grössen eines jeden Winkels in Graden und Minuten vermittelst des gewöhnlichen Taschenmaassstabes. Augsburg. 1846. $\frac{1}{6}$ Rthlr.

Praktische Mechanik.

Poppe, A.: Grundlehren der Mechanik und des Maschinenwesens mit Beispielen der Anwendung auf 4 Tafeln. Frankfurt. 1846. $\frac{11}{12}$ Rthlr.

Einfache und leichtverständliche Anleitung zur Berechnung der Kraft der Dampfmaschinen. Vom Grafen G. de Pambour. Deutsch von Dr. E. H. Schnuse. Braunschweig. 1846. 8. 7 Sgr. 6 Pf.

Astronomie.

Elementare Darstellung der Analyse der Fixstern-Bedeckungen des Herrn Geheimen Raths Bessel. Von C. Rümker. Hamburg. 1846. 4.

Durch diese kleine Schrift, deren Zweck durch ihren Titel mit hinreichender Deutlichkeit bezeichnet wird, hat sich der Herr Verfasser um alle diejenigen ein Verdienst erworben, denen eine sich unmittelbar an eine Figur anschliessende, und dadurch jedenfalls an Anschaulichkeit gewinnende Darstellung mehr als eine die allgemeinen Lehren der analytischen Geometrie in Anspruch nehmende Behandlungsweise zusagt. Dass aber gerade unter denen, welche sich namentlich praktischer Zwecke wegen mit Astronomie beschäftigen, wie z. B. unter den wissenschaftlich gebildeten Seefahrern, viele sind, welche das Bedürfniss einer solchen mehr elementaren und anschaulichen Darstellung fühlen, ist schon in Nro. XXII. des Literarischen Berichts. S. 340. bei Gelegenheit der Anzeige der von Herrn C. Rümker besorgten vortrefflichen vierten Auflage des Hamburger Lehrbuchs der Schifffahrtskunde von uns hervorgehoben worden. Da nun ausserdem Bessel's Methode zur Berechnung der Länge aus beobachteten Sternbedeckungen (denn hierauf bezieht sich die obige Schrift, nicht auf Bessels Methode zur Vorausberechnung der Sternbedeckungen, was wir, um jedem möglichen Missverständnisse vorzubeugen, besonders bemerken) allerdings sehr verdient, immer noch häufiger in Anwendung gebracht zu werden, so glauben wir auf die obige kleine Schrift die Leser des Archivs nicht bloss im Allgemeinen, sondern insbesondere auch die Lehrer an Schifffahrtsschulen aufmerksam machen zu müssen, und dieselbe ihrer Beachtung zu empfehlen. Die Anwendung der Methode ist in derselben von dem Herrn Verfasser auch durch ein vollständig ausgerechnetes Beispiel erläutert worden.

Tuxen, S. L.: Laerebog i Styrmandskunsten eller Styrmandskunsten praktisk og theoretisk forklaret. 2 opl. 2 Dele Imp. 8. 6 Rbd. 64 Sk.

Bewegliche Himmelskarte mit Horizont, nebst Erklärung ihrer Construction von O. Möllinger, Professor an der höheren Lehranstalt in Solothurn. Schaffhausen. 1. Rthlr. 6 Sgr.

Physik.

Katzfey, J.: Naturlehre für höhere Lehranstalten. I. Experimentalphysik. Verb. Ausg. Cöln. 1846. 12 Sgr.

Die Elemente der Physik nach mathematischen Principien zum Gebrauche für höhere Schulen und Gymnasien von Dr. J. Götz, Professor der Mathematik und Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften. Nebst 343 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. 1846. 8. 2 Rthlr. 18 Sgr.

Die mathematische Darstellung in diesem Lehrbuche beschränkt sich nur auf den mechanischen Theil der Physik, und auf das Allergewöhnlichste in der Lehre vom Lichte. In der Lehre von der Electricität, dem Galvanismus, Magnetismus und dem Electromagnetismus ist von Mathematik keine Rede weiter, so wie denn auch die physikalische Theorie des Lichts, selbst auch die Lehre vom Achromatismus, nur eine sehr oberflächliche Berücksichtigung in demselben gefunden hat. Ueberhaupt enthält die Lehre von den sogenannten Imponderabilien nichts weiter, als was man in den gewöhnlichsten Compendien findet, ohne alle Eigenthümlichkeit der Darstellung und Behandlungsweise. Da also in diesem Theile die Kritik nichts zu thun findet, so wenden wir uns zu den mechanischen Abschnitten, und namentlich zu der denselben zu Theil gewordenen auf dem Titel des Buchs besonders hervorgehobenen mathematischen Darstellung. Diese letztere müssen wir aber leider als sehr schwach bezeichnen, und haben in derselben nichts weiter gefunden, als was in derselben Weise schon in den deutschen physikalischen Lehrbüchern etwa aus den Zeiten Gren's zu finden ist. Denn bei Schlüssen, wie z. B. dem in der Lehre vom Fall auf S. 18. sich findenden: „weil $m = \infty$ sich zeigt und also m für $m + 1$ gesetzt werden kann," ist dem Herrn Verfasser wohl noch nie ein Bedenken aufgestossen, und derselbe scheint nach einer solchen Probe noch nicht hinter das, was an dergleichen Dingen das allein Wahre und Richtige ist, gekommen zu sein. Das kann aber nicht auffallen, wenn man aus vielen Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur leider immer mehr und mehr die Ueberzeugung gewinnen muss, dass die grossen lediglich der neuesten Zeit angehörenden Leistungen für eine bessere Begründung aller Theile der Mathematik sich im Ganzen nur noch einer höchst geringen Verbreitung erfreuen, und

an vielen Schriftstellern spurlos vorübergegangen sind. Mit uns möge man machen, was man will, wir werden es nie zugeben, dass in irgend einem Falle m für $m+1$ gesetzt werden könne, auch wenn m noch so gross geworden sein mag. Bei dem Unterrichte auf Schulen sind aber dergleichen Absurditäten um so gefährlicher, weil die Schüler den eigentlichen Sinn solcher Betrachtungen noch gar nicht kennen, sondern eben erst in denselben eingeführt werden sollen, und wir möchten doch den Lehrer sehen, der sich nicht in grosser Verlegenheit befinden sollte, wenn er einen ihm gegenüber die Behauptung, dass $m+1>m$ sei, aufstellenden Schüler zu der Ueberzeugung bringen wollte, dass $m+1=m$ sei. Wenn aber ein Lehrer der Mathematik nur den Widerspruchsgeist seiner Schüler zu wecken versteht und zu wecken den redlichen Willen hat, so kann er uns auf's Wort glauben, dass es an solchen Einwürfen wie der vorhergehende, insofern der Lehrer selbst durch seine ungenügende Darstellung zu denselben mehr als zu viel Gelegenheit giebt, nicht fehlen wird. Wir haben, da der Raum mehr in's Einzelne zu gehen uns nicht verstattet, absichtlich den obigen ganz trivialen Fall hervorgehoben, weil derselbe nach unserer Meinung ganz geeignet ist, einem jeden der Sache gehörig Kundigen den Geist der ganzen in diesem Buche gegebenen mathematischen Darstellung der Lehren des mechanischen Theils der Physik mit einem Male vollständig zur Anschauung zu bringen, und zur Bildung eines eigenen Urtheils die nöthige Richtschnur abzugeben. Dabei müssen wir aber auch noch bemerken, dass für Vieles, was unbedingt eine mathematische Theorie fordert, gar keine solche gegeben worden ist. So muss z. B. die Bestimmung des Feuchtigkeitszustandes der Luft aus Beobachtungen des Psychrometers durchaus auf bestimmte mathematische Formeln zurückgeführt werden, und ohne eine strenge mathematische Theorie ist das Psychrometer überhaupt ein ganz unnützes Instrument. Diesen ganzen so wichtigen Apparat thut aber ausser einer kurzen Beschreibung desselben der Herr Verfasser auf S. 241. mit den Worten ab: „Der Unterschied der durch beide Thermometer angegebenen Temperaturen, d. h. die Psychrometer-Differenz, bestimmt die Feuchtigkeit der Luft"; freilich aber konnte von einer Theorie des Psychrometers nicht die Rede sein, weil die so wichtigen mathematischen Untersuchungen über die Expansivkraft der Dämpfe ganz ausserhalb des Planes, den der Herr Verfasser sich bei Abfassung dieses Buches machte, gelegen zu haben scheinen. Endlich genügt dasselbe auch einer Anforderung nicht im Mindesten, welche man an eine mathematische Darstellung der Physik durchaus zu machen berechtigt ist, indem es nämlich nirgends die vielfachen Correctionen, welche fast alle physikalischen Versuche erfordern, wenn sie nur irgend auf wissenschaftliche Genauigkeit sollen Anspruch machen können, gehörig berücksichtigt, und überhaupt diese so höchst wichtige und interessante Seite der Physik ganz bei Seite liegen lässt. Man sieht daher hieraus, dass dieses neue Lehrbuch der Physik bloss die bekanntesten Dinge enthält, und dass die auf dem Titel hervorgehobene mathematische Behandlung wohl, wenn man die Sache aus einem mehr wissenschaftlichen Standpunkte betrachtet, gerade seine schwächste Seite ist. Die Holzschnitte können zwar genügen, sind aber nicht sehr sauber ausgeführt; und sollen dieselben, wie es fast scheint, Abbi-

dungen der Theile eines wirklich vorhandenen physikalischen Apparats sein, so gehört derselbe wenigstens nicht zu den vorzüglich eleganten, und erinnert, wie das ganze Buch, vielfach an eine ältere Zeit.

Sollten einige der oben zuletzt erwähnten Unvollständigkeiten vielleicht darin ihre Entschuldigung suchen, dass das Buch zunächst nur für den Schulunterricht bestimmt sei, so müsste das vorherrschend sein sollende mathematische Element nicht auf dem Titel und in der Vorrede als ein besonderes Gewicht in die Wagschale legend hervorgehoben worden sein.

Wir haben die obigen Bemerkungen nicht unterdrücken wollen, weil wir sehr wünschen, dass auch der mathematischen Physik immer mehr und mehr eine der geometrischen Strenge sich möglichst nähernde Darstellung zu Theil werden möge, wofür uns in Deutschland u. A. der verdiente Bohnenberger in dem dritten Theile seiner Astronomie ein vortreffliches Muster aufgestellt hat, welches, wie wir hören, noch jetzt von einem der grössten lebenden Mathematiker angehenden Astronomen vorzüglich zum Studium empfohlen zu werden pflegt. Ausserdem sind wir der Meinung, dass die mathematische Physik, aus einem richtigen Gesichtspunkte dargestellt, d. h. *immer auf die strenge, hier fast nirgends zu umgehende Betrachtung der Gränzen zurückgeführt*, ein ganz vorzügliches Bildungsmittel des mathematischen Geistes überhaupt, und eine vortreffliche Vorbereitung zum Studium der höhern Mathematik, insbesondere der höheren Mechanik ist. Wer diesen Gesichtspunkt nicht festhält, und ohne vorzügliche Rücksicht auf die Strenge der Methode bloss eine Kenntniss der hauptsächlichsten physikalischen Gesetze und der gewöhnlichsten Formeln, in denen dieselben sich darstellen lassen, sucht, und eben bloss in diesen Formeln an sich das mathematische Wesen der Physik findet, mag sich das vorliegende Buch immerhin zum Führer wählen und wird sich vielleicht selbst dem Herrn Verfasser hin und wieder zu Dank verpflichtet fühlen, indem das Buch vor manchen andern öfters gerühmten physikalischen Lehrbüchern, die aber häufig ihre Aufgabe nur durch eine möglichste Anhäufung von Material ohne scharfe Begründung zu lösen suchen, u. A. die gute Seite hat, dass es die, eigentliche wissenschaftliche Bedeutung habenden, Resultate überall mit möglichster Klarheit und Bestimmtheit hervorzuheben sucht. Möge daher dasselbe immerhin auch seinen Nutzen stiften, den wir demselben keineswegs ganz absprechen wollen.

Nigris: la géologie liée à l'astronomie, ou nouv. système solaire.

L. Schrön: Stöchiometrische Hülfstafeln. gr. 8. Hannover. 1846. $1\frac{1}{3}$ Rthlr.

XXXI.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten von Joh. Aug. Grunert. Erster Theil. Gemeine Arithmetik. Dritte verbesserte Ausgabe. Auch unter dem Titel: Lehrbuch der gemeinen Arithmetik für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten von Joh. Aug. Grunert. Dritte verbesserte Ausgabe. Brandenburg. 1845. 8.

Vermehrungen dieser dritten Auflage meines Lehrbuchs der gemeinen Arithmetik für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten habe ich nicht für nöthig und zweckmässig erachten können. Dagegen glaube ich dieselbe mit Recht eine verbesserte nennen zu dürfen: auch ist die angehängte kleine Factorentafel, in welche sich früher einige Fehler eingeschlichen hatten, von einem der besten meiner jetzigen Schüler, Herrn Lohse, ganz neu berechnet worden, die Einrichtung derselben aber im Ganzen völlig ungeändert geblieben, was schon deshalb nöthig war, weil jede wesentliche Veränderung bei dem Gebrauche der dritten Auflage neben den früheren Auflagen dieses, eben so wie die übrigen Theile meines ganzen aus sechs Theilen bestehenden mathematischen Lehrbuchs für Schulen, in vielen Tausend Exemplaren verbreiteten Lehrbuchs dem Gebrauche des Unterrichts nach demselben hinderlich entgegen getreten sein würde. Von dem die Kegelschnitte enthaltenden [illegible] Theile [illegible] des Lehrbuchs für die obern Klassen wird auch [illegible] in diesem Jahre eine dritte Auflage erscheinen und dann [illegible] dritte Auflage [illegible] sechs Theile beendigt sein.

G.

Arithmetik.

Jürgensen, E.: die elementair Arithmetik og Algebra. 8. Kopenhagen. 1 Rbd.

Calculi differentiarum finitarum inversi exercitationes. Auctore Mag. Em. Gabr. Björling, ad Reg. Acad. Upsal. Math. Doc., ad Reg. Gymn. Aros. Math. Lect. design. Pars IIda. (Ex Actis Reg. Societ. Scient. Upsal.). Upsaliae. MDCCCXLV. 4.

Doctrinae serierum infinitarum exercitationes. Auctore Mag. Em. Gabr. Björling, ad Reg. Acad. Upsal. Math. Doc., ad Reg. Gymn. Aros. Math. Lect. design. Pars Ima. (Ex Actis Reg. Societ. Upsal.). Upsaliae. MDCCCXLVI. 4.

Die erste Abtheilung der ersten dieser beiden Abhandlungen ist im Literarischen Bericht Nro. XIX. S. 292. angezeigt worden. Die vorliegende zweite Abtheilung beschäftigt sich mit dem endlichen Integrale $h\Sigma f_x$, und führt die Ueberschrift: De Integrali $h\Sigma f_x$ secundum dignitates ipsius h crescentes explicando. Der Herr Verfasser gelangt zu einer grossen Anzahl bemerkenswerther Relationen, auch zwischen den Bernoulli'schen Zahlen, und schliesst sich ganz den neueren Ansichten in der Analysis an, so dass diese Abhandlung auch für die allgemeine Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihe nicht ohne Ausbeute geblieben ist. Da in den Lehrbüchern der Analysis gewöhnlich die nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihen für $\frac{1}{2}x\cot\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}x\tang\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}x\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x$ nicht entwickelt werden, —in den, älteren Ansichten folgenden Schriften wohl der Weitläufigkeit der Entwickelung wegen; in den, neueren Ansichten huldigenden Werken wohl hauptsächlich deshalb, weil es nicht leicht ist, die Bedingungen der Convergenz dieser Reihen anzugeben —, so verdient der Anhang zu dieser Abhandlung, in welchem der Herr Verfasser diese Reihen auf eigenthümliche Weise entwickelt und die Bedingungen ihrer Convergenz und Divergenz gehörig festzustellen gesucht hat, auch noch besondere Beachtung, wobei wir nur wünschen möchten, dass derselbe seine Aufmerksamkeit auch der Reihe für die Secante, welche sich bekanntlich durch die Bernoulli'schen Zahlen nicht ausdrücken lässt, zugewandt hätte.

Die zweite Abhandlung führt die Ueberschrift: Nota in Theorema Binomiale. Was der Herr Verfasser in derselben zu leisten beabsichtigt, geben wir absichtlich im Folgenden mit seinen eigenen Worten an:

„Satis superque cognitum est, aequationem illam

$$(1) \ldots \quad (1+x)^y = 1 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + \ldots$$

veram esse y reali qualibet atque x quantitate qualibet (reali aeque ac imaginaria) modulo <1 praedita. Nec latet, haud modica Analysi contigisse emolumenta ex positione illa

$$x = u\,(\mathrm{Cos}\,w + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,w)$$

in hac aequatione (I). — *)

Quae cum ita sint, non satis queo mirari quid sit quod nusquam — quod nos quidem sciamus — veritas hujusce aequationis (I) in genere (h. e. y ipsa quantitate qualibet, reali aeque ac imaginaria) rite fuerit probata atque emolumenta, quae inde Analysi contingant, exposita. Nobis est propositum hoc loco probare, aequationem de qua quaeritur veram esse omnibus

$$x = u\,(\mathrm{Cos}\,w + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,w),$$
$$y = a\,(\mathrm{Cos}\,b + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,b),$$

u, w, a et b reales denotantibus quantitates, dummodo u numerice < 1 sit; quo facto breviter quae inde Analysi s. d. inferiori et quidem nominatim doctrinae serierum infinitarum proficiscantur emolumenta investigabimus."

Man sieht also, dass der Herr Verfasser das Binomialtheorem, welches bisher immer auf reelle Exponenten eingeschränkt worden ist **), ganz im Geiste der neueren Analysis auch auf imaginäre Exponenten zu erweitern sucht, was jedenfalls nicht unwichtig ist. Wir hoffen, für jetzt uns mit dieser kurzen Anzeige begnügend, späterhin ausfürlicher auf diese Abhandlung zurückzukommen, und empfehlen beide Abhandlungen nochmals der Aufmerksamkeit der Liebhaber der neueren Analysis recht sehr, können auch nicht unterlassen, unsere Freude darüber auszusprechen, dass die in derselben herrschenden strengen Ansichten sich, wofür diese Abhandlungen und frühere Arbeiten des Herrn Dr. Björling den Beweis liefern, nach und nach doch immer allgemeinere Geltung verschaffen. Möge sich nur hierin Deutschland nicht von seinen nordischen Nachbarländern, wie es fast einigermassen den Anschein hat, überflügeln lassen!

Loriais: essai sur les fonctions elliptiques. 4. Paris.

Arithmetiska Konststyken. 12. Stockholm. 1846. 8 sk.

Geometrie.

Die Planimetrie und Stereometrie für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von Carl Koppe, Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Zweite umgearbeitete und durch zahlreiche Aufgaben vermehrte Auflage. Mit 6 Figurentafeln. (Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet

---

*) Ich glaube hierbei die mit den Fortschritten der neueren Analysis noch weniger vertrauten Leser des Archivs auf meine in diesem Hefte befindliche Abhandlung Nro. XXV. verweisen zu dürfen. G.

**) M. s. die vorher angeführte Abhandlung. G.

von Carl Koppe u. s. w. Zweiter Theil. Planimetrie und Stereometrie. Zweite Auflage.) Essen 1846. 8. 27 Sgr.

Euclidis femte och sjette Böcker med förändringar af E. G. Björling, Phil. Mag. Mathes. Doc. vid Ups. Akad. Andra Upplagan af „Allmän Proportionslära“ af samma författare. Upsala. 1845. 8.

Da es gegenwärtig zu einem Lieblingsthema einer gewissen Klasse von Schriftstellern in Deutschland gehört, die Euklidische Methode rücksichtlich ihres Gebrauchs beim geometrischen Unterrichte herabzusetzen, und statt derselben einer andern Methode, die schon an mehreren Stellen des Archivs *) etwas näher bezeichnet worden ist, Geltung zu verschaffen zu suchen, so scheint es zweckmässig, wenn auch durch die blosse Nennung des Titels von Schriften wie die obige nachzuweisen, dass dies in vielen andern Ländern keineswegs eben so wie bei uns der Fall ist, sondern dass vielmehr, wie u. A. auch schon im Literarischen Berichte Nro. XXVIII. S. 416. bemerkt worden ist, namentlich in England, Holland, Schweden, u. s. w., wo es immer viele besonders durch ihre Gründlichkeit ausgezeichnete Mathematiker gegeben hat und jetzt mehr als sonst giebt, der geometrische Unterricht, besonders auf Schulen — und zwar nach unserer Ueberzeugung mit vollem Rechte und wesentlichem Vortheile für das Gedeihen dieses so wichtigen Unterrichtszweiges überhaupt, und dessen Wirkung auf die tüchtige Ausbildung des jugendlichen Geistes — immer vorzugsweise, man kann wohl sagen, allein in Euklidischer Weise ertheilt wird. Für wie wichtig dies auch für das Studium der sogenannten höheren Mathematik nach den jetzt sich immer mehr und mehr Geltung verschaffenden, im Verhältniss zu der älteren Darstellungsweise durch eine viel grössere Strenge und wahre mathematische Evidenz sich auf das Vortheilhafteste auszeichnenden Ansichten erkannt werden muss, ist nur erst in dem vorliegenden Hefte des Archivs S. 303. besonders hervorgehoben worden.

Ueber die Schrift selbst genügt es zu bemerken, dass dieselbe ganz mit Euklidischer Strenge verfasst ist.

Erstes Buch der Stereometrie. Nicht allseitig begränzte Raumformen. Vom Oberlehrer Dr. Hincke. (Programm des Domgymnasiums zu Halberstadt von Ostern 1846.) 4.

In dem Vorworte sagt der Herr Verfasser: es sei eine auffallende Erscheinung, dass fast alle Mathematiker nicht nach einem Lehrbuche, wenn es nicht von ihnen selbst verfasst sei, unterrichten wollten und dass dieselben an jedem Lehrbuche Etwas zu tadeln fänden; findet mit Herrn Schulrath Dr. Uhde zu Braunschweig die Ursache dieses Umstandes darin, dass die mathematischen Lehrbücher noch nicht von der Art seien, dass alle Mathematiker nach einem derselben mit Erfolg unterrichten könnten,

---

*) Z. B. Literarischer Bericht. Nro. II. S. 29. und Nro. XXVIII S. 416.

und will nun durch die vorliegende Bearbeitung eines Abschnitts der Stereometrie als an einem Beispiele zeigen, wie ein mathematisches Lehrbuch beschaffen sein müsste, um neben der strengen Begründung der einzelnen Sätze ein organisches Ganze zu geben, so dass jeder Satz an seiner Stelle stehen muss und nirgend ein Satz fehlt.

Wir finden die Ursache des erwähnten Umstandes, mit dem es allerdings bis zu einem gewissen Grade seine Richtigkeit hat, keineswegs mit den genannten Herren in der Beschaffenheit unserer Lehrbücher, sondern in der Wissenschaft selbst, namentlich in der ungemeinen Bildungsfähigkeit derselben, und darin, dass eigentlich ein Jeder die ganze Wissenschaft ohne alle Hülfe eines Lehrbuchs aus sich selbst zu entwickeln im Stande ist, wobei wir ja nur z. B. an Pascal zu erinnern brauchen, von welchem erzählt wird, dass er in einem Alter von eilf Jahren, nachdem er aus Gesprächen, die bei seinem Vater gehalten wurden, nur erst eine Ahnung von der Geometrie bekommen hatte, keine Ruhe mehr fand, bevor er weiter in diese Wissenschaft eingedrungen war. Während seiner Erholungstunden schloss er sich allein in eine abgelegene Kammer ein. Dort zeichnete er mit einer Kohle auf dem Fussboden Dreiecke, Parallelogramme, Kreise u. s. w., ohne die Namen dieser Figuren zu wissen; hernach untersuchte er die Lagen der Linien gegen einander, wenn sie zusammenstossen; er verglich die Ausdehnungen der Figuren u. s. w. Seine Schlüsse gründeten sich auf Definitionen und Axiome, die er sich selbst gemacht hatte. Nach und nach kam er dahin zu entdecken, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks durch einen Halbkreis gemessen werden, d. h. der Summe zweier rechten Winkel gleich sein muss, welches der 32ste Satz des 1sten Buchs des Euklides ist. Bei diesem Theorem war er, als er von seinem Vater überrascht ward, der, nachdem er den Gegenstand, den Fortgang und das Resultat seiner Forschungen erfahren hatte, einige Zeit vor Bewunderung und Rührung stumm und unbeweglich blieb; alsdann ganz ausser sich zu seinem vertrauten Freunde, le Pailleur, eilte, um ihm, was er gesehen, zu erzählen. Nun erst, nämlich in seinem zwölften Jahre, gab man ihm Euklids Elemente zu lesen, die er ganz allein verstand, ohne jemals einer Erläuterung zu bedürfen. — Mehr aber als der eilfjährige Pascal wird doch wohl ein Lehrer der Geometrie an einer höheren Unterrichtsanstalt einen inneren Trieb in sich spüren, die Wissenschaft aus sich selbst zu entwickeln, und gleichzeitig seine Schüler an dem darin liegenden unaussprechlich hohen Genuss Theil nehmen zu lassen; und eben diese Eigenthümlichkeit unserer Wissenschaft ist es auch, welche dieselbe als Bildungsmittel des jugendlichen Geistes über alle anderen Wissenschaften so sehr erhebt. Also — wir sagen es noch einmal — nicht in den Lehrbüchern, sondern in der Vortrefflichkeit der Wissenschaft an sich liegt einzig und allein der Grund der oben namhaft gemachten Erscheinung; und eben deshalb sind wir auch fest überzeugt, dass, so wie bisher von den Elementen des Euklides herab bis auf unsere Zeit keines unserer Lehrbücher, unter denen gewiss manche sehr gute sind, allgemeine Anerkennung gefunden hat, gewiss auch künftighin nie eines allgemeine Anerkennung finden, und dass niemals ein mathematisches System so allgemeinen Eingang gewinnen wird, wie

denselben z. B. in der Botanik das Linnésche System lange Zeit gefunden hat und zum Theil noch findet. Dieses Schicksal aller mathematischen Lehrbücher und Systeme wird aber aus den angegebenen Gründen gewiss auch die in dem vorliegenden Programme von dem Herrn Verfasser gelieferte Probe eines Normal-Lehrbuchs, der wir übrigens ein recht löbliches Streben nach Vollständigkeit und systematischer Anordnung keineswegs absprechen wollen, treffen, und die Fluth der mathematischen Lehrbücher wird unfehlbar immer mehr und mehr wachsen, weil es eben die Anregung, welche unsere Wissenschaft nothwendig auf den Geist ausübt, ist, welche wenigstens die besseren derselben hervorruft, und der Geist sich nun einmal nicht in Fesseln legen lässt.

Saint-Venant: tableau de formules de la théorie des courbes dans l'éspace. 4. Paris.

Astronomie.

Ueber das Verhältniss der Astronomie zu den andern Wisssenschaften Eine Vorlesung in dem wissenschaftlichen Vereine zu Berlin am 28. Februar 1846 gehalten von J. F. Encke, Director der königl. Sternwarte. Berlin. 1846. 8. 7 Sgr. 6 Pf.

Ein Jeder wird diese ihrem Zwecke vollkommen entsprechende Schrift mit Vergnügen und Belehrung lesen.

Pontécoulant: théorie analytique du systéme du monde. Tome IV. 8. Paris.

Grundriss der mathematischen Geographie. Für höhere Lehranstalten entworfen und mit einer Anleitung, die Sternbilder des nördlichen Himmels aufzufinden versehen von Aug. Wiegand, Doctor der Philosophie und Oberlehrer an der Realschule in den Franckeschen Stiftungen zu Halle. Mit eingedruckten Holzschnitten. Halle. 1846. 8. 10 Sgr.

Es ist allerdings sehr zu wünschen, dass der mathematischen Geographie in Verbindung mit den Hauptlehren der Astronomie auf höheren Unterrichtsanstalten besondere Lehrstunden gewidmet und dieselbe wirklich in deren Lehrplan aufgenommen werde. Denn lächerlich ist es in der That, was für verdrehte Begriffe über diese jeden nur einigermassen Gebildeten so nahe liegenden Dinge man sich oft selbst bei Männern der Wissenschaft kund geben sieht, so wie uns z. B. ein Fall noch sehr wohl erinnerlich ist, wo ein der Natur überhaupt gar nicht so fern stehender und sonst gebildeter und strebsamer Mann ganz ernstlich sein Befremden darüber äusserte, dass das Wasser, obgleich die Erde notorisch nahe die Gestalt einer Kugel habe, nicht von derselben herunterlaufe. Der Grund solcher groben Unwissenheit liegt aber nur in dem schlechten Schulunterrichte, welcher allein die Schuld

davon zu tragen hat, und die Schulen möchten doch ja immer mehr und mehr darauf hinarbeiten, die ihnen anvertrauten Schüler zuerst und vorzüglich über das gehörig aufzuklären, was sie überall, wo sie sich hinwenden, zunächst umgiebt und ihnen zuerst entgegen tritt; denn Jeder sollte sich doch wohl mehr schämen, wenn er nicht klar überschaut, wie und nach welchen Gesetzen die Sonne seine Tage erhellt und der Mond seine Nächte erleuchtet, als wenn er nicht immer die griechischen Accente richtig zu setzen versteht! Auch zweifeln wir keinen Augenblick, dass die Zeit gar nicht mehr so fern ist, wo man die Richtigkeit hiervon immer noch mehr als dies schon jetzt der Fall ist erkennen, wo die Zahl unserer Gymnasien und sogenannten Real- oder Bürgerschulen in das umgekehrte Verhältniss getreten sein wird, und wo auch die letzteren ihre Zöglinge mit dem Zeugniss der Reife zur Universität entlassen werden. Nun, wie dem auch sein möge, wir sind in Bezug auf das vorliegende Büchlein der Meinung, dass in demselben dem Unterrichte in der mathematischen Geographie ein zwar kurzer, im Ganzen aber zweckmässiger, die Hülfe der Lehren der sogenannten reinen Mathematik zwar sehr mässig in Anspruch nehmender, aber doch auch nicht ganz verachtender und selbst etwas mehr als in manchen anderen Büchern ähnlicher Art hervorhebender, überhaupt der Ausdehnung, welche man bei den jetzt noch obwaltenden Verhältnissen diesem Unterrichte zu geben sich erlauben dürfen möchte, entsprechender Leitfaden geboten wird. Druckfehler finden sich leider mehrere, was bei einem Schulbuche immer übel ist, so wie z. B. auf einer und derselben Seite (24): Elipsen, Radienrectoren, Kundstrop *); auf Seite 53. Guiseppe Piazzi statt Giuseppe Piazzi, u. s. w. Wenn das sehr graue Papier etwas besser wäre, so würden sich auch die zweckmässig in den Text eingedruckten sonst nicht ganz üblen Holzschnitte besser ausnehmen. Die angehängte, übrigens nur ganz kurze Anleitung zur Kenntniss der nördlichen Sternbilder hätte nach unserer Meinung ganz füglich wegbleiben können, da wir dergleichen astrognostische Beschäftigungen für den Schulunterricht nicht zweckmässig finden können, und deshalb eine allgemeine Andeutung, wie in der beobachtenden Astronomie und auf den Sternkarten die Sterne bezeichnet und von einander unterschieden werden, an diesem Orte für völlig genügend gehalten haben würden. Denn

---

*) Man findet den Namen des Geburtsorts Tycho's in verschiedenen Schriften auf sehr verschiedene Arten geschrieben. So schreiben z. B. Lalande (Astronomie. Seconde édition. T. I. p. 192.) und Bailly (Historie de l'Astronomie moderne. T. I. p. 378.) „Knudsturp", woraus Herr Professor Götz in seinen Elementen der Physik nach mathematischen Principien zum Gebrauche für höhere Schulen und Gymnasien. Leipzig. 1846. S. 549. gar „Kund-Strup" gemacht hat, und Herr Dr. Wiegand schreibt „Kundstrop". Ich bemerke daher bei dieser Gelegenheit, dass nach einer auf meine Anfrage von meinem aus Schweden gebürtigen Collegen, Herrn Professor Dr. Tillberg hierselbst, mir gemachten Mittheilung die allein richtige Schreibart des Namens „Knutstorp" ist, so wie ich mich denselben auch sonst wohl erinnere geschrieben gefunden zu haben, ohne jedoch in diesem Augenblicke mit Bestimmtheit den Ort angeben zu können.

G.

Schüler sollen keine Himmelsbeobachter werden, sondern nur richtige und klare Begriffe von dem bekommen, was täglich um sie herum vorgeht.

Anleitung zur Berechnung und graphischen Bestimmung der Sonnenfinsternisse und Mondfinsternisse für angehende Astronomen und Mathematiker. Mit zwei Figurentafeln und Tabellen zur angenäherten Berechnung der Zeit der in die drei Jahrhunderte 1700 bis 2000 fallenden Vollmonde, Neumonde und Finsternisse. Vom K. S. Artillerie-Oberst Leonhardi a. D., R. d. C. V. O. Leipzig. 1846. 4. 1 Rthlr. 10 Sgr.

Diese Schrift ist zwar ganz deutlich geschrieben, enthält aber lauter ganz bekannte Dinge in der aus den älteren astronomischen Lehrbüchern hinreichend bekannten Weise, ohne im Geringsten die grossen Bereicherungen, welche die Theorie der Finsternisse in neuerer Zeit durch Bessel, Hansen, Lehmann u. A. erhalten hat, zu berücksichtigen. Für blosse Liebhaber der Astronomie, welche, mit ganz elementaren mathematischen Kenntnissen ausgerüstet, zu ihrem Vergnügen oder auch zu ihrer Belehrung Finsternisse berechnen wollen und eine etwas ausführlichere Darstellung der Theorie wünschen, als ihnen die älteren Lehrbücher darbieten, mag daher diese Schrift ihren Nutzen haben; an angehende Astronomen und Mathematiker macht man aber doch gegenwärtig ganz andere Ansprüche als der Herr Verfasser zu glauben scheint, und diesen können wir nur rathen, gleich von vorn herein sich mit der Theorie der Finsternisse vom Standpunkte der analytischen Geometrie aus bekannt zu machen, wozu wir ihnen natürlich keinen besseren Leitstern als Bessels Analyse der Finsternisse in dessen Astronomischen Untersuchungen. Zweiter Band. Königsberg 1842. Nro. X. empfehlen können. Wenn der wahre Mathematiker solche auf einem ganz veralteten Standpunkte stehende, lauter ganz bekannte Dinge enthaltende und die neueren Forschungen völlig ignorirende Schriften wie die vorliegende betrachtet, so beschleicht denselben ein gewisses wehmüthiges Gefühl, weil er dadurch immer mehr und mehr die Ueberzeugung gewinnt, dass die wichtigsten neueren Eroberungen in den verschiedenen Theilen seiner Wissenschaft selbst unter Leuten seines Fachs sich immer noch einer verhältnissmässig nur sehr geringen Verbreitung erfreuen.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte prima. 1792—1802. Tomo primo. 1792—1795. Vienna. 1845. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien. Nach dem Befehle Sr. k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. v. Littrow, Director der Sternwarte und o. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w., und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 34ster Theil. Neuer Folge 4r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1792—1795. Wien 1845. 4.

In der Zeitschrift für Astronomie. Thl. IV. S. 477—478. sagt J. J. v. Littrow in einem Schreiben an die Herausgeber:

„Vor einiger Zeit versuchte ich einige Sterne, die nördlich vom Zenith durch den Meridian gehen, aber erstens sind ihre

nicht viele, dann scheint mir die Vergleichung mit Piazzi's neuem Cataloge nicht sicher genug für Sterne, die dem Pole nahe stehen und für die, wie mich dünkt, der sogenannte Motus proprius im Allgemeinen grösser ist, als für die anderen Gegenden des Himmels. Auch sind die Bestimmungen der eigenen Bewegungen dieser Sterne, die wir in den letzten Zeiten von den genauesten und geübtesten Astronomen erhalten haben, so verschieden, dass bei sehr vielen die Reduction auch nur für 20 Jahre schon auf zwei volle Secunden unsicher wird. So ist z. B.

Eigene Bewegung in Declination nach

	Pond.	Piazzi.	Differenz für 100 Jahr.
Capella	0″,358	0″,44	8″,2
Deneb	−0″,091	0″,00	9″,1
α gr. Bär	0″,084	0″,00	8″,4
γ Drache	0″,002	0″,07	6″,8

Schon aus diesem Grunde, und es vereinigen sich damit noch mehrere andere, wäre es wünschenswerth, dass die Astronomen, die uns vorzüglich gute Sternpositionen mitzutheilen im Stande sind, dieselben für die Tage der wirklichen Beobachtungen mittheilten, ohne Reduction auf eine oft viele Jahre entfernte Epoche. Wenn z. B. der Catalog Piazzi's nach diesem Vorschlage entworfen worden wäre, so würde sein Gebrauch zwar etwas weniger bequem, aber in einem viel grösseren Verhältniss sicher sein. Auch scheint es mir, dass die grössere Verlässlichkeit des neuen Catalogs über den alten sich nicht sowohl auf die besseren Beobachtungen, sondern auf die genaueren Reductionen gründet. Immer aber wäre es bei der gegenwärtigen Einrichtung dieses Catalogs äusserst wünschenswerth, die Originalbeobachtungen des vortrefflichen Palermer Astronomen zu besitzen, zu deren Abdrucke man uns von Mailand aus Hoffnung gemacht hat."

Diese Originalbeobachtungen des grossen Palermer Astronomen erhalten wir nun durch den Sohn und würdigen Nachfolger des trefflichen J. J. v. Littrow in dem obigen auf Kosten der k. k. österreichischen Regierung gedruckten Werke, dessen erster die Beobachtungen am Meridiankreise und am Passageninstrumente in den Jahren 1792—1795 enthaltender Theil uns jetzt vorliegt. In der so wie das ganze Werk italienisch geschriebenen Einleitung, die ausser einigen interessanten zwischen Piazzi und Oriani gewechselten Briefen auch ein Facsimile der Handschrift Piazzi's enthält, hat Herr Director C. L. v. Littrow sich weiter über sein jedenfalls höchst verdienstliches Unternehmen ausgesprochen, wie dies schon früher vorläufig in den Astronomischen Nachrichten. Nro. 532. geschehen war, und eine Reihe von Bemerkungen des Herrn Herausgebers und ein Register aller beobachteten Sterne sind beigefügt.

Da die Piazzischen Beobachtungen ihrer Vortrefflichkeit wegen bekanntlich so häufig bei der Vergleichung älterer und neuerer Beobachtungen der Fixsterne mit einander, z. B. bei Untersuchungen über deren eigene Bewegung, gebraucht werden, so kann der Herr Herausgeber gewiss auf den Dank aller Astronomen für seine verdienstliche und — wenn, wie hier geschehen ist, mit aller

Umsicht und Kritik verfahren wird — höchst mühsame Arbeit rechnen, da dieselben nun in den Stand gesetzt werden, auf die unmittelbaren Piazzischen Beobachtungen die durch die grossen neueren Fortschritte der Astronomie möglich gemachten scharfen Reductionen in Anwendung bringen zu können, und erst dadurch die Vergleichung derselben mit neueren Beobachtungen recht fruchtbar zu machen, und diesen Vergleichungen den Grad der Schärfe und Genauigkeit, welchen die neuere Astronomie mit Recht in Anspruch nimmt, vollkommen zu sichern, was, wenn man wie bisher nur auf die nach ungenaueren Elementen reducirten Beobachtungen zurückzugehen im Stande ist, natürlich bei Weitem nicht in demselben Maasse der Fall sein kann, und dass ein solcher Gebrauch von diesem Werke recht vielfach gemacht werden möge, ist sehr zu wünschen, kann aber auch bei dem alle Astronomen beseelenden Eifer für ihre Wissenschaft nicht bezweifelt werden. Die äussere Ausstattung des Werkes ist seinem Gehalte vollkommen entsprechend.

Kaiser, F.: Sterrekundig Jaarbock. gr. 8. Amsterdam 1846. 1 Fl.

Klint, B. G.: Lärobok i Navigations-Vetenskapen med tillhörande Nautiska och Logarithmetiska Tabeller och Trigonometrie. Andra uppl. 8. Stockholm.

Physik.

Grundriss der Physik und Meteorologie. Für Lyceen, Gymnasien, Gewerbe- und Realschulen, so wie zum Selbstunterrichte. Von Dr. Joh. Müller, Prof. der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau. Mit 541 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1846. 8. 2 Rthlr.

Dieser Grundriss der Physik ist ein bei dem physikalischen Unterrichte auf den auf dem Titel genannten Lehranstalten als Lehrbuch zu gebrauchender grösstentheils ganz wörtlicher Auszug aus desselben Herrn Verfassers in zwei Bänden erschienenen (2te Aufl. Braunschweig. 1844.) bekannten grösseren Werke, und auch die Holzschnitte sind mit geringen Abänderungen ganz aus diesem letzteren Werke entlehnt. Da nun die Darstellungsart des Herrn Verfassers aus dem grösseren Werke den Lesern des Archivs schon hinreichend bekannt sein wird, so brauchen wir über den vorliegenden Auszug hier nichts weiter zu sagen, als dass derselbe seinem Zwecke im Ganzen wohl entsprechen dürfte und nach unserer Meinung, namentlich in Bezug auf das Technische, was doch streng genommen nicht in die Physik als solche gehört, eher etwas zu viel als zu wenig giebt. Auf der anderen Seite könnte die Darstellung hin und wieder etwas mathematischer gehalten sein, wenigstens für solche Lehranstalten, wo der Lehrer der Physik auf eine gute mathematische Vorbildung seiner Schüler fussen kann, deren es doch gegenwärtig schon eine ziemlich grosse Anzahl giebt.

Eisenlohr: Elementar-Physik für Gymnasien. Carlsruhe. 1846. 1 Rthlr. 6 Sgr.

(Ist uns noch nicht zu Gesicht gekommen, wird aber später ausführlicher angezeigt werden.)

Drei Abhandlungen aus dem Gebiete der Wellen-Lehre nebst Anwendungen auf Akustik, Optik und Astronomie. Von Christian Doppler, o. ö. Professor der Mathematik und praktischen Geometrie, und ordentlichem Mitgliede der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. (Aus den Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. V. Folge Band 4. besonders abgedruckt.) Prag. 1846. 4. 20 Sgr.

Die Titel dieser drei Abhandlungen sind folgende: 1. Methode, die Geschwindigkeit, mit der die Luftmolekel beim Schall schwingen, zu bestimmen. 2. Ueber eine vom Zerstreuungsvermögen des Fortpflanzungsmittels völlig unabhängige rotatorische Dispersion des Lichtes, nebst gelegentlichen Bemerkungen zur rotatorischen Bewegung. 3. Ueber eine Vorrichtung, mittels deren sich jede noch so geringe Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bahn wahrnehmen und messen lässt, nebst Hinweisung auf solche Fälle, wo eine derartige Ablenkung vielleicht Statt haben dürfte.

Es ist leider nicht möglich, an diesem Orte näher auf den Inhalt dieser von dem schon durch mehrere frühere Arbeiten bekannten Scharfsinne des Herrn Verfassers ein neues Zeugniss ablegenden Abhandlungen einzugehen; wir können aber die Leser des Archivs versichern, dass ihnen dieselben eine interessante und anregende Lectüre gewähren werden, und bemerken nur noch, dass in der ersten Abhandlung von dem Herrn Verfasser eine sinnreiche Anwendung von der durch die Locomotiven auf Eisenbahnen dargebotenen schnellen Bewegung zur Bestimmung der auf dem Titel angegebenen Geschwindigkeit gemacht worden ist.

Beaumont Brivazar: élémens de l'éctro-magnetisme animal. 8. Grenoble.

Brown, W.: a treatise on the oscillations of the Barometer. 1842. 2 s.

Guillemeau: météorologie élémentaire. 8.

Nouveaux appareils contre les dangers de la foudre par M. C. R. 8. Paris.

Vermischte Schriften.

The Cambrige and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peters College. Cambridge. (S. Nro. XXIX. S. 443.)

Nro. IV. On Symbolical Geometry. Continued. By Sir W. R. Hamilton. — On the Integration of Certain Differential Equations. By Rev. Brice Bronwin. — On the Theory of Magic Squares, Cubes,

etc. By R. Moon. — On the Geometrical Representation of the Motion of a Solid Body. By Arthur Cayley. — On the Rotation of a Solid Body round a Fixed Point. By Arthur Cayley. — On the Laws of Equilibrium and Motion of Solid and Fluid Bodies. By Samuel Haughton. — On a Formula for Determining the Optical Constants of Doubly Refracting Crystals. By G. G. Stockes. — Sur la représentation géometrique des fonctions elliptiques de première espèce. Par J. Alfred Serret. — On the Principal Axes of a Solid Body. By W. Thomson. — Note on a Geometrical Theorem contained in the preceding Paper. By Arthur Cayley. — (Nro. V. will be published on the 1st of November.)

Göttinger Studien. 1845. Göttingen. 8. 4 Rthlr.

Die erste Abtheilung dieses Werks enthält mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen, unter denen wir die Leser des Archivs nur auf die folgenden aufmerksam machen.

I. Combinatorische Bemerkungen von M. A. Stern. Es giebt bekanntlich eine grössere Anzahl der Combinationslehre angehörender Sätze, welche nicht auf rein combinatorischem Wege, sondern durch Vergleichung der zu einerlei Potenz von x gehörenden Coefficienten zweier nach den Potenzen der Grösse x fortschreitender, der Form nach verschiedener, dem Werthe nach identischer Reihen mit einander bewiesen zu werden pflegen, in welcher Beziehung wir z. B. bloss an das Kapitel de partitione numerorum in der Introductio in Analysin infinitorum zu erinnern brauchen. Da nun ein solches Verfahren, wenn auch allerdings zuweilen oft sehr elegant, doch gewiss dem eigentlichen Wesen der Wissenschaft in keiner Weise entspricht, so hat der Herr Verfasser des vorliegenden sehr lesenswerthen Aufsatzes in demselben dergleichen Sätze aus rein combinatorischen Begriffen abzuleiten und unmittelbar aus dem Wesen der Combinationen abzuleiten gesucht, was jedenfalls von den Liebhabern der combinatorischen Analysis beachtet zu werden verdient.

Eben so beachtenswerth in anderer Rücksicht sind die folgenden physikalischen Abhandlungen:

II. Untersuchungen über die magnetische Declination in Göttingen; von Professor Dr. B. Goldschmidt.

III. Beitrag zur physiologischen Optik; von Professor Dr. J. B. Listing.

IV. Das Ophthalmotrop, dessen Bau und Gebrauch; von Professor Dr. C. G. Th. Ruete.

Ophthalmotrop nennt der Herr Verfasser ein Instrument, welches bestimmt ist, die Functionen der verschiedenen Muskeln des Auges und auch viele optische Erscheinungen zu demonstriren, und um der Phantasie und dem Gedächtnisse bei der Auffassung dieser schwer zu durchschauenden Verhältnisse zu Hülfe zu kommen.

V. Ueber das Gesetz, nach welchem die Mischung von Flüssigkeiten und ihr Eindringen in permeable Substanzen erfolgt, mit besonderer Rücksicht auf die Vorgänge im menschlichen und thierischen Organismus; von Professor Dr. J. Vogel.

XXXII.

Literarischer Bericht.

(Wegen der grösseren Anzahl ausführlicher anzuzeigender Werke hat die ausländische Literatur diesmal grösstentheils wegbleiben müssen, wird aber im nächsten Literarischen Berichte nachgeholt werden.)

Geschichte der Mathematik und Physik.

Erinnerung an Bessel's Leben und Wirken. Von Dr. Anger, Professor in Danzig. Danzig. 8. 6 Sgr.

Der Herr Vf. hat uns in dieser Skizze ein sehr lebensvolles Bild des grossen Astronomen, welchen der Titel nennt, geliefert, an dem sich ein Jeder erfreuen und erwärmen wird, wozu wohl auch kaum Jemand besser als Herr Professor **Anger**, welcher mit Bessel viele Jahre in der engsten amtlichen Verbindung gestanden hat, befähigt war. Möge daher die ansprechende kleine Schrift, in der übrigens, wie sich von selbst versteht, keineswegs eine erschöpfende Darstellung der **wissenschaftlichen** Verdienste Bessels beabsichtigt wurde, recht viele Leser finden.

Friedrich Wilhelm Bessel wurde am 22sten Juli 1784 n Preussisch-Minden, woselbst sein Vater Regierungs-Secretair mit dem Titel eines Justizraths war, geboren. In seinem 15ten Jahre kam er nach Bremen, um daselbst bei A. G. Kulenkamp und Söhne die Handlung zu erlernen, widmete sich aber bald aus Neigung ganz der Astronomie und kam im Jahre 1805 an Hardings Stelle zu Schröter nach Lilienthal. Im Jahre 1810 wurde er als ordentlicher Professor nach Königsberg berufen, wo er bis an seinen am 17ten März 1846 Abends um $6\frac{1}{2}$ Uhr erfolgten Tod so Grosses für die Wissenschaft wirkte. Ein schwammartiges Gewächs im Innern des Unterleibes hatte durch seinen mechanischen ck auf die innern Theile alle Functionen des Körpers gestört, s Leben unmöglich war. Er hinterlässt eine

trauernde Gattin, Tochter des Medicinalraths und Professors Hagen in Königsberg, und zwei Töchter, von denen die ältere an den Professor Herrn Adolph Erman in Berlin, die jüngere an den Consul Herrn Lorck in Königsberg verheirathet ist. Ein hoffnungsvoller Sohn, der sich in Berlin dem Baufach widmete, war ihm dort schon im Jahre 1840 vorangegangen, welcher Schlag ihn vorzüglich hart getroffen und seine Lebenskraft gelähmt hatte.

Historia et origo calculi differentialis a G. G. Leibnitio conscripta. Zur zweiten Säcularfeier des Leibnizischen Geburtstags aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Dr. C. J. Gerhardt. Hannover. 1846. 8. 10 Sgr.

Durch die Herausgabe dieser bis jetzt noch ungedruckten Abhandlung Leibnizens aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover hat sich Herr Doctor Gerhardt jedenfalls ein sehr anerkennungswerthes wesentliches Verdienst um die Geschichte der Mathematik erworben. Leibniz schrieb dieselbe, da er zu der Herausgabe seines versprochenen Commercium epistolicum nicht mehr die nöthige Musse zu finden hoffen konnte, kurz vor seinem am 14ten November 1716 erfolgten Tode lediglich um seine Rechte auf die Erfindung der Differentialrechnung wahrzunehmen, so dass dieselbe also natürlich als ein sehr wichtiges Actenstück für die Geschichte dieser Wissenschaft zu betrachten ist, welches von keinem Geschichtsschreiber der Mathematik fernerhin wird unberücksichtigt gelassen werden dürfen. Es sind zwei Entwürfe dieser Abhandlung vorhanden, von denen der Herr Herausgeber dem durch den grösseren Umfang und die sorgfältigere Ueberarbeitung sich sogleich als den späteren zu erkennen gebenden gefolgt ist. Die von dem Herrn Herausgeber in ziemlich grosser Anzahl beigefügten historischen Anmerkungen werden für diejenigen, welche die Geschichte der Mathematik weniger genau kennen, das Verständniss der Abhandlung wesentlich erleichtern.

Ausserdem sind noch zwei bisher ungedruckte Abhandlungen Leibnizens beigefügt. Die erste ist ein früherer Entwurf zur Bekanntmachung der Differentialrechnung, worin sich der grosse Mann deutlicher über das Princip seiner neuen Rechnung ausspricht, als es in der von ihm später zum Druck beförderten geschah, und zugleich zeigt, wie tief er schon damals in das Gebiet der höheren Analysis eingedrungen war. Die zweite macht insofern auf Beachtung Anspruch, als Leibniz darin einen Versuch gemacht hat, von den Rechnungsregeln der Differentialrechnung Beweise zu geben, indem er bekanntlich sowohl von seinen Zeitgenossen, als von der Nachwelt, öfters getadelt worden ist, dass er die Beweise schuldig geblieben sei.

Auch die Mittheilung dieser beiden Abhandlungen ist sehr dankenswerth.

Leibniz-Album aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Dr. C. L. Grotefend. Hannover. 1846. Fol. 2 Rthlr.

Dieser Schrift wird hier deshalb Erwähnung gethan, weil sie

manche in mathematischer und physikalischer Hinsicht interessante Notizen enthält. Es ist in derselben ein Bruchstück aus Leibnizens Tagebuche mitgetheilt, in welchem der grosse Mann auch von seinen mathematischen Ideen und Bestrebungen manche Nachricht ertheilt. Vorzüglich interessant ist aber auch ein Schreiben Leibnizens an den Herzog Johann Friedrich von Hannover, in welchem er demselben von seinen verschiedenen Entdeckungen und Erfindungen Nachricht giebt, und in dem u. A. folgende Stelle vorkommt: „In Opticis habe ich entdecket erstlich 1) ein gewisses Genus Tuborum oder Lentium, so ich Pandochas nenne, dieweil sie das ganze objectum uniformiter fassen, und nicht weniger die Strahlen extra axem opticum als in axe optico distincte colligiren, wodurch dasjenige, was man bis hehr vergebens gesucht, zu wege gebracht wird, wie nehmlich den vitris objectivis eine so grosse apertura gegeben werde, als wir wollen, umb der strahlen desto mehr damit zu fassen. 2) Tubos Cata-dioptricos, da in einem tubo Spiegel und Perspectiv mit einander conjungirt, und dadurch viel sonst unvermeidlich drauff gehende Strahlen, zum wenigsten noch einst so viel als iezo möglich, erhalten werden*). 3) Ein Mittel, so bisher vergeblich gesucht worden, mit Perspectiven aus einem Stand zu messen, ich höhre das dergleichen auch andere tentirt, welcher gestalt aber, habe noch von keinem Menschen verstanden, und dahehr per artem Combinatoriam gefunden**).

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern Nr. 54, 55, 56 hat Herr R. Wolf mehrfaches Interesse darbietende Notizen zur Geschichte der Mathematik in der Schweiz, z. B. auch über den bekannten Herausgeber und Commentator Euklids Conrad Dasypodius, geb. 1531, gest. den 26. April 1600, gegeben; und in Nr. 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67 seine verdienstlichen Auszüge aus Briefen an Albrecht von Haller, mit literarisch-historischen Notizen (m. vergl. Literar. Ber. Nr. XXVIII. S. 411.) fortgesetzt. Auch giebt derselbe in Nr. 59. und 60. S. 31. einige Bemerkungen zur Geschichte der Quadratur des Kreises.

Arithmetik.

Kurze Anleitung zur Algebra für Gymnasien und zum Privatgebrauche, von Fr. Jos. Herrmann. Mit einer Kupfertafel. Darmstadt und Leipzig. 1846. 8. 1 Rthlr.

Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeu-

---

*) Dies wäre also das Spiegelteleskop.

**) Dies wäre also ein Distanzmesser, s. Archiv. Thl. VIII. Heft 3. S. 250 und 254.

tung der imaginären Zahlen, von H. Scheffler. Mit 80 in den Text gedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1846. 8. 2 Rthlr. 10 Sgr.

Der eigentliche Zweck dieses 428 Seiten starken Buchs ist durch den zweiten Theil seines Titels hinreichend bezeichnet. Es beschäftigt sich vorzugsweise mit der weiteren Aufklärung der auch in diesem Archive schon mehrfach besprochenen neueren Ansichten über das Imaginäre in der Mathematik, wobei es nur auffallen muss, dass der Herr Verfasser durchaus alles, was bisher über diesen Gegenstand bekannt gemacht worden ist, völlig ignorirt, selbst nicht einmal die von Gauss gegebenen Andeutungen genau zu kennen scheint, weshalb wir uns ihn in dieser letzteren Beziehung auf Archiv. Thl. VI. S. 236., und mehrere andere in dieser Zeitschrift abgedruckte Aufsätze, namentlich auf die verdienstlichen Arbeiten des Herrn Dr. Wittstein in Hannover zu verweisen erlauben, die, so wie ein Aufsatz des Majors Dr. G. W. Müller ebendaselbst, sämmtlich im Archive leicht aufzufinden sind, hier aber nicht einzeln namhaft gemacht werden können. Uebrigens enthält das Buch sehr viel Ueberflüssiges, lauter bekannte Dinge, fast eine ganze Darstellung der Arithmetik, die Exponentialreihe, die logarithmischen und trigonometrischen Reihen, den binomischen Lehrsatz u. s. w., ohne alle strenge Berücksichtigung der Convergenz und Divergenz. Dass auf diese Weise der Sache nicht eben genützt wird, ist klar, weil es bei einer neuen Lehre, die namentlich wie die hier besprochene vielen noch völlig ungewohnt ist, wenn dieselbe allgemeineren Eingang finden soll, hauptsächlich darauf ankommt, dieselbe unter möglichst einfacher Form, selbstständig und unabhängig von vielen anderen Lehren darzustellen. Soll man sich aber das eigentlich Neue unter vielen andern bekannten Dingen mühsam heraussuchen, so wird man den Geschmack an demselben immer eher verlieren als gewinnen. Aus diesem Grunde scheinen uns auch die oben namhaft gemachten kurzen Aufsätze zur weiteren Aufklärung dieses Gegenstandes vorzüglich geeignet zu sein.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, zum Theil in neuer Anordnung, durch Zusätze erweitert und mit ausführlichen Erläuterungen versehen von Dr. E. F. August, Professor und Director des Cölnischen Real-Gymnasiums in Berlin u. s. w. Berlin. 1846. Klein Octav. 15 Sgr.

Wir wollen zuerst den Inhalt dieser neuen Tafeln vollständig angeben: I. Logarithmentafel, enthaltend *a)* die gemeinen (Briggschen) Logarithmen von 1 bis 1000 vollständig mit Charakteristik und fünfstelliger Mantisse; *b)* die fünfziffrigen Mantissen für alle vierziffrige Zahlen von 1000 bis 9999; *c)* Modulus, Grundzahl, Formeln und mehrere zwölfstellige Logarithmen des natürlichen Systems. — II. Abgekürzte siebenziffrige Logarithmentafel, durch welche alle Rechnungen mittelst einer kleinen Nebenrechnung ausgeführt werden können, zu denen die grösseren siebenstelligen Logarithmentafeln erforderlich sind. Multiplicationstafeln, um die natürlichen Logarithmen in gemeine zu verwanden und umgekehrt. — III. Die Gauss'schen Tafeln zur Auffindung des Logarithmus einer Summe oder Differenz in einer neuen, den

Gebrauch erleichternden Anordnung. Regel für die Anwendung dieser Tafeln. — IV. Tafel der vierstelligen Quadrate aller Zahlen zwischen 0,000 und 2,1000. Tafeln zur Verwandlung der Kreisbogen in Theile des Halbmessers und umgekehrt. — V. Trigonometrische Tafel: 1) Siebenziffrige Werthe der trigonometrischen Functionen für ganze Grade. 2) Hülfstafel für Berechnung der Logarithmen zu den trigonometrischen Functionen kleiner Winkel. 3) Fünfstellige Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute. Siebenstellige Sinus und Cosinus für Minuten des ersten Grades. VI. Tafeln zur Auffindung der Factoren für die ganzen Zahlen 0 bis 10000. Formeln zur logarithmisch-trigonometrischen Lösung quadratischer und cubischer Gleichungen. — Kurze Erläuterungen zu den vorstehenden Tafeln.

Nach dieser vollständigen Angabe des Inhalts heben wir nun einige Eigenthümlichkeiten hervor, durch welche sich diese Tafeln von andern, namentlich von den in Schulen meistens noch gebrauchten Vega'schen Tafeln unterscheiden. Die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen sind fünfstellig, was bei Weitem für die meisten Rechnungen vollständig ausreicht, wie in neuerer Zeit schon so oft hervorgehoben worden ist, dass darüber hier nichts weiter gesagt zu werden braucht. Insbesondere aber scheint uns diese Einrichtung für Schulen besser und bequemer als die ältere, weil es ja bei dem Unterrichte in denselben hauptsächlich und zunächst bloss auf eine Uebung in dem Gebrauche der Tafeln ankommt, weshalb es gewiss sehr wünschenswerth ist, dass der Gebrauch bloss fünfstelliger Logarithmen in den Schulen immer mehr Eingang finde als dies bis jetzt der Fall ist. Durch Hinzufügung der Hülfstafel zur Auffindung siebenziffriger Logarithmen mittelst einer kleinen Nebenrechnung ist in der vorliegenden Sammlung übrigens auch für diejenigen wenigen Rechnungen auf sehr zweckmässige Weise gesorgt, welche eine solche Genauigkeit in der Anwendung der Logarithmen erfordern. — Die Anordnung der Tafeln der trigonometrischen Functionen ist insofern von der gewöhnlichen verschieden, dass auf die Sinus deren Differenzen, dann die Tangenten, hierauf die gemeinschaftlichen Differenzen der Tangenten und Cotangenten, nun die Cotangenten, hierauf die Differenzen der Cosinus und endlich die Cosinus selbst folgen, so dass also die Differenzen der Sinus und Tangenten rechts von denselben, die Differenzen der Cosinus und Cotangenten links von diesen Functionen stehen. Diese nach unserer Meinung zweckmässige und empfehlenswerthe Einrichtung hat ihren Grund darin, dass jetzt bei dem Fortschreiten von oben nach unten alle additiv zu nehmenden Differenzen rechts, alle subtractiv zu nehmenden links stehen*), was jedenfalls ein sehr zweckmässiges Erinnerungsmittel für den Schüler ist. Dieselbe Einrichtung findet sich auch in den kleinen Lalande'schen Tafeln und wird von Littrow in dem Artikel Tabellen in der neuen Ausgabe des Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs. Thl. IX. Abthl. 1. S. 7. als eine unnöthige Neuerung getadelt, indem Littrow hin-

*) Bei dem Fortschreiten von unten nach oben ist es natürlich entgegengesetzt.

zufügt: „Mit welchem Grunde hat man sie" (nämlich die Sinus und Cosinus) „doch getrennt und dadurch allein schon zu einer Menge von Missgriffen Veranlassung gegeben." Aus dem vorher angegebenen Grunde kann ich diese Meinung in dem vorliegenden Falle nicht theilen, und kann auch hinzufügen, dass in den trefflichen und sehr seltenen Tafeln von Sherwin (Sherwin's Mathematical Tables etc. The third edition. Carefully revised and corrected by William Gardiner. London. 1742., welches die correcteste und seltenste Ausgabe dieser trefflichen Tafeln ist, da im Gegentheil z. B. die fünfte Ausgabe vom Jahre 1770 sehr fehlerhaft gedruckt sein soll) die von August angewandte Einrichtung auch schon gebraucht ist. Eben so findet sich diese Einrichtung in neueren Tafeln, z. B. wenigstens bei den natürlichen Linien in den, wie es mir scheint mit Unrecht, weniger bekannt gewordenen Tafeln von J. Hantschl (Wien. 1833.) und ganz wie in den vorliegenden Tafeln in den der trefflichen von Rümker besorgten vierten Ausgabe des Hamburger Lehrbuchs der Schiffahrtskunde (Hamburg. 1844.) angehängten Tafeln. In den prächtigen, im eigentlichen Sinne unverwüstlichen, von Littrow als Beispiel angeführten Tafeln von Gardiner (Tables of Logarithms for all Numbers from 1 to 102100 and for the Sines and Tangents to every ten seconds of each degree in the Quadrant; as also, for the Sines of the first 72 minutes to every single second. By William Gardiner. Lond. 1742. Klein Folio*), welche ich, so wie die obigen Sherwin'schen Tafeln, in der ziemlich reichen Sammlung von Tafeln, die ich mir aus einer gewissen Liebhaberei für diese Dinge nach und nach angeschafft habe, auch besitze, findet sich die besprochene Einrichtung freilich nicht, sondern die z. B. in den Vega'schen und andern Tafeln gebrauchte, was aber noch kein Beweis für die Unzweckmässigkeit der ersteren sein kann. — Der Gauss'schen Tafel, welche bekanntlich nach der gewöhnlichen auch von Matthiesen in seiner grossen Tafel (Tafel zur bequemeren Berechnung des Logarithmen der Summe

---

*) Kästner, der bekanntlich ein grosser Bücherliebhaber war, sagt in den Astronomischen Abhandlungen. Thl. II. S. 18. (indem er übrigens, was hierbei gelegentlich erinnert zu werden verdient, die oben angeführten Sherwin'schen von Gardiner neu herausgegebenen Tafeln und die eigentlichen Gardiner'schen Tafeln ganz fälschlich für verschiedene Ausgaben eines und desselben Buchs hält): „Dieser zweifachen Ausgabe ohngeachtet, sind diese Tafeln ungemein selten. Ich weiss nicht, ob einer der Schriftsteller de libris rarioribus das angemerkt hat, aber diesen Schriftstellern ist gewöhnlichermassen die Seltenheit mathematischer Bücher am wenigsten wichtig. Herr Joh. Bernoulli hat sie für das Königl. Observatorium zu Berlin in London mit 4 Guineen bezahlt (Recueil pour les Astronomes. T. II. p. 314.). Das Exemplar, das ich vor mir habe, gehört auf die hiesige Universitätsbibliothek. Ich selbst habe diese Tafeln nie bekommen können, ohngeachtet ich allemal zu dem Preise, den sie hätten, bereit war. Und weil ich den Eigensinn habe, dass ich Bücher, die ich stark brauchen soll, selbst besitzen muss, so habe ich mich des nur angezeigten Exemplars nicht so bedient, wie es mir frei gestanden hätte, sondern mich mit den Tafeln, die mein eigen waren, beholfen."

oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Altona. 1817.) drei mit *A*, *B*, *C* bezeichnete Spalten enthält, hat der Herr Verfasser eine andere Einrichtung gegeben, welche wir hier der Kürze wegen nicht weiter beschreiben können, die aber, wie es uns scheint, allerdings bei Ungeübteren weniger Irrungen zulässt als die Berücksichtigung der drei Spalten, und deshalb wohl empfohlen zu werden verdient.

Die Erläuterungen des Gebrauchs der Tafeln sind sehr vollständig und lassen, so weit wir dieselben bis jetzt kennen gelernt haben, nichts zu wünschen übrig. Streng genommen müssen dieselben als ein kleines Lehrbuch der Logarithmentheorie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie betrachtet werden, indem alle Hauptformeln vollständig entwickelt worden sind, und bei den Logarithmen auch die betreffenden unendlichen Reihen Berücksichtigung gefunden haben. Unter diesen Entwickelungen kommt auch manches dem Herrn Verfasser Eigenthümliche vor, z. B. eine recht nette, von der gewöhnlichen ganz verschiedene, auf einen Satz vom Viereck mit zwei parallelen und zwei gleichen Gegenseiten gestützte Entwickelung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, eine eigenthümliche Ableitung der Gaussischen Gleichungen aus den Cagnolischen, und manches Andere, was sich hier nicht Alles namhaft machen lässt.

Der Stereotypendruck und das Papier genügen allen billigen Anforderungen, und das Format ist so gewählt, dass man das Büchlein noch bequem genug in der Tasche bei sich führen kann.

Bei dem aus dem Obigen hervorgehenden reichen Inhalte, bei der Zweckmässigkeit der Anordnung, der guten äusseren Ausstattung und dem verhältnissmässig sehr geringen Preise von nur 15 Sgr. halten wir dieses Buch für eine für alle Lehranstalten und auch für solche Personen, die viel mit logarithmischen, trigonometrischen und andern Rechnungen umzugehen haben, sehr erfreuliche Gabe und wünschen demselben aus Ueberzeugung eine möglichst grosse Verbreitung, welche ihm gewiss auch nicht fehlen wird. Dass die obige etwas ausführlichere, als sonst in diesen literarischen Berichten gewöhnlich ist, Berichterstattung dazu das Ihrige beitragen möge, wünschen wir gleichfalls.

Die Hinzufügung der natürlichen Linien, deren Gebrauch in manchen Fällen bequem ist und, wenigstens zum Theil, bei den Schiffsrechnungen nicht entbehrt werden kann, weshalb sich dieselben (wenigstens die Sinus versus) in dem oben angeführten ausgezeichneten Lehrbuche der Schifffahrtskunde und in den Tafeln von Hantschl (vollständig alle acht Linien) finden, wäre nach unserer Ueberzeugung allerdings in gewisser Rücksicht wünschenswerth gewesen, würde aber das Volumen des Buchs doch zu sehr vergrössert haben, und ist für den gewöhnlichen Schulgebrauch entbehrlich, weshalb wir dem Herrn Verfasser beistimmen müssen, dass er sie weggelassen hat. Die Schiffahrtsschulen finden das für sie in dieser Beziehung Nöthige auch schon in den für sie ausschliesslich bestimmten Büchern. Gr.

Anleitung zur Auflösung, Entwickelung und Berechnung der wichtigsten Aufgaben, Formeln und Ta-

hellen der einfachen und zusamengesetzten Zins- und Zeitrenten-Rechnung. Ein Handbuch für Lehrer der Mathematik, Kameralisten, Forstmänner, Architekten, Oekonomen, Banquiers etc., von Professor L. F. Ritter. Stuttgart. 1846. 4. 1 Rthlr. 21 Sgr.

Eine sehr ausführliche und deutliche Darstellung eines schon oft behandelten Gegenstandes, welche vorzüglich Praktikern, die mit den nöthigen Vorkenntnissen versehen sind, wegen ihrer Ausführlichkeit zur Beachtung empfohlen werden kann. Der bekannten Frage über die Berechnung der Zeiten für Jahrestheile, d. h. überhaupt für einzelne Theile der zum Grunde gelegten Zeiteinheit, nach oder vor Ablauf derselben, hat der Herr Verfasser mit Recht besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Auch sind einige Tafeln beigefügt.

Den Artikel „Antistrauch" im Literar. Ber. Nr. XXIX. S. 427. betreffend.

Von dem Herausgeber.

Um dem Herrn Dr. Strauch in Muri alle Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, hält der Herausgeber dem Publikum gegenüber sich zu der Erklärung verpflichtet, dass von demselben ihm eine Entgegnung auf den oben genannten Artikel zur Aufnahme in den Literar. Ber. eingesandt worden ist. Wenn nun aber der Herausgeber gleich bei der Aufnahme dieses Artikels in den Literar. Ber. es sich zum Princip machte, keine gegen denselben eingehende directe oder indirecte Erwiderung aufzunehmen, und diesem Princip nun auch wirklich ohne alle Ausnahme folgt, so wird dies in Folgendem hoffentlich seine vollständige Erklärung finden, und zugleich auch die briefliche Anfrage des Herrn Dr. Strauch, „weshalb denn der Herr Verfasser des Antistrauch nicht die Heidelberger Jahrbücher, in denen Herrn Dr. Strauchs Recension erschien, zu dessen Veröffentlichung gewählt habe," erledigen. — Die Einrückung des Antistrauch in die genannte kritische Zeitschrift hätte nämlich als eine Antikritik sehr theuer bezahlt werden müssen. Dass dies aber dessen Herr Verfasser nicht gern wollte, war ihm gewiss nicht zu verdenken, und da nun hiermit die Ansichten des Herausgebers in diesen Dingen vollkommen übereinstimmen, so öffnete er ihm gern *ganz unentgeltlich*, wie er als ehrlicher Mann und ohne erst noch ein besonderes Zeugniss anzurufen, versichern kann, die Spalten des Literarischen Berichts, hofft nun aber auch, dass die Gegenpartei zu ihren Erwiderungen jetzt dasjenige Journal wähle, in welchem der erste Angriff erfolgt ist, was *ihm* unter den obwaltenden Umständen so sehr in der Natur der Sache zu liegen scheint, dass er wirklich die ihm in derselben gemachten Zusendungen mit einiger Verwunderung entgegen genommen und bis auf Weiteres ad Acta reponirt hat. Dass aber endlich der Herr Verfasser des Antistrauch keineswegs von dem Herausgeber, wie Herr Dr. Strauch sich ausdrückt, „persönlich bevorzugt wird", ist derselbe jederzeit dadurch zu beweisen bereit, dass er unter gleichen Verhältnissen wie die vorliegenden ihm eingesandte — und zwar immer vor allen Dingen die etwa gegen in dem Literar. Berichte selbst erschienene

Beurtheilungen gerichteten — Antikritiken, von wem dieselben auch kommen mögen, wenn sie nur die den Literarischen Berichten gesteckten Gränzen nicht auf ungebührliche Weise überschreiten, eben so unentgeltlich wie im vorliegenden Falle in den Literar. Bericht aufnehmen oder in einer andern Weise im Archive abdrukken lassen wird.

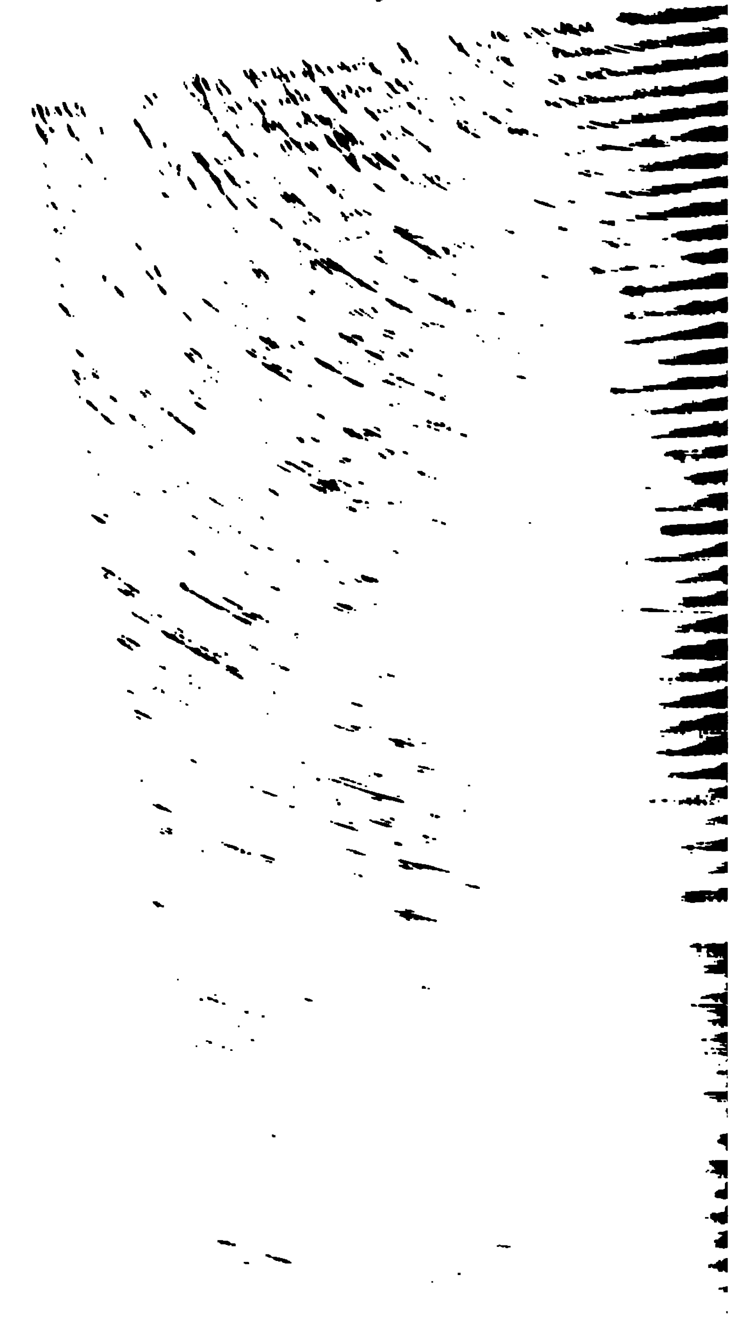
Geometrie.

Vollständige Theorie des ebenen Dreiecks. Auf eigenthümliche Art dargestellt von J. B. Féaux, Dr. der Philosophie. Münster. 1846. 8. 5 Sgr.

Auch bei dem besten Willen haben wir in diesem Schriftchen nicht viel finden können, was uns berechtigte, auf dasselbe hier besonders aufmerksam zu machen.

Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren, namentlich: der ein- und umgeschriebenen Vielecke, der harmonischen Pole und Polaren, der zugeordneten Durchmesser und Achsenpunkte, der Brennpunkte, der gemeinschaftlichen Sekanten und Tangentendurchschnitte, der Oskulation und der doppelten Berührung und sämmtlicher Konstruktionen der Kegelschnitte mittels sogenannter reeller und imaginärer Bedingungen im Zusammenhange mit Jakob Steiner's Geometrie dargestellt von Franz Seydewitz, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Heiligenstadt). Mit elf lithographirten Tafeln. Auch unter dem Titel: Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren. Erster Theil, enthaltend: die Theorie der projektivischen und involutorischen Gebilde, der ein- und der umgeschriebenen Vielecke nebst der bekannten erweiterten Aufgabe des Pappus, der Theilung der Strecken und Winkel, der harmonischen Pole und Polaren, der zugeordneten Durchmesser und Achsenpunkte, der Aehnlichkeit und Affinität der Kegelschnitte, der Brennpunkte und sämmtlicher Konstruktionen der Kegelschnitte mittels sogenannter reeller Bedingungen, von u. s. w. Mit fünf lithographirten Tafeln. Heiligenstadt. 1846. 8. 1 Rthlr.

Die Arbeiten des Herrn Verfassers auf dem Felde der neueren Geometrie sind den Lesern des Archivs hinreichend bekannt, und können unbedenklich dem Besten, was in dieser Beziehung geleistet worden ist, an die Seite gestellt werden. Der Titel ist so ausführlich, dass uns der Herr Verfasser dadurch völlig der Mühe einer besondern Angabe des Inhalts seiner Schrift überhoben hat. Ueber die Entstehung derselben spricht er sich in der Vorrede folgendermassen aus: „Die hier zur Hälfte vorliegende Arbeit entsprang aus dem Versuche, eine vor mehreren Jahren von mir



Grössenbestimmungen ausspricht; durch diese Fälle aber sind in den Figuren eigenthümliche Punkte und Linien, und hiermit Grössenbestimmungen gesetzt, welche auf ihre Weise selbst die Figuren charakterisiren. — Dieser Umstand ist es, welchen ich bei dem Ausdrucke „individuelle Eigenschaften der Figuren" vorzugsweise im Auge hatte. — Einen Zuwachs an Interesse erhalten solche eigenthümliche Erscheinungen dadurch, dass in denselben das Princip der Dualität sich noch erhält."

Wir haben es für das Angemessenste gehalten, die Hauptpunkte über die Tendenz dieser Schrift mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers anzugeben, verweisen aber, da die Beschränktheit des Raumes ein weiteres Eingehen uns hier leider verbietet, auf den übrigen Inhalt der überhaupt sehr lesenswerthen Vorrede. Jedenfalls ist diese Schrift eine wichtige viele neue Aufschlüsse über mehrere Partien gebende Erscheinung auf dem Gebiete der neueren Geometrie, und darf von keinem fur diese Studien sich lebhaft Interessirenden unberücksichtigt gelassen werden. Daher sehen wir auch dem recht baldigen Erscheinen des zweiten Theils mit grossem Verlangen entgegen, und wünschen zugleich sehr, dass der Herr Verfasser Musse finden möge, auch die in der Vorrede versprochene Darstellung der geometrischen Verwandtschaften in der Ebene und im Raume und der Flächen des zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde baldigst der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Schliesslich bemerken wir noch, dass der Herr Verfasser durch die seinen Untersuchungen über die involutorischen Gebilde sehr zweckmässig vorausgeschickte Einleitung über das Wesen der projektivischen Eigenschaften überhaupt für das leichte Verstehen seiner Schrift vollständig gesorgt hat, so dass dieselbe in der That völlig unabhängig von andern Schriften über neuere Geometrie ganz durch und für sich selbst verstanden werden kann, was zu ihrer sehr zu wünschenden weiteren und allgemeineren Verbreitung gewiss wesentlich beitragen wird.

Optik.

Optische Untersuchungen. Von Johann August Grunert. Erster Theil. Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope. Mit einer Figurentafel. Auch unter dem Titel: Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, zugleich als ein Lehrbuch der elementaren Optik. Mit einer Figurentafel. Leipzig. 1846. 8. $1\frac{1}{3}$ Rthlr.

Weil es, wie ich in der Vorrede kurz aus einander zu setzen gesucht habe, jetzt noch nicht an der Zeit sein dürfte, ein ausführliches System der Optik, wie Eulers und Klügels bekannte Werke für ihre Zeit waren, zu verfassen, so habe ich mich entschlossen, in dem Werke, dessen erster Theil jetzt vorliegt, vorläufig eine Reihe optischer Untersuchungen in der Weise zu veröffentlichen, dass jeder Theil desselben ein möglichst in sich selbst abgeschlossenes Ganzes bildet.

Der vorliegende erste Theil enthält, wie sein besonderer Titel besagt, die allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, was man aber in dem folgenden Sinne zu nehmen hat. Ich betrachte nämlich in demselben die von Spiegel- und Linsen-Systemen hervorgebrachten Bilder strahlender Punkte, ohne alle Rücksicht auf die sogenannten Abweichungen, als gewisse Gränzen, denen sich die Punkte, in welchen sich die von leuchtenden Punkten ausgehenden Strahlen nach an Spiegeln oder Linsen erlittenen Zurückwerfungen oder Brechungen schneiden, unter gewissen Bedingungen nähern, und gelange dadurch zuvörderst zu völlig genauen Formeln zur Bestimmung der Lage der Bilder nach diesem Begriffe, aus denen dann bequemere Näherungsformeln abgeleitet werden. Alle diese Formeln sind zu völliger Allgemeinheit erhoben worden, so dass sie für jedes aus einer beliebigen Anzahl von i Elementen (Spiegel und Linsen) bestehende System gelten. Die möglichste Vereinfachung und elegante Darstellung dieser Formeln habe ich mir besonders angelegen sein lassen, wobei mir der hier zuerst eingeführte Begriff des Modulus eines Spiegels oder einer Linse sehr gute Dienste geleistet und die Möglichkeit herbeigeführt hat, dass die von mir gegebenen Kettenbrüche — denn dass man auf diese Form bei Untersuchungen dieser Art ganz von selbst geführt wird, darf ich als allgemein bekannt voraussetzen — gerade nur aus eben so vielen Gliedern bestehen, als das System Elemente enthält, also aus i Gliedern, so dass also diese Formeln wohl die einfachsten sein dürften, auf die man bei dem gegenwärtigen Stande der Sache kommen kann. Diese Formeln werden hierauf zur Entwickelung der allgemeinen Theorie der Fernröhre und Mikroskope, immer aber für jetzt ohne alle Berücksichtigung der sogenannten Abweichungen, angewandt, und ein Paar der einfachsten Fälle als Beispiele betrachtet, die ins Einzelne gehende Betrachtung der verschiedenen Arten optischer Instrumente aber späteren speciellen Untersuchungen überlassen. Das erste, „die Grundgesetze" überschriebene Kapitel durfte hier nur deshalb nicht wegbleiben, weil dieser erste Theil zugleich als ein Lehrbuch der elementaren Optik dienen soll, und enthält sonst lauter bekannte Dinge. Der erste der beiden Anhänge ist nur seines geometrischen Interesses wegen beigefügt worden. In dem zweiten Anhange habe ich eine allgemeine Theorie der Reflexion bei den Kegelschnitten geliefert, weil dieser interessante Gegenstand bis jetzt noch nicht so untersucht worden ist, als er mir zu verdienen scheint, und bin dabei zu ganz allgemeinen Formeln gelangt, deren Entwickelung mir zugleich zu einer, wie ich glaube, bemerkenswerthen Anwendung der aus der Differentialrechnung bekannten Regeln zur Bestimmung der unbestimmt zu sein scheinenden Werthe gebrochener Functionen Veranlassung gegeben hat.

Der zweite Theil, welcher schon bis zur Hälfte gedruckt ist und jedenfalls noch in diesem Jahre erscheinen wird, enthält eine ausführliche Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre, und zwar sowohl zweifacher als dreifacher Objective, wobei ich es mir zum Gesetz gemacht habe, mir nie — wie dies bisher immer, selbst bei Herschel's Theorie geschehen ist — eine Vernachlässigung der Dicken der Linsen zu gestatten. Alle Formeln sind so weit entwickelt, dass sie eine unmittelbare Einführung der

numerischen Data gestatten, und es sind sowohl alle bis jetzt für den Bau achromatischer Objective vorgeschlagenen Principe, als auch einige neue, für zweifache und dreifache Objective einer ausführlichen Untersuchung unterworfen worden. Wenn auch jetzt dreifache Objective nicht mehr gebaut zu werden pflegen, so scheinen mir dieselben doch in theoretischer Rücksicht so wesentliche Vortheile darzubieten, dass sie nicht ohne genauere Untersuchung geradezu verworfen werden dürfen. Auch ist ja bekannt genug, dass ein so geschickter Künstler wie Peter Dollond sich besonders günstige Wirkungen von denselben versprach, und nach dem Urtheile einiger neueren geschickten Optiker dürfte in der That die grössere Lichtabsorption, welche man meistens gegen die dreifachen Objective geltend zu machen pflegt, doch nicht so gross sein, als man sich gewöhnlich vorstellt. Nach dem Erscheinen dieses zweiten Theils wird weiter über denselben berichtet werden.

Was die späteren Theile enthalten werden, lässt sich jetzt noch nicht mit völliger Bestimmtheit sagen. Jedoch denke ich in dem dritten Theile zunächst eine vollständige kritische Darstellung aller bekannten Methoden zur Bestimmung der Brechungsverhältnisse, welche jedenfalls für die Praxis von der allergrössten Wichtigkeit ist, wenn dieselbe mit der Theorie soll gleichen Schritt halten können, zu liefern und auch einiges Neue über diesen wichtigen Gegenstand der Beurtheilung des Publikums vorzulegen. Dann wird wahrscheinlich die Theorie der Oculare und einiges Andere folgen, und endlich denke ich die ganze Theorie der optischen Instrumente aus weit allgemeineren Gesichtspunkten, als dies überhaupt bis jetzt geschehen sein dürfte, zu betrachten. Nach dem gegenwärtigen Stande der Sachen kann man aber nach meiner vollkommensten Ueberzeugung am meisten hoffen, auch der Praxis durch die Theorie Einiges zu nützen, wenn man die älteren, allerdings an vielen Mängeln leidenden Theorieen möglichst zu vervollkommnen sucht, welches auch der erste und nächtes Zweck gewesen ist, welchen ich durch die Veröffentlichung dieser optischen Untersuchungen zu erreichen gesucht habe. Gr.

Physik.

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. Nro. 63. und 64. findet man eine lesenswerthe Abhandlung über die Grenzen, innerhalb welcher barometrische Höhenmessungen Vertrauen verdienen, von Herrn A. F. Carl v. Fischer.

Actes de la Société helvétique des sciences naturelles, réunie à Genève les 11., 12. et 13. Aout 1845. Trentième session. Genève. 1846. 8.

Mit grossem Interesse haben wir in dieser Sammlung vorzüglich den Discours prononcé à l'ouverture des séances de la société helvétique des sciences naturelles à Genève le 11. Aout 1845, par M. le prof. De la Rive.

président, gelesen, in welchem Herr de la Rive eine zu allgemeinerer Beachtung zu empfehlende zwar kurze, aber schön geschriebene und lichtvolle Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Electricitätslehre und deren grosse Bedeutung für die gesammte Naturwissenschaft giebt.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen bei Begründung der Königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens, herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig. 1846. 8. 5 Rthlr.

Die Herausgabe dieser prachtvoll ausgestatteten Schrift hat, wie der Titel sagt, ihre nächste Veranlassung in einem Ereignisse gefunden, welches bei allen, die sich mit der Cultur der Wissenschaften beschäftigen, das lebhafteste Interesse erregen und deren wärmste Theilnahme in Anspruch nehmen muss. Denn an Leibnizens Geburtsorte an dem Tage seiner zweihundertjährigen Geburtsfeier, in dem Herzen Deutschlands an einem Orte, welcher für das Gedeihen der Wissenschaften von jeher von der grössten Bedeutung gewesen ist, in einem stets auf der Bahn des wahren Fortschritts begriffenen Lande, der Wiege der Reformation, unter dem Schutze einer der aufgeklärtesten Regierungen Deutschlands, eines derjenigen Institute entstehen zu sehen, welche der grosse Mann selbst fortwährend für die kräftigsten Beförderungsmittel der Wissenschaften gehalten und stets als solche vorzugsweise empfohlen hat, ist gewiss, — ebenso wie die aus den Zeitungen vorläufig bekannt gewordene höchst wichtige Stiftung einer Akademie der Wissenschaften in Wien, für welche sich bekanntlich Leibniz auf das Lebhafteste interessirte —, eine Begebenheit von wahrhaft historischer Bedeutung, welche das Herz eines jeden Deutschen mit dem wärmsten Danke gegen denjenigen erfüllen muss, welcher den Gedanken einer solchen Stiftung zuerst fasste.

Die vorliegende Schrift ist ein in jeder Beziehung würdiges Denkmal dieser Stiftung und enthält die folgenden in das Gebiet der Mathematik und Physik einschlagenden Abhandlungen, für deren Trefflichkeit sämmtlich die Namen ihrer Verfasser vollständig bürgen:

Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Von A. F. Möbius.

Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. Von M. W. Drobisch.

Ueber die Schwingungen der Saiten. Von A. Seebeck.

Ueber die Spiralen der Conchylien. Von C. F. Naumann. (Auch diese Abhandlung bietet ein mathematisches Interesse in mehrfacher Beziehung dar.)

Elektrische Versuche. Von F. Reich.

Elektrodynamische Maassbestimmungen. Von Wilhelm Weber.

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professor Silliman and Benjamin Silliman. (S. Literar. Bericht. Nro. XXVIII. S. 424.)

Vol. XLIX. 1845. Nro. II. Art. I. The Coast Survey of the United States. p. 229. Diese Darstellung des Verlaufs und des jetzigen Standes der grossen amerikanischen Küstenvermessung, welche früher von dem verdienten im Jahre 1843 verstorbenen Hassler geleitet wurde, jetzt unter der trefflichen Leitung des Herrn Dr. Bache steht, wird das Interesse eines jeden Lesers lebhaft in Anspruch nehmen. — IV. Meteorological Observations made at Hudson, Ohio, during the years 1841, 2, 3 ad 4, with a summary for seven years; by Prof. Elias Lomis. p. 266. — VI. Description of the Solar Index, a new magnetical Instrument; by Marshall Conant. p. 301. — VII. A Report to the Navy Departement of the United States on American Coals, applicable to Steam Navigation and to other purposes; by Prof. Walter R. Johnson. p. 310. — Vielfache literarische Notizen und Miscellen beschliessen wie gewöhnlich auch diese Nummer.

Um den hier noch übrigen Raum zu benutzen, theilen wir folgende *Johann Heinrich Lambert* betreffende Stelle aus den oben erwähnten Notizen zur Geschichte der Mathematik in der Schweiz von Herrn R. Wolf in Bern in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 54. und 55. S. 131. mit. Herr Wolf sagt nämlich: „Hingegen mögen zu näherer Kenntniss des Characters eines Mannes, der sich selbst, ohne unbescheiden zu sein, an die Seite von Euler, d'Alembert und Lagrange setzen durfte, folgende Verse mitgetheilt werden, welche er[1]) seinem Freunde und Correspondenten[2]), Herrn Oberbuchhalter Ludwig Oberreit in Dresden, ins Stammbuch schrieb:

Nicht Jeder, den mit mir Gesellschaft, Lust und Wein verbrüdert, —
Nein, wer an mir was Gutes sieht,
Das ihn nach meinem Umgang zieht,
Und meine Redlichkeit mit gleicher Treu erwiedert, —
Der nicht aus Eigensinn
Und Argwohn Alles straft, was sich noch wohl geziemet, —
Der mich bei Andern mehr als bei mir selber rühmet,
Und mir allein entdeckt, worin ich strafbar bin,
Der mein Vergehn mehr bessert als verlachet, —
Der stets so redet wie ers meint
Und den *sein* Glück nicht stolz, noch *meines* neidisch machet,
Wisst, Freunde, der nur ist mein Freund."

In der nämlichen Schrift Nr. 59. und 60. S. 18. hat derselbe Herr Verfasser die folgende Genealogie der in der Mathematik so berühmten Familie Bernoulli mitgetheilt, zu welcher er von Herrn Prof. Christoph Bernoulli in Basel, Sohn Daniel II, 1839 das Geripe erhielt: Jacob Bernoulli (1598—1634), ein Kauf-

---

1) Siehe die Mscr. des sel. Schanzenherr Feer in Zürich.
2) Siehe Lamberts deutschen gelehrten Briefwechsel. II. 366. u. f.

mann aus einem angesehenen Geschlechte Antwerpens, das sich Alba's Religionsverfolgungen durch die Flucht entzog — wurde 1622 in das Basel'sche Bürgerrecht aufgenommen, und von dessen Sohn

a. Nicolaus (1623—1708), Rathsherr in Basel,

mögen folgende Nachkommen aufgeführt werden:

b. *Jacob I* (1654—1705), Sohn von *a*, Professor der Mathematik in Basel, Erfinder der logarithmischen Spirale, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, etc. und Lehrer Johannes I und Nicolaus I. (Siehe s. *Eloge* in den *Mém. de Paris. A.* 1705.)

c. *Nicolaus*, Maler, Sohn von *a.*

d. *Johannes I* (1667—1748), Sohn von *a*, Professor der Mathematik in Gröningen und Basel, Lehrer von Hospital, Euler, etc., erster Bearbeiter der Exponentialgrössen, etc., Correspondent und Vertheidiger von Leibniz. (Siehe s. *Eloge* in den *Mém. de Paris. A.* 1748. und *Mém. de Berlin. A.* 1747.)

e. Nicolaus I (1687—1759), Sohn von *c*, Professor der Mathematik in Padua, später der Rechte in Basel, Herausgeber der nachgelassenen Schriften Jacob I.

f. Nicolaus II (1695—1726), Sohn von *d*, Professor der Rechte in Bern, dann Akademiker in Petersburg. (Siehe s. *Eloge* in den *Comment. Acad. Petrop. II.*)

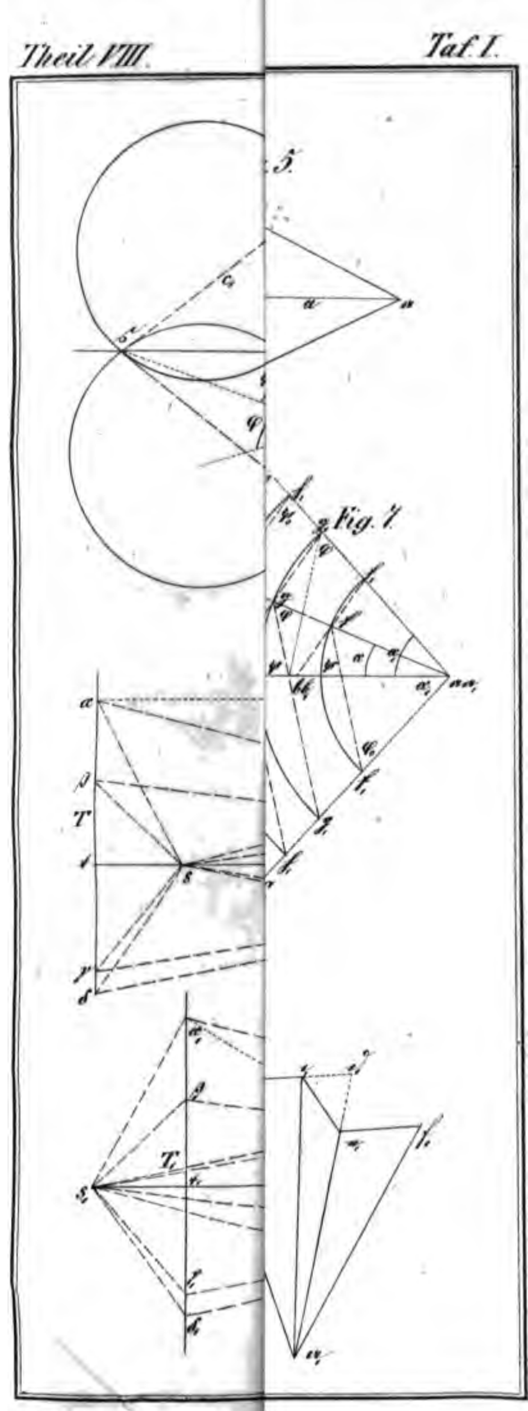
g. *Daniel I* (1700—1782), Sohn von *d*, Akademiker in Petersburg, später Professor der Physik in Basel, Verfasser der Hydrodynamik. (Siehe s. *Eloge* in den *Mém. de Paris* 1782 und *Nova Acta Helvetica I.*)

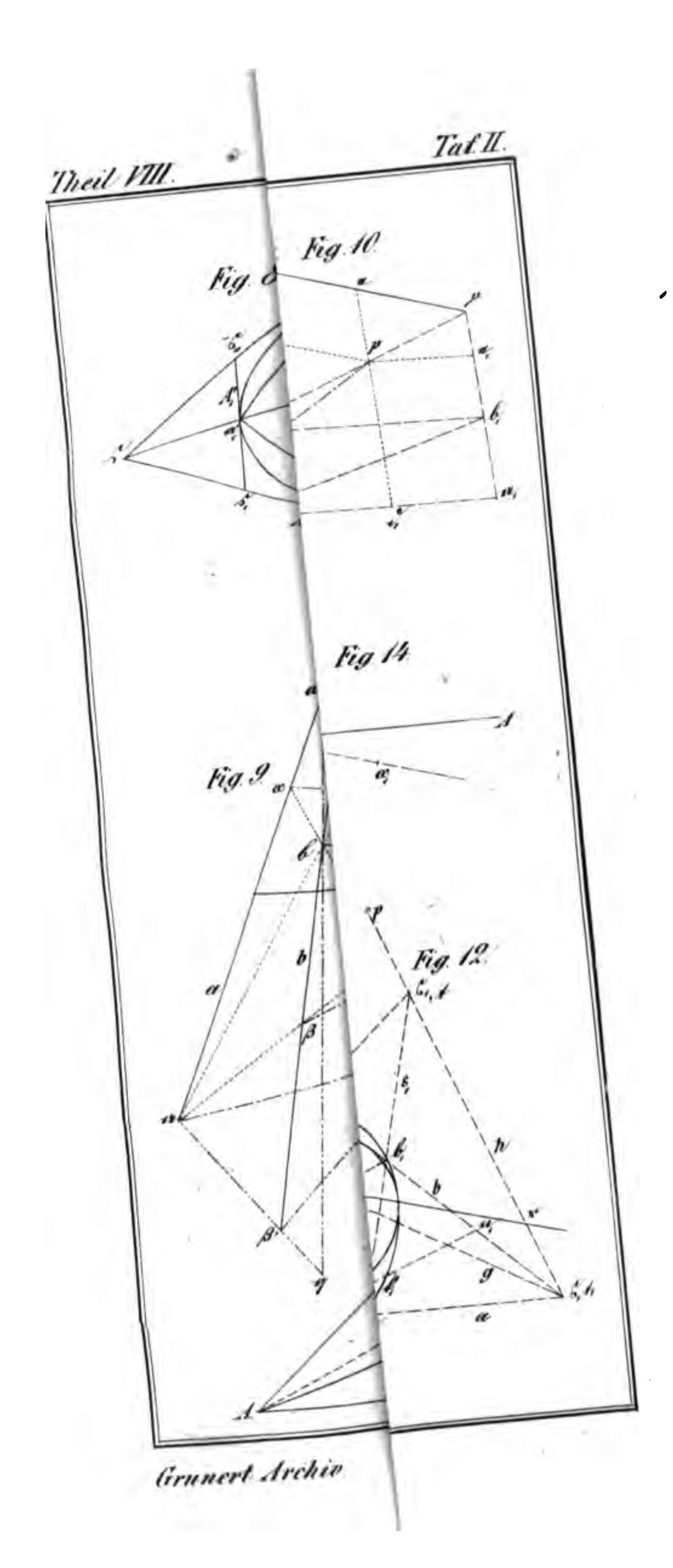
h. Jahannes II (1710—1790), Sohn von *d*, Professor der Mathematik in Basel.

i. Johannes III (1744—1807), Sohn von *h*, Director der Sternwarte in Berlin und später Directer der mathematischen Classe der dortigen Akademie.

k. Daniel II (1751—1834), Sohn von *h*, Professor der Physik in Basel.

l. Jacob II (1759—1789), Sohn von *h*, Akademiker in Petersburg. (Siehe s. *Eloge* in den *Nova Acta Acad. Petrop. VII.*)


5.
Fig. 7.


Fig. 8
Fig. 10
Fig. 14
Fig. 9
Fig. 12



